УДК 517.9

А. В. Косяк, Л. П. Нижник (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА И ГИПЕРГРУППЫ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО САМОСОПРЯЖЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ*

We construct new examples of operators of generalized translation and convolutions in eigenfunctions of some self-adjoint differential operators.

Побудовано нові приклади операторів узагальненого зсуву та згорток за власними функціями деяких самоспряжених диференціальних операторів.

В период с 1950 по 1953 гг. Ю. М. Березанским (частично совместно с С. Г. Крейном) была разработана детальная общая теория гиперкомплексных систем со счетными и непрерывными базисами (см. [1] и приведенную в ней библиографию). Эта теория позволила построить глубокие обобщения гармонического анализа и теории почти периодических функций. Объекты, близкие к гиперкомплексным системам, — гипергруппы — начали изучаться за рубежом лишь в 1973 г. Важным вопросом в теории гиперкомплексных систем и гипергрупп является построение различных конкретных примеров таких объектов. Широкий класс примеров основан на рассмотрении операторов обобщенного сдвига, которые связаны с конкретными дифференциальными и разностными операторами [1, 2]. В настоящей статье показано, что для этих целей можно использовать также самосопряженные дифференциальные операторы типа Уднова – Шехтера [3], одновременно действующие как в области, так и на границе.

1. Алгебраические структуры, связанные с операторами первого порядка. ***1.1. Самосопряженный оператор.*** Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus \mathbf{E}^1$ оператор A, заданный равенством

$$A\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \frac{1}{2}\left[\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\varphi'(x) \\ i\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \tag{1}$$

на функциях $\varphi \in W_2^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ из пространства Соболева всех абсолютно непрерывных функций на интервале $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, у которых производная φ' интегрируема с квадратом.

Теорема 1. *Оператор A в гильбертовом пространстве H является самосопряженным оператором с чисто дискретным спектром. Его собственные значения λ_n, $n \in Z$, занумерованные в порядке возрастания, с условием $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ являются корнями характеристического уравнения*

$$e^{i\lambda} = \frac{2 - i\lambda}{2 + i\lambda}. \tag{2}$$

При больших $n \gg 1$ собственные числа имеют асимптотику

$$\lambda_n = \pi(2n-1) + \varepsilon_n + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \varepsilon_n = \frac{4}{\pi(2n-1)}. \tag{3}$$

Функции $\varphi_n = e^{i\lambda_n x}$, $n \in Z$, образуют полную в пространстве $L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ систему функций, ортогональную относительно скалярного произведения

* Выполнена при частичной финансовой поддержке DFG (проект 436 UKR113/72) .

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L_2} + \varphi_r \cdot \overline{\psi}_r, \quad \varphi_r = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right], \quad \varphi, \psi \in C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $U = \operatorname{col}(u(x), u_r)$ вектор из H, построенный по функции $u \in W_2^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Вектор u принадлежит области определения оператора A и $Au = \operatorname{col}(-iu'(x), iu_s) \in H$, где $u_s = u\left(\frac{1}{2}\right) - u\left(-\frac{1}{2}\right)$. Покажем, что область определения оператора A всюду плотна в H. Если бы это было не так, то существовал бы вектор $\Psi = \operatorname{col}(\psi(x), a) \neq 0$, $\psi \in L_2$, $a \in C^1$, такой, что $(U, \Psi)_H = 0 \quad \forall u \in W_2^1$. Для функций $u \in C_0^\infty\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ равенство $(U, \Psi)_H = 0$ переходит в равенство $(u, \psi)_{L_2} = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty$. В силу плотности пространства C_0^∞ в пространстве L_2 приходим к выводу, что $\psi \equiv 0$. Тогда равенство $(U, \Psi)_H = 0$ превращается в $u_r \bar{a} = 0 \quad \forall u \in W_2^1$. Полагая $u \equiv 1$, имеем $a = 0$, что противоречит условию $\Psi = \operatorname{col}(\psi(x), a) \neq 0$. Поэтому область определения оператора A всюду плотна в пространстве H. Оператор A симметрический в гильбертовом пространстве H. Действительно, для векторов $U = \operatorname{col}(u(x), u_r)$ и $V = \operatorname{col}(v(x), v_r)$, где $u, v \in W_2^1$, в силу определения оператора A и формулы Грина

$$(AU, V)_H - (U, AV)_H = (-iu', v)_{L_2} + (iu_s, v_r)_{E^1} - (u, -iv')_{L_2} - (u_r, iv_s)_{E^1} =$$

$$= -i\left[u\left(\frac{1}{2}\right)\overline{v}\left(\frac{1}{2}\right) - u\left(-\frac{1}{2}\right)\overline{v}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + i[u_s \overline{v}_r + u_r \overline{v}_s] \equiv 0.$$

Покажем теперь, что оператор A самосопряженный в H. Для этого достаточно показать, что область значений оператора $A \pm iI$ составляет все пространство H, т. е. уравнение $(A \pm iI)U = \Psi$ однозначно разрешимо при любом векторе $\Psi = \operatorname{col}(\psi(x), a) \in H$. Указанное уравнение сводится к дифференциальному уравнению $-iu'(x) \pm iu(x) = \psi(x)$ и граничному условию $iu_s \pm iu_r = a$. Эта задача однозначно решается при любых $\psi \in L_2$ и $a \in C$, а ее решение $u \in W_2^1$ легко представить в явном виде.

Для нахождения собственных векторов $\Phi_\lambda = \operatorname{col}(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)$ и собственных значений λ необходимо найти нетривиальное решение уравнения $A\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$. Эта задача сводится к дифференциальному уравнению $-i\varphi'_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ и граничному условию $-i\varphi_{\lambda,s} = \lambda\varphi_{\lambda,r}$. Последняя задача имеет нетривиальные решения $\varphi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ только в случае, если λ является решением характеристического уравнения (2). Уравнение (2) имеет однократные вещественные решения λ_n, $n \in Z$, которые можно занумеровать в порядке возрастания, полагая $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ и для больших n решения характеристического уравнения (2) имеют асимптотику (3). Поскольку собственные функции $\Phi_{\lambda_n} = \operatorname{col}(\varphi_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda,r})$ самосопряженного оператора A образуют полную ортогональную в H систему, то $(\Phi_{\lambda_n}, \Phi_{\lambda_m})_H = 0$ при $n \neq m$. Это равенство эквивалентно условию ортогональности функций $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n \in Z}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, задаваемого равенством (4). При этом

$$(\Phi_{\lambda_n}, \Phi_{\lambda_m})_H = \langle e^{i\lambda_n x}, e^{i\lambda_m x} \rangle = \delta_{n,m} N_n^2, \quad (5)$$

где $N_n^2 = 1 + [\lambda_n^2/4+1]^{-1}$, а $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы система функций* $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in Z}$, $\lambda_0 = 0$, *образовывала полную в* $L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *ортогональную относительно скалярного произведения* (4) *систему функций, необходимо и достаточно, чтобы числа* λ_n *были всеми решениями уравнения* (2).

Доказательство. Условие $\langle e^{i\lambda_n x}, 1\rangle = 0$ приводит к характеристическому уравнению (2) для чисел λ_n. Если числа $\lambda_n \neq \lambda_m$ являются решениями уравнения (2), то $\langle e^{i\lambda_n x}, e^{i\lambda_m x}\rangle = 0$, т. е. они ортогональны относительно скалярного произведения (2). Полнота системы $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in Z}$ следует из теоремы 1, поскольку векторы $\Phi_{\lambda_n} = \operatorname{col}(e^{i\lambda_n x}, \cos(\lambda_n/2))$ образуют полную ортогональную систему в пространстве H.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Теоремы 1, 2 остаются верными, если скалярное произведение (2) заменить на более общее

$$\langle \varphi, \psi\rangle = (\varphi, \psi)_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} + \alpha^2\varphi_r\overline{\psi}_r,$$

оператор A определять равенством $A\operatorname{col}(u(x), \alpha u_r) = \operatorname{col}(-iu'(x), i\alpha^{-1}u_s)$, а характеристическое уравнение (2) заменить на $e^{i\lambda} = \dfrac{2 - i\lambda\alpha^2}{2 + i\lambda\alpha^2}$.

1.2. Эволюционное уравнение и операторы обобщенного сдвига. Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения в пространстве H вида

$$\frac{dU}{dt} = iAU, \qquad U\big|_{t=0} = F. \tag{6}$$

Поскольку оператор A является самосопряженным в пространстве H, задача (6) однозначно разрешима на всей оси $-\infty < t < +\infty$ при произвольном начальном условии $F \in H$. Пусть $F = \operatorname{col}(f(x), f_r)$, где $f \in C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда решение задачи (6) имеет вид $U(t) = \operatorname{col}\left(u(t,x), \frac{1}{2}\left[u\left(t, \frac{1}{2}\right) + u\left(t, -\frac{1}{2}\right)\right]\right)$, где функция $u(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[u\left(t, \frac{1}{2}\right) + u\left(t, -\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[u\left(t, -\frac{1}{2}\right) - u\left(t, \frac{1}{2}\right)\right],\\ u(0,x) = f(x), \qquad u\left(0, \frac{1}{2}\right) + u\left(0, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 3. *Решение задачи* (7) *представимо в виде* $u(t,x) = \hat{f}(x+t)$, *где функция* $\hat{f}(x)$ *является продолжением заданной на интервале* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *функции* f *на всю ось. При этом*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} -f(x+1) + 2e^{2(x+1/2)}f_r + 4\int_{x+1}^{1/2} e^{2(x+1-\tau)}f(\tau)\,d\tau, & -\frac{3}{2} \le x \le -\frac{1}{2}, \\ f(x), & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \\ -f(x-1) + 2e^{-2(x-1/2)}f_r + 4\int_{-1/2}^{x-1} e^{-2(x-1-\tau)}f(\tau)\,d\tau, & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

Если $f(x) = e^{i\lambda_n x}$, *где* λ_n — *собственные значения оператора* A, *то* $\hat{f}(x) = e^{i\lambda_n x}$ *для всех* x. *Если* $f(x) = \sum_n f_n e^{i\lambda_n x}$ — *ряд Фурье функции* $f \in C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *то ее продолжение* $\hat{f}$ *представимо тем же рядом* $\hat{f} = \sum_n f_n e^{i\lambda_n x}$, $x \in R^1$.

Доказательство. Из уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ следует $u(t, x) = \hat{f}(x+t)$. Из начального условия $u(0, x) = f(x)$ получаем $\hat{f}(x) = f(x)$ при $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. Из оставшегося соотношения (7) имеем

$$\hat{f}'\left(t+\frac{1}{2}\right) + 2\hat{f}\left(t+\frac{1}{2}\right) = -\hat{f}'\left(t-\frac{1}{2}\right) + 2\hat{f}\left(t-\frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Интегрируя (9) при $\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}$ и при $-\frac{3}{2} \le t \le -\frac{1}{2}$ с учетом $\hat{f}(x) = f(x)$, получаем соотношения (8).

Если вектор начальных условий $F = \mathrm{col}(e^{i\lambda_n x}, \cos(\lambda_n/2)) \equiv \Phi_{\lambda_n}$ в задаче Коши (6) является собственным вектором оператора A с собственным значением λ_n, то решение имеет вид $U(t) = e^{i\lambda_n t}\Phi_{\lambda_n}$. Поэтому функция $u(t, x) = e^{i\lambda_n t} e^{i\lambda_n x} = \hat{f}(x+t)$ и, следовательно, $\hat{f}(x) = u(x, 0) = e^{i\lambda_n x}$. Таким образом, продолжение $\widehat{e^{i\lambda_n x}} = e^{i\lambda_n x}$ при всех x. Поэтому $\hat{f}(x) = \sum_n \hat{f}_n e^{i\lambda_n x} = \sum_n f_n e^{i\lambda_n x}$.

Теорема доказана.

Определение 1. *Оператор* T^t *обобщенного сдвига, соответствующий задаче* (7), *определяется равенством*

$$T^t f(x) = u(t, x) = \hat{f}(x+t), \tag{10}$$

где $\hat{f}$ — *продолжение функции* f *из интервала* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *на всю ось согласно теореме* 3.

Теорема 4. *Если* λ_n — *собственные значения оператора* A, *т. е. решения характеристического уравнения* (2), *то*

$$T^t e^{i\lambda_n x} = e^{i\lambda_n t} e^{i\lambda_n x}. \tag{11}$$

Если $f(x) = \sum_n f_n e^{i\lambda_n x}$ *является рядом Фурье функции* f *относительно системы функций* $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n \in Z}$, *ортогональных относительно скалярного произведения* (4), *т. е.*

$$f_n = \left\langle f(x), e^{i\lambda_n x}\right\rangle \frac{1}{N_n^2}, \tag{12}$$

то

$$T^t f(x) = \sum_n f_n e^{i\lambda_n t} e^{i\lambda_n x}. \tag{13}$$

Семейство операторов T^t *образует унитарную однопараметрическую группу операторов относительно скалярного произведения* (4):

$$T^{t_1} T^{t_2} = T^{t_1+t_2}, \quad T^0 = I, \quad \left\langle T^t\varphi, T^t\psi\right\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку продолжение, согласно теореме 3, функции $e^{i\lambda_n x}$ совпадает с ней самой, в силу (10) получаем (11). Равенство (13) получается применением линейного оператора T^t к разложению в ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in Z}$ с учетом равенства (11). Последнее равенство в (14) следует из равенства Парсеваля для рядов Фурье по полной ортогональной системе функций

$$\langle f, g\rangle = \sum_n f_n \bar{g}_n \frac{1}{N_n^2} \tag{15}$$

и явного вида коэффициентов Фурье функции $T^t f$, $(T^t f)_n = f_n e^{i\lambda_n t}$, вытекающих из (13).

Теорема доказана.

1.3. Свертка.

Определение 2. *Свертка двух непрерывных функций* $f, g \in C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *определяется через скалярное произведение* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (4) *и оператор обобщенного сдвига* T^t *равенством*

$$(f * g)(t) = \langle T^t f, g^*\rangle, \tag{16}$$

где $g^*(x) = \bar{g}(-x)$ — *инволюция.*

Теорема 5. *Данная в определении* 2 *свертка является ассоциативным и коммутативным умножением.*

Доказательство. Определим свертку двух характеров $e^{i\lambda_n x}$ и $e^{i\lambda_m x}$. Поскольку $T^t e^{i\lambda_n x} = e^{i\lambda_n t} e^{i\lambda_m x}$, а $[e^{i\lambda_m x}]^* = e^{i\lambda_m x}$, из (16) следует

$$\left(e^{i\lambda_n x} * e^{i\lambda_m x}\right)(t) = \left\langle e^{i\lambda_n t} e^{i\lambda_n x}, e^{i\lambda_m x}\right\rangle = e^{i\lambda_n t}\,\delta_{nm} N_n^2. \tag{17}$$

Пусть заданы функции $f, g \in C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Представляя эти функции рядами Фурье $f(x) = \sum_n f_n e^{i\lambda_n x}$, $g(x) = \sum_n g_n e^{i\lambda_n x}$ и учитывая равенство (17), имеем

$$(f * g)(x) = \sum_n f_n g_n N_n^{-2} e^{i\lambda_n x}. \tag{18}$$

Из представления (18) следует, что коэффициенты Фурье свертки выражаются через произведение коэффициентов Фурье сверточных множителей, т. е. свертка (16) коммутативна.

Представляя коэффициенты Фурье повторных сверток $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$ через произведения коэффициентов Фурье сверточных множителей, получаем

$$[(f * g) * h]_n = f_n g_n h_n N_n^{-4} = [f * (g * h)]_n.$$

Таким образом, свертка (16) ассоциативна.

Теорема доказана.

Из определения 2 свертки, явного вида скалярного произведения (4), явного вида оператора сдвига $T^t f(x) = \hat{f}(x+t)$ и явного вида (8) продолжения $\hat{f}$ функции f легко получить выражение для свертки двух функций

$$(f * g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} f(\xi)\, g(\eta)\, c(\xi, \eta, x)\, d\xi\, d\eta,$$

где $c(\xi, \eta, x) = (\chi_{[-1/2, \xi]} * \chi_{[-1/2, \eta]})(x)$, а $\chi_{[-1/2, \xi]}$ — характеристическая функция интервала $\left[-\frac{1}{2}, \xi\right]$.

Эту свертку можно представить также в явном виде

$$(f * g)(x) = \int_{x-1/2}^{1/2} f(x-s)\, g(s)\, ds - \int_{-1/2}^{x-1/2} f(x-1-s)\, g(s)\, ds +$$

$$+ 4\iint_{D_x} e^{-2(x-1+\xi+\eta)} f(\xi)\, g(\eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ e^{-2x}\left[f_r \cdot g_r + 2 f_r \int_{-1/2}^{x-1/2} e^{1+\eta} g(\eta)\, d\eta + 2 g_r \int_{-1/2}^{x-1/2} e^{1+\xi} f(\xi)\, d\xi \right],$$

где $x > 0$, а $D_x = \{ (\xi, \eta) : -1/2 \le \xi, \eta \le 1/2, \xi + \eta \le x - 1 \}$.

1.4. Структурные константы. Совокупность характеров $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n \in Z}$ образует ортогональную систему относительно сверточного умножения (17). Обычное произведение двух характеров можно выразить через их линейную комбинацию в виде

$$e^{i\lambda_n x}\, e^{i\lambda_m x} = \sum_k c_{n,m,k}\, e^{i\lambda_k x},$$

где $c_{n,m,k}$ — структурные константы. Поскольку данное представление является рядом Фурье функции $e^{i\lambda_n x}\, e^{i\lambda_m x}$, то

$$c_{n,m,k} = \frac{1}{N_k^2}\left\langle e^{i\lambda_n x} e^{i\lambda_m x}, e^{i\lambda_k x} \right\rangle.$$

При $\lambda_n + \lambda_m - \lambda_k \ne 0$

$$c_{n,m,k} = (-1)^{n+m+k+1}\left[\left(4+\lambda_n^2\right)\left(4+\lambda_m^2\right)\left(4+\lambda_k^2\right)\right]^{-1/2} \frac{2\lambda_n \lambda_m (\lambda_n + \lambda_m)}{N_k^2 (\lambda_n + \lambda_m - \lambda_k)}.$$

Кроме этого, $c_{n,0,k} = c_{0,n,k} = \delta_{n,k}$, $c_{n,-n,0} = 1$.

2. Алгебраические структуры, связанные с дифференциальными операторами второго порядка. ***2.1. Самосопряженный оператор.*** Рассмотрим в пространстве $H = L_2(0, 1) \oplus \mathbf{E}^1$ оператор B, определяемый равенством

$$B \operatorname{col}\left(u(x), u(1)\right) = \operatorname{col}\left(-u''(x), u'(1)\right) \tag{19}$$

на функциях $u(x)$ из соболевского пространства $W_2^2(0,1)$, удовлетворяющих граничному условию $u'(0) = 0$.

Теорема 6. *Оператор B является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H с чисто дискретным спектром. Его собственные значения λ_n^2, занумерованные в порядке возрастания, являются корнями характеристического уравнения*

$$\tan \lambda_n = -\lambda_n, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n \ge 0. \tag{20}$$

Функции $\varphi_n = \cos\lambda_n x$, $n = 0, 1, \ldots$, *образуют полную в пространстве* H *систему функций, ортогональную относительно скалярного произведения*

$$\langle\varphi, \psi\rangle = (\varphi, \psi)_{L_2} + \varphi(1)\cdot\overline{\psi}(1), \qquad \varphi, \psi \in C(0, 1). \tag{21}$$

При этом

$$\langle\cos\lambda_n x, \cos\lambda_m x\rangle = \delta_{n,m} N_n^2, \tag{22}$$

где $N_n^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\lambda_n\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\lambda_n^2}\right)$, $n > 0$ *и* $N_0^2 = 2$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

2.2. Обобщенный сдвиг.

Определение 3. *Линейный оператор обобщенного сдвига* T^t *на базисе* $\cos\lambda_n x$, *где* λ_n — *корни характеристического уравнения* (20), *определяется равенством*

$$T^t\cos\lambda_n x = \cos\lambda_n t\,\cos\lambda_n x. \tag{23}$$

Определение 4. *Продолжение* $\hat{f}$ *непрерывной функции* $f \in C(0, 1)$ *на всю ось определяется значением ряда Фурье функции* f *по полной ортогональной относительно скалярного произведения* (21) *системе функций* $\{\cos\lambda_n x\}_{n\geq 0}$

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\lambda_n x, \tag{24}$$

где $f_n = \langle f(x), \cos\lambda_n x\rangle \frac{1}{N_n^2}$ — *коэффициенты Фурье функции* f.

Теорема 7. *Оператор обобщенного сдвига* T^t *действует на произвольную непрерывную функцию* $f \in C(0, 1)$ *по правилу*

$$T^t f(x) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(x + t) + \hat{f}(x - t)\right], \tag{25}$$

где $\hat{f}$ — *продолжение функции* f *на всю ось согласно определению* 4.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\lambda_n x$ — ряд Фурье функции $f \in$ $\in C(0, 1)$. Применяя к этому ряду оператор T^t, с учетом (23) имеем

$$T^t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\lambda_n t\,\cos\lambda_n x =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left[\cos\lambda_n(x + t) + \cos\lambda_n(x - t)\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(x + t) + \hat{f}(x - t)\right].$$

Теорема 8. *Пусть* $U(t) = \mathrm{col}\left(u(t, x), u(t, 1)\right) \in H$ — *решение задачи Коши*

$$\frac{d^2U}{dt^2} + BU = 0, \qquad U(0) = \mathrm{col}\left(f(x), f(1)\right), \qquad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{26}$$

Тогда $u(t, x) = T^t f(x)$, *где* T^t — *оператор обобщенного сдвига.*

Доказательство. Если $f(x) = \cos\lambda_n x$, где λ_n^2 — собственное значение самосопряженного оператора B, то $u(t, x) = \cos\lambda_n t\,\cos\lambda_n x$, т. е. выполняется равенство (23). Полученное методом собственных функций решение задачи (26) представимо в виде

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big[\hat{f}(x+t) + \hat{f}(x-t)\Big], \tag{27}$$

что приводит к представлению (24) для операторов T^t. С другой стороны, подставляя (27) в (26), для функции $\hat{f}$ получаем дифференциальное уравнение

$$\hat{f}'(1+t) + \hat{f}(1+t) = \hat{f}'(1-t) + \hat{f}(1-t).$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\hat{f}(x+1) = -f(1-x) + 2e^{-x} f(1) + 2\int_0^x e^{-(x-\tau)} f(1-\tau)\, d\tau, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Теорема доказана.

2.3. Свертка.

Определение 5. *Определим свертку двух функций* f, $g \in C(0,1)$ *равенством*

$$(f * g)(x) = \Big\langle f(y), T^{-y}\bar{g}(x)\Big\rangle. \tag{28}$$

Теорема 9. *Свертка* (28) *ассоциативна и коммутативна.*

Доказательство. Вычислим свертку характеров

$$\big(\cos\lambda_n(\cdot) * \cos\lambda_m(\cdot)\big)(x) = \int_0^1 \cos\lambda_n y \cos\lambda_m y \cos\lambda_m x\, dy +$$

$$+ \cos\lambda_n \cos\lambda_m \cos\lambda_m x = \delta_{n,m} \cos\lambda_n x \cdot N_n^2.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 5.

Использовав явный вид операторов сдвига T^t, приведем явный вид для свертки:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(y) g(x-y)\, dy + \frac{1}{2}\int_0^{1-x} [f(x+y) g(y) + f(y) g(x+y)]\, dy -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{-x/2}^{x/2} f\Big(1 - \frac{1}{2}x + s\Big) g\Big(1 - \frac{1}{2}x - s\Big)\, ds +$$

$$+ \exp(2-x) \int\!\!\int_{D_x} f(y) g(s) \exp(-x-s)\, dy\, ds + f(1) g(1) \exp(-x) +$$

$$+ f(1)\int_{1-x}^1 g(y) \exp(1-x-y)\, dy + g(1)\int_{1-x}^1 f(y) \exp(1-x-y)\, dy,$$

где

$$D_x = \big\{ (s,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, s \le 1,\, y \le 1,\, s + y \ge 2 - x \big\}.$$

2.4. Структурные константы. Система $\{\cos\lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$ является характерами для обобщенных сдвигов (23). Выразим обычное произведение двух характеров через их линейную комбинацию

$$\cos\lambda_n x \cos\lambda_m x = \sum_k c_{n,m,k} \cos\lambda_k x$$

с помощью структурных констант $c_{n,m,k}$. Поскольку это представление является рядом Фурье, то

$$c_{n,m,k} = \frac{1}{N_k^2}\langle \cos\lambda_n x \cos\lambda_m x, \cos\lambda_k x\rangle.$$

Используя формулу

$$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{4}(\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c)),$$

находим

$$(\cos\lambda_n x \cos\lambda_m x, \cos\lambda_k x)_H = \int_0^1 \cos\lambda_n x \cos\lambda_m x \cos\lambda_k x \, dx + \cos\lambda_n \cos\lambda_m \cos\lambda_k =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(\lambda_n+\lambda_m+\lambda_k)}{\lambda_n+\lambda_m+\lambda_k} + \frac{\sin(\lambda_n+\lambda_m-\lambda_k)}{\lambda_n+\lambda_m-\lambda_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\lambda_n-\lambda_m+\lambda_k)}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda_k} + \frac{\sin(-\lambda_n+\lambda_m+\lambda_k)}{-\lambda_n+\lambda_m+\lambda_k}\right] +$$

$$+ \cos\lambda_n \cos\lambda_m \cos\lambda_k .$$

Используя характеристическое уравнение (20), при $n, m, k \neq 0$ получаем

$$c_{n,m,k} = \frac{2(-1)^{n+m+k}\lambda_n^2\lambda_m^2\lambda_k^2\left[\left(1+\lambda_n^2\right)\left(1+\lambda_m^2\right)\left(1+\lambda_k^2\right)\right]^{-1/2}}{N_k^2\left[\lambda_n^4+\lambda_m^4+\lambda_k^4-2\left(\lambda_n^2\lambda_m^2+\lambda_n^2\lambda_k^2+\lambda_m^2\lambda_k^2\right)\right]}.$$

Кроме того, $c_{n,m,0} = \frac{1}{2}\delta_{n,m} N_n^2$, $c_{0,m,k} = c_{m,0,k} = \delta_{m,k}$.

3. Выводы. Выше были приведены два примера построения операторов обобщенного сдвига, основанных на собственных функциях самосопряженных дифференциальных операторов. Эта конструкция с абстрактной точки зрения состоит в сужении базиса, на котором определены операторы сдвига. Пусть Ω — топологическое пространство, а $C(\Omega)$ — пространство непрерывных функций на Ω и пусть на $C(\Omega)$ заданы операторы обобщенного сдвига T^t [2]. Пусть функции $\chi(x,\lambda)$, $x \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda$, образуют семейство характеров, т. е. $T^t\chi(x,\lambda) = \chi(t,\lambda)\chi(x,\lambda)$. Рассмотрим подпространство $\Omega_0 \subset \Omega$, и пусть на пространстве $C(\Omega_0)$ задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Кроме того, пусть существует семейство характеров $\{\chi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$, образующее полную ортогональную систему относительно этого скалярного произведения. Тогда каждую функцию $f(x) \in C(\Omega_0)$ можно представить рядом Фурье $f(x) = \sum_n f_n \chi(x,\lambda_n)$, $x \in \Omega_0$. Поскольку характеры определены также при $x \in \Omega$, ряд Фурье определен при всех $x \in \Omega$ и представляет естественное продолжение $\hat{f}$ функции f, заданной на Ω_0. Поэтому операторы обобщенного сдвига T^t, определенные на $C(\Omega)$, порождают операторы обобщенного сдвига T_0^t на $C(\Omega_0)$ по формуле

$$T_0^t f \;=\; (T^t \hat{f}) \restriction_{C(\Omega_0)},$$

т. е. сначала функцию f естественно продолжаем с Ω_0 на Ω, далее применяем оператор T^t, а полученную функцию $T^t \hat{f}$ рассматриваем как функцию на Ω_0. По-видимому, на этом пути можно получить и ряд других содержательных примеров операторов обобщенного сдвига.

1. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с.
2. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
3. *Ercolano J., Schechter M.* Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions, I, II // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**. – P. 83 – 105; 397 – 414.

Получено 03.02.2005