УДК 517.98

Ю. С. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
К. Ю. Ющенко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ГРУПОВІ C^*-АЛГЕБРИ НАПІВПРЯМОГО ДОБУТКУ КОМУТАТИВНОЇ ТА СКІНЧЕННОЇ ГРУП

By using representations of general position and their properties, we give the description of group C^*-algebras for semidirect products $\mathbb{Z}^d \rtimes G_f$, where G_f is a finite group, in terms of algebras of continuous matrix-functions defined on some compact set with boundary conditions. We present examples of the C^*-algebras of affine Coxeter groups.

За допомогою зображень загального положення та їх властивостей наведено опис групових C^*-алгебр для напівпрямих добутків $\mathbb{Z}^d \rtimes G_f$, де G_f — скінченна група, в термінах алгебр неперервних матриць-функцій, визначених на деякому компакті з крайовими умовами. Наведено приклади групових C^*-алгебр афінних груп Кокстера.

1. Вступ. 1. Класичні теореми лінійної алгебри про зведення комплексної ермітової матриці до діагонального вигляду з дійсними числами на діагоналі, узагальнення на необмежені самоспряжені оператори в комплексному гільбертовому просторі, теореми про розклад за узагальненими власними векторами (див., наприклад, [1]), увійшли до золотого фонду математики.

$*$-Зображення — інволютивні зображення асоціативних алгебр. Опис того чи іншого класу найпростіших (незвідних) $*$-зображень і відповідні спектральні теореми, які описують зображення як суми чи інтеграли найпростіших, також посідають важливе місце в арсеналі методів дослідження математичних і природничих задач. Ряд робіт, зокрема, українських математиків (див., наприклад, [2]) присвячено вивченню різноманітних задач теорії операторів за допомогою дослідження структури відповідної алгебри та її інволютивних зображень.

2. Одним з питань, що вдається розв'язати за допомогою теорії $*$-зображень, є вивчення будови групової C^*-алгебри.

У найпростішому випадку, коли група є скінченною, групова C^*-алгебра є скінченновимірною та ізоморфною прямій сумі матричних алгебр. Наступним за складністю випадком є вивчення групових C^*-алгебр для груп, розмірності всіх незвідних зображень яких не перевищують певне фіксоване число. Такими групами є, наприклад, афінні групи Кокстера, деякі кристалографічні групи та, більш загально, напівпрямі добутки вигляду $H \rtimes G_f$, де H — комутативний нормальний дільник, G_f — скінченна група.

Дану роботу присвячено опису будови групових C^*-алгебр для $H \rtimes G_f$ у термінах алгебр неперервних матриць-функцій, визначених на деякому компакті (п. 3), за допомогою зображень загального положення та їх властивостей (п. 2). Наведено приклад групової C^*-алгебри афінної групи Кокстера $\tilde{B}_2$ (п. 3).

3. Нагадаємо, як групи Кокстера задаються твірними та визначальними співвідношеннями.

Нехай маємо множину твірних $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ та відображення m: $S \times S \to \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ з властивостями

$$m(s_i, s_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$m(s_i, s_j) > 1, \qquad i \neq j.$$

Тоді групу $W = G\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{m(s_i, s_j)} = e\rangle$ називають групою Кокстера [3].

Кожній групі Кокстера ставиться у відповідність матриця Картана $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи якої мають вигляд

$$k_{ij} = -\cos\frac{\pi}{m(s_i, s_j)}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Відомо [4], що:

а) група Кокстера W є скінченною тоді і лише тоді, коли K є додатно визначеною;

б) якщо всі головні мінори матриці K є додатними та $\det K = 0$, то W є напівпрямим добутком вільної абелевої групи рангу $n-1$ та скінченної групи, $W = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes G_{\text{fin}}$ (такі групи називають *афінними групами Кокстера*);

в) в інших випадках W містить вільну групу з двома твірними.

4. Класифікацію незвідних зображень напівпрямих добутків вигляду $G = H \rtimes G_f$, де H — комутативний нормальний дільник, G_f — скінченна підгрупа групи G, можна одержати за допомогою індукування зображень (див. [5, 6]).

Нагадаємо означення індукованого зображення. Позначимо дуальний за Понтрягіним простір групи H через $\hat{H}$. Дія групи G_f на H визначає дію G_f на $\hat{H}$ за правилом $\chi^g(h) = \chi(h^g)$, де $h^g = ghg^{-1}$. Зафіксуємо довільний характер $\chi \in \hat{H}$. Нехай $G_\chi = \mathrm{St}_{G_f}(\chi)$ позначає стабілізатор χ під дією групи G_f, а $\pi : G_\chi \to GL(V)$ — його незвідне зображення у просторі V. Побудуємо зображення π^χ групи $H \rtimes G_\chi$ у просторі V:

$$\pi^\chi(h, g) = \chi(h)\pi(g), \qquad h \in H, \quad g \in G_\chi. \tag{1}$$

Позначимо через O_χ орбіту дії G_f на характер χ, $O_\chi = \{\chi^{g_1}, \chi^{g_2}, \ldots, \chi^{g_k}\}$, $g_1 = e$, $k = \left|G_\chi \backslash G_f\right|$. Розглянемо зображення T групи $H \rtimes G_f$ у просторі функцій на орбіті O_χ із значеннями у просторі V, задане таким чином:

$$(T_{(h,g)}f)(\chi^{g_i}) = \chi^{g_i}(h)\pi(g_i g g_l^{-1}) f(\chi^{g_i g}), \tag{2}$$

де $(\chi^{g_i})^g = \chi^{g_l}$, $g_i, g_l, g_i \in G_f$, $h \in H$.

Зображення T групи G, побудоване за формулою (2), називають зображенням, індукованим із зображення π^χ підгрупи $H \rtimes G_\chi$, та позначають $T = \mathrm{Ind}\,\pi^\chi$ (див., наприклад, [5]).

Відомо, що довільне незвідне зображення $\tilde{\pi}$ групи G має вигляд $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}\,\pi^\chi$ для деякого характеру $\chi \in \hat{H}$ та незвідного зображення π групи G_χ (теорема Дж. Маккі [6]).

Нехай χ_1 та χ_2 — деякі фіксовані характери H зі стабілізаторами $G_{\chi_1} = \mathrm{St}_{G_f}(\chi_1)$ та $G_{\chi_2} = \mathrm{St}_{G_f}(\chi_2)$, π_1 і π_2 — деякі фіксовані незвідні зображення груп G_{χ_1} та G_{χ_2} відповідно, а $\pi_1^{\chi_1}$ та $\pi_2^{\chi_2}$ — зображення, побудовані за допомогою формули (1). Зображення $\mathrm{Ind}(\pi_1^{\chi_1})$ та $\mathrm{Ind}(\pi_2^{\chi_2})$ є унітарно еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує елемент $g_p \in G_f$ такий, що

$\chi_2 = \chi_1^{g_p}$, і $\pi_1^{g_p} \sim \pi_2$, де $\pi_1^{g_p}(g) = \pi_1(g_p g g_p^{-1})$ $\forall g \in G_{\chi_2}$.

У подальшому будемо також використовувати двоїстість Фробеніуса для індукованих зображень (див., наприклад, [5]): нехай T — зображення групи $G = H \rtimes G_\chi$, π^χ — зображення підгрупи $H \rtimes G_\chi$, побудоване за формулою (1). Тоді

$$c(T, \mathrm{Ind}(\pi^\chi)) = c(T|_{H \rtimes G_\chi}, \pi^\chi).$$

(Через $c(A, B)$ позначено число сплетіння операторів A та B, а через $T|_H$ — обмеження зображення T на підгрупу H.)

5. Наведемо також деякі відомості з теорії C^*-алгебр (див., наприклад, [7]), що використовуються в п. 3.

Нехай $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра. Пара $(\tilde{\mathcal{A}}, \varphi\colon \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}})$, де φ — $*$-гомоморфізм, $\tilde{\mathcal{A}}$ — C^*-алгебра, називається *обгортуючою C^*-алгеброю* $*$-алгебри $\mathcal{A}$, якщо для довільного зображення $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебри $\mathcal{A}$ існує єдине зображення $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ C^*-алгебри $\tilde{\mathcal{A}}$ таке, що діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \tilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "\tilde{\pi}"'] & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Для C^*-алгебри $\mathcal{A} \subseteq C(X \to M_n(\mathbb{C}))$, де X — компактний простір, визначимо C^*-алгебру $\mathcal{A}(x_1, x_2)$ за правилом

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = \{(f(x_1), f(x_2)) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \mid f \in \mathcal{A}\}.$$

Наступний результат є безпосереднім наслідком теореми Фелла, що узагальнює теорему Стоуна – Вейєрштрасса на некомутативний випадок (див. [8]): нехай $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — дві C^*-алгебри такі, що $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq C(X \to M_n(\mathbb{C}))$, де X — деякий компактний простір. Тоді якщо $\mathcal{A}(x_1, x_2) = \mathcal{B}(x_1, x_2)$ для всіх пар $(x_1, x_2) \in X \times X$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

2. Зображення загального положення. Введемо і дослідимо зображення напівпрямих добутків $\mathbb{Z}^d \rtimes G_f$ (зображення загального положення), які використовуються в п. 3 для опису групових C^*-алгебр.

Нехай $G = \mathbb{Z}^d \rtimes G_f$, де $\mathbb{Z}^d$ — вільна абелева група скінченного рангу d, а G_f — скінченна група, що діє точно на $\mathbb{Z}^d$. Зафіксуємо твірні гратки $\mathbb{Z}^d$: $y_1, y_2, \ldots, y_d$.

Позначимо через $\hat{\mathbb{Z}}^d$ групу характерів $\mathbb{Z}^d$. Кожен характер χ задається вектором $(z_1, z_2, \ldots, z_d) = \bar{z}$, де $z_i = \chi(y_i) = e^{i\varphi_i}$, $i = 1, \ldots, d$. Дія групи G_f на $\mathbb{Z}^d$ індукує дію G_f на групі $\hat{\mathbb{Z}}^d = \mathbb{T}^d$:

$$\overline{\varphi}^g = (\varphi_1^g, \varphi_2^g, \ldots, \varphi_d^g), \qquad \varphi_i^g = \sum_{j=1}^{d} m_{ij}^g \varphi_j,$$

де m_{ij}^g визначають дію G_f на твірних $\mathbb{Z}^d$, тобто $y_i^g = \sum_{j=1}^{d} m_{ij}^g y_j$ $\forall g \in G_f$.

Припустимо, що $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d$ — незалежні за модулем 2π змінні. Розглянемо орбіту дії групи G_f на вектор $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d) = \overline{\varphi}$. Позначимо через $O(\overline{\varphi}) = (\overline{\varphi}^{g_1}, \overline{\varphi}^{g_2}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_n})$ впорядковану орбіту $\overline{\varphi}$, $g_1 = e$. Очевидно, що при незалежних значеннях $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d$ стабілізатор вектора $\overline{\varphi}$ є тривіальним та довжина орбіти $O(\overline{\varphi})$ збігається з $|G_f|$.

Зафіксуємо $\overline{\varphi}_0 \in \mathbb{T}^d$ і позначимо характер, що відповідає вектору $\overline{\varphi}_0$, через $\chi_{\overline{\varphi}_0}$. Побудуємо зображення групи G, пов'язане з $\chi_{\overline{\varphi}_0}$, що діє у просторі комплекснозначних функцій, визначених на $O(\overline{\varphi})$:

$$(T_{\overline{\varphi}_0}(h, g) f)(\overline{\varphi}^{g_k}) = \chi_{\overline{\varphi}_0}^{g_k}(h) f(\overline{\varphi}^{g_i g}), \qquad (h, g) \in G. \tag{3}$$

Далі, зображення $T_{\overline{\varphi}_0}$ будемо називати зображенням *загального положення.* Зауважимо, що якщо $\mathrm{St}_{G_f}(\overline{\varphi}_0) = G_{\chi_{\overline{\varphi}_0}} = \langle e \rangle$, то зображення $T_{\overline{\varphi}_0}$ є незвідним розмірності $|G_f|$, оскільки збігається з індукованим, в іншому випадку $T_{\overline{\varphi}_0}$ є звідним. Наведемо розклад зображення загального положення на незвідні зображення у випадку, коли стабілізатор є нетривіальним.

Теорема 1. *Нехай* $\chi = \chi_{\overline{\varphi}_0}$ *і* $\{\pi_i, i = 1, \ldots, s\}$ — *повна система незвідних зображень групи* G_χ *з розмірностями* $\dim \pi_i = n_i$, *а* π_i^χ, $i = 1, \ldots, s$, — *незвідні зображення групи* $\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi$, *визначені за формулами*

$$\pi_i^\chi(h, g) = \chi(h) \pi_i(g), \qquad h \in \mathbb{Z}^d, \quad g \in G_\chi, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Тоді зображення загального положення $T_{\overline{\varphi}_0}$ *групи* $G = \mathbb{Z}^d \rtimes G_f$, *асоційоване з* χ, *еквівалентне наступному*:

$$T_{\overline{\varphi}_0} \sim n_1 \operatorname{Ind}(\pi_1^\chi) \oplus n_2 \operatorname{Ind}(\pi_2^\chi) \oplus \ldots \oplus n_s \operatorname{Ind}(\pi_s^\chi). \tag{4}$$

Доведення. Оскільки $\dim \pi_i^\chi = \dim \pi_i = n_i$ та $\dim \operatorname{Ind}(\pi_i^\chi) = n_i |G_f : G_\chi|$, то розмірність правої частини (4) дорівнює

$$\sum_{i=1}^{s} n_i^2 |G_f : G_\chi| = |G_f| = \dim T_{\overline{\varphi}_0}.$$

Далі покажемо, що $c(T_{\overline{\varphi}_0}, \operatorname{Ind}(\pi_i^\chi)) = n_i$. Скористаємося двоїстістю Фробеніуса:

$$c(T_{\overline{\varphi}_0}, \operatorname{Ind}(\pi_i^\chi)) = c(T_{\overline{\varphi}_0}|_{\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi}, \pi_i^\chi).$$

Для доведення теореми досить показати, що зображення π_i^χ входить до обмеження зображення $T_{\overline{\varphi}_0}$ на підгрупу $\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi$ з кратністю, рівною n_i.

Нехай $G_\chi = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, $G / G_\chi = \{g_1 G_\chi, g_2 G_\chi, \ldots, g_k G_\chi\}$, $g_1 = e$. Впорядкуємо орбіту $O(\overline{\varphi})$ таким чином:

$$\tilde{O}(\overline{\varphi}) = (\overline{\varphi}^{g_1 t_1}, \overline{\varphi}^{g_1 t_2}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_1 t_p}, \overline{\varphi}^{g_2 t_1}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_2 t_p}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_k t_1}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_k t_p}).$$

Нехай $M_j = (\overline{\varphi}^{g_j t_1}, \overline{\varphi}^{g_j t_2}, \ldots, \overline{\varphi}^{g_j t_p})$, $j = 1, \ldots, k$. Розглянемо стандартний базис у просторі функцій, визначених на $\tilde{O}(\overline{\varphi})$. Позначимо через F_j підпростір функцій, що дорівнюють нулю поза M_j.

Обмеження зображення $T_{\overline{\varphi}_0}$ на підгрупу G_χ має вигляд

$$T_{\overline{\varphi}_0}(e, t_v) f(\overline{\varphi}^{g_j t_i}) = f(\overline{\varphi}^{g_j t_i t_v}), \qquad t_v \in G_\chi, \quad j = 1, \ldots, k, \quad i = 1, \ldots, p. \qquad (5)$$

З (5) випливає інваріантність підпростору F_j відносно дії зображення $T_{\overline{\varphi}_0}\big|_{G_\chi}$. Очевидно, що обмеження зображення $T_{\overline{\varphi}_0}\big|_{G_\chi}$ на простір F_j є правим регулярним зображенням групи G_χ.

Розглянемо обмеження зображення $T_{\overline{\varphi}_0}$ на підгрупу $\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi$:

$$T_{\overline{\varphi}_0}(h, t_v) f(\overline{\varphi}^{g_j t_i}) = \chi^{g_j t_i}(h) f(\overline{\varphi}^{g_j t_i t_v}), \qquad (h, t_v) \in \mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi.$$

Звідси дія $T_{\overline{\varphi}_0}\big|_{\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi}$ на підпросторі F_1 має вигляд

$$T_{\overline{\varphi}_0}(h, t_v) f(\overline{\varphi}^{t_i}) = \chi(h) \pi^R_{\mathrm{reg}}(G_\chi), \qquad t_v \in G_\chi,$$

де через $\pi^R_{\mathrm{reg}}(G_\chi)$ позначено праве регулярне зображення групи G_χ. Отже, π_i^χ входить до зображення $T_{\overline{\varphi}_0}\big|_{\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi}$ з кратністю, рівною $\dim \pi_i = n_i$, що й потрібно було довести.

***Зауваження* 1.** З теореми Дж. Маккі та теореми 1 випливає, що довільне незвідне зображення групи G або збігається з деяким зображенням загального положення, або є прямим доданком у розкладі деякого зображення загального положення на незвідні компоненти.

3. Опис обгортуючої C^*-алгебри. Позначимо через $\mathcal{F}(G_f)$ фундаментальну область скінченної групи G_f у просторі $\hat{\mathbb{Z}}^d$, тобто таку множину, для якої виконуються наступні умови (див., наприклад, [9]):

1) $\mathcal{F}(G_f) \subseteq \hat{\mathbb{Z}}^d$ — відкрита множина;
2) $\mathcal{F}(G_f) \cap g\mathcal{F}(G_f) = \varnothing$, якщо $e \neq g \in G_f$;
3) $\hat{\mathbb{Z}}^d = \bigcup \{ \overline{g\mathcal{F}(G_f)} \mid g \in G_f \}$.

***Зауваження* 2.** Оскільки $\mathrm{Ind}\, \pi^\chi \sim \mathrm{Ind}\, \pi^{\chi^g}$ для довільних зображення π^χ групи $\mathbb{Z}^d \rtimes G_\chi$ та $g \in G_f$ (див. п. 1.4), то довільне незвідне зображення $\tilde{\pi}$ групи $G = \mathbb{Z}^d \rtimes G_f$ має вигляд $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}\, \pi^\chi$ для деяких $\chi \in \overline{\mathcal{F}(G_f)}$ та незвідного зображення π групи G_χ.

Дослідимо будову групової C^*-алгебри для груп вигляду $G = \mathbb{Z}^d \rtimes G_f$, де дія G_f на $\mathbb{Z}^d$ є точною.

Очевидно, зображення загального положення визначають неперервні функції на $\overline{\mathcal{F}(G_f)}$ зі значеннями в $M_{|G_f|}(\mathbb{C})$:

$$f^{h,g}(\overline{\varphi}) := T_{\overline{\varphi}}(h, g), \qquad \varphi \in \overline{\mathcal{F}(G_f)}.$$

Наступне твердження безпосередньо випливає з означення обгортуючої C^*-алгебри та зауваження 1.

Твердження 1. *Нехай*

$$\mathcal{B} = C^*(f^{h,g}(\overline{\varphi}), (h,g) \in G) \subset C(\overline{\mathcal{F}(G_f)} \to M_{|G_f|}(\mathbb{C})).$$

Тоді групова C^*-алгебра $C^*(G)$ ізоморфна алгебрі $\mathcal{B}$.

З твердження 1 випливає можливість опису групових C^*-алгебр груп

$\mathbb{Z}^d \rtimes G_f$ як алгебр матриць-функцій, що задовольняють певні крайові умови.

Розглянемо опис групової C^*-алгебри афінної групи Кокстера $\tilde{B}_2$:

$$\tilde{B}_2 = \langle s_1, s_2, s_3 \,|\, (s_1 s_2)^4 = (s_2 s_3)^4 = (s_1 s_3)^2 = s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e \rangle =$$
$$= \mathbb{Z}^2 \rtimes \langle s_1, s_2 \,|\, (s_1 s_2)^4 = s_1^2 = s_2^2 = e \rangle = \mathbb{Z}^2 \rtimes B_2.$$

Зафіксуємо твірні гратки $\mathbb{Z}^2$: $y_1 = s_1 s_2 s_3 s_2$, $y_2 = s_3 s_2 s_1 s_2$, (див. [10]). Тоді твірні групи $\tilde{B}_2$, як елементи напівпрямого добутку $\mathbb{Z}^2 \rtimes B_2$, мають вигляд

$$s_1 := (e, s_1), \qquad s_2 := (e, s_2), \qquad s_3 = (y_2, s_2 s_1 s_2).$$

Дія групи B_2 на $\mathbb{Z}^2$,

$$s_1 (y_1^{n_1} y_2^{n_2}) s_1^{-1} = y_1^{-n_1} y_2^{n_2} \quad \text{та} \quad s_2 (y_1^{n_1} y_2^{n_2}) s_2^{-1} = y_1^{-n_2} y_2^{-n_1}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

визначає дію групи B_2 на групі характерів $\hat{\mathbb{Z}}^2$. А саме, нехай $\chi(y_i) = e^{i\varphi_i}$, тоді група B_2 діє на векторах (φ_1, φ_2) таким чином:

$$(\varphi_1, \varphi_2)^{s_1} = (-\varphi_1, \varphi_2), \qquad (\varphi_1, \varphi_2)^{s_2} = (-\varphi_2, -\varphi_1).$$

Орбіта дії групи B_2 на фіксований характер у випадку тривіального стабілізатора має вигляд

$$O_{(\varphi_1, \varphi_2)} =$$
$$= \big((\varphi_1,\varphi_2), (-\varphi_1,\varphi_2), (-\varphi_2,-\varphi_1), (\varphi_2,-\varphi_1), (-\varphi_2,\varphi_1), (\varphi_2,\varphi_1), (\varphi_1,-\varphi_2), (-\varphi_1,-\varphi_2)\big).$$

Для опису граничних умов, що задовольняють функції з $C^*(\tilde{B}_2)$, дослідимо розклад зображень загального положення $\tilde{B}_2$, що відповідає точкам області $\overline{\mathcal{F}(B_2)}$.

Очевидно, $\mathcal{F}(B_2) = \{(\varphi_1, \varphi_2) \,|\, 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi\}$. Розглянемо сім варіантів розташування точки $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ на $\overline{\mathcal{F}(B_2)}$ і наведемо опис стабілізаторів та розмірностей представників класів еквівалентності їх незвідних зображень у кожному з можливих випадків. При цьому G_i, $i = 1, \ldots, 7$, позначають стабілізатори відповідних точок $\overline{\mathcal{F}(B_2)}$, а $\{\pi_{ij}\}$ позначає повну систему незвідних зображень G_j:

1) якщо $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, то $\langle e \rangle = G_1$, $\dim \pi_{11} = 1$;

2) якщо $0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, то $\langle s_1 \rangle = G_2$, $\dim \pi_{12} = \dim \pi_{22} = 1$;

3) якщо $0 < \varphi_1 < \varphi_2 = \pi$, то $\langle s_2 s_1 s_2 \rangle = G_3$, $\dim \pi_{13} = \dim \pi_{23} = 1$;

4) якщо $0 < \varphi_1 = \varphi_2 < \pi$, то $\langle s_1 s_2 s_1 \rangle = G_4$, $\dim \pi_{14} = \dim \pi_{24} = 1$;

5) якщо $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, то $\langle s_1, s_2 s_1 s_2 \rangle = G_5$, $\dim \pi_{15} = \dim \pi_{25} = \dim \pi_{35} = \dim \pi_{45} = 1$;

6) якщо $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, то $B_2 = G_6$, $\dim \pi_{16} = \dim \pi_{26} = \dim \pi_{36} = \dim \pi_{46} = 1$, $\dim \pi_{56} = 2$;

7) якщо $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$, то $B_2 = G_7$, $\dim \pi_{17} = \dim \pi_{27} = \dim \pi_{37} = \dim \pi_{47} = 1$, $\dim \pi_{57} = 2$.

Розглянемо стандартний базис у просторі функцій, визначених на впорядкованій орбіті $O_{(\varphi_1, \varphi_2)}$. Зображення загального положення групи $\tilde{B}_2$, асоційованого з $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \overline{\mathcal{F}(B_2)}$, в цьому базисі має вигляд

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\varphi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $S_1 = T_{\overline{\varphi}}(e,s_1)$, $S_2 = T_{\overline{\varphi}}(e,s_2)$, $S_3 = T_{\overline{\varphi}}(y_2, s_2 s_1 s_2)$ — образи твірних групи $\tilde{B}_2$.

Тоді в залежності від положення точки з $\mathcal{F}(B_2)$ маємо наступний розклад зображень загального положення на незвідні (див. попередній список):

1) $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{11}^{\chi})$;

2) $0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{12}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{22}^{\chi})$;

3) $0 < \varphi_1 < \varphi_2 = \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{13}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{23}^{\chi})$;

4) $0 < \varphi_1 = \varphi_2 < \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{14}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{24}^{\chi})$;

5) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{15}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{25}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{35}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{45}^{\chi})$;

6) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{16}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{26}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{36}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{46}^{\chi}) \oplus 2\operatorname{Ind}(\pi_{56}^{\chi})$;

7) $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$, $T_{\overline{\varphi}} = \operatorname{Ind}(\pi_{17}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{27}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{37}^{\chi}) \oplus \operatorname{Ind}(\pi_{47}^{\chi}) \oplus 2\operatorname{Ind}(\pi_{57}^{\chi})$.

***Зауваження* 3.** З критерію еквівалентності індукованих зображень (див. п. 1.4) маємо $\operatorname{Ind}(\pi_{ij}^{\chi}) \nsim \operatorname{Ind}(\pi_{kv}^{\tilde{\chi}})$ $\forall i, j, k, v$, $(i,j) \neq (k,v)$. Якщо $\operatorname{St}_{G_f}(\chi) = \operatorname{St}_{G_f}(\tilde{\chi}) = G_j$ та $\chi \neq \tilde{\chi}$, то $\operatorname{Ind}(\pi_{ij}^{\chi}) \nsim \operatorname{Ind}(\pi_{kv}^{\tilde{\chi}})$ $\forall i$.

Тепер перейдемо до опису групової алгебри $C^*(\tilde{B}_2)$.

Нижче через $V_{(\varphi_1,\varphi_2)}\colon \partial\mathcal{F}(B_2) \to M_8(\mathbb{C})$ позначено унітарну матрицю-функцію таку, що

$$V(\overline{\varphi}) T_{\overline{\varphi}}(h,g) V^*(\overline{\varphi}) = \bigoplus_{i=1}^{s} n_{ij} \operatorname{Ind} \pi_{ij}^{\chi}(h,g).$$

Теорема 2. *Групова C^*-алгебра групи $\tilde{B}_2$ ізоморфна алгебрі*

$$\mathcal{B} = \Big\{ f \in C(\overline{\mathcal{F}(B_2)} \to M_8(\mathbb{C})):$$

$$V_{(0,\varphi_2)} f(0,\varphi_2) V^*_{(0,\varphi_2)} \in C((0,\pi) \to M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})) \quad \forall \varphi_2 \in (0,\pi);$$

$$V_{(\varphi_1,\pi)} f(\varphi_1,\pi) V^*_{(\varphi_1,\pi)} \in C((0,\pi) \to M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})) \quad \forall \varphi_1 \in (0,\pi);$$

$$V_{(\varphi_1,\varphi_1)} f(\varphi_1,\varphi_1) V^*_{(\varphi_1,\varphi_1)} \in C((0,\pi)\times(0,\pi) \to M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})) \quad \forall \varphi_1 \in (0,\pi);$$

$$V_{(0,\pi)} f(0,\pi) V^*_{(0,\pi)} \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}),$$

$$V_{(0,0)} f(0,0) V^*_{(0,0)} \in M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})) \oplus M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbf{1}_{2\times 2},$$

$$V_{(\pi,\pi)} f(\pi,\pi) V^*_{(\pi,\pi)} \in M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})) \oplus M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbf{1}_{2\times 2} \Big\}.$$

Доведення. Нехай $f^{h,g}(\overline{\varphi}) = T_{\overline{\varphi}}(h,g)$ та $\mathcal{A} = C^*(f^{h,g}(\overline{\varphi}), (h,g) \in G)$. Тоді за твердженням 1 маємо $C^*(G) \simeq \mathcal{A}$. Для встановлення ізоморфізму $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$ скористаємося наслідком з теореми Фелла (див. п. 1.5). Оскільки розклад $T_{\overline{\varphi}}$ на незвідні зображення має вигляд, вказаний у пунктах 1 – 7, то $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Покажемо, що $\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \mathcal{B}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)$ для всіх пар $(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) \in \overline{\mathcal{F}(B_2)} \times \overline{\mathcal{F}(B_2)}$. Оскільки алгебри $\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)$ та $\mathcal{B}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)$ скінченновимірні, то для доведення їх рівності досить довести рівність їх комутантів:

$$\mathcal{A}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \mathcal{B}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) \qquad \forall (\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) \in \overline{\mathcal{F}(B_2)} \times \overline{\mathcal{F}(B_2)}.$$

Очевидно, що при фіксованих $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2 \in \overline{\mathcal{F}(B_2)}$ маємо

$$\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} T_{\overline{\varphi}_1}(h,g) & 0 \\ 0 & T_{\overline{\varphi}_2}(h,g) \end{pmatrix}, \ (h,g) \in \tilde{B}_2 \right\}.$$

Нехай $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \in \mathcal{F}(B_2)$, тоді зображення загального положення є незвідним і $T_{\overline{\varphi}_1} \not\sim T_{\overline{\varphi}_2}$, якщо $\overline{\varphi}_1 \neq \overline{\varphi}_2$. Отже,

$$\mathcal{A}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix}, \ \lambda,\beta \in \mathbb{C} \right\} = \mathcal{B}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2), \quad \text{якщо} \quad \overline{\varphi}_1 \neq \overline{\varphi}_2,$$

та

$$\mathcal{A}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I & \mu I \\ \nu I & \beta I \end{pmatrix}, \ \lambda,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{C} \right\} = \mathcal{B}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2), \quad \text{якщо} \quad \overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_2.$$

Звідси $\mathcal{A}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \mathcal{B}'(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)$ $\forall (\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) \in \mathcal{F}(B_2) \times \mathcal{F}(B_2)$.

Оскільки при $\overline{\varphi}_1 \neq \overline{\varphi}_2$ зображення $T_{\overline{\varphi}_1}$ та $T_{\overline{\varphi}_2}$ є диз'юнктними (див. зауваження 3), то аналогічно встановлюється рівність комутантів у всій області $\overline{\mathcal{F}(B_2)} \times \overline{\mathcal{F}(B_2)}$. Отже, $\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2) = \mathcal{B}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)$ та $C^*(G) \simeq \mathcal{B}$.

Теорему доведено.

Для довільного напівпрямого добутку $\mathbb{Z}^d \rtimes G_f = G$ опис групової C^*-алгебри повністю аналогічний наведеному вище для $G = \tilde{B}_2$.

Нехай $\mathcal{F}(G_f)$ — фундаментальна область дії групи G_f на $\mathbb{T}^d$. Зафіксуємо вектор $\overline{\varphi} \in \overline{\mathcal{F}(G_f)}$. Нехай π_i, $i = 1, \ldots, s$, — повна система незвідних зображень стабілізатора $G_{\chi_{\overline{\varphi}}} = \mathrm{St}_{G_f} \chi_{\overline{\varphi}}$ та $\pi_i^{\chi_{\overline{\varphi}}}$, $i = 1, \ldots, s$, — зображення, побудовані з π_i за формулою (1). Покладемо $n_i(\overline{\varphi}) = \dim \pi_i^{\chi_{\overline{\varphi}}}$. Позначимо через $V(\overline{\varphi}) : \partial\mathcal{F}(G_f) \to M_{|G_f|}$ унітарну матрицю-функцію, що розкладає зображення загального положення $T_{\overline{\varphi}}$ на незвідні компоненти, тобто для довільних $(h, g) \in G$

$$V(\overline{\varphi}) T_{\overline{\varphi}}(h, g) V^*(\overline{\varphi}) = \bigoplus_{i=1}^{s} n_i(\overline{\varphi}) \operatorname{Ind} \pi_i^{\chi_{\overline{\varphi}}}(h, g).$$

Теорема 3. *Групова C^*-алгебра групи $G = \mathbb{Z}^d \rtimes G_f$ ізоморфна C^*-алгебрі*

$$C^*(G) = \Big\{ f \in C\big(\overline{\mathcal{F}(G_f)} \to M_{|G_f|}(\mathbb{C})\big) : V(\overline{\varphi}) f(\overline{\varphi}) V^*(\overline{\varphi}) \in$$

$$\in M_{|\operatorname{Ind}(\pi_1^{\chi_{\overline{\varphi}}})|}(\mathbb{C}) \otimes \mathbf{1}_{n_1(\overline{\varphi}) \times n_1(\overline{\varphi})} \oplus M_{|\operatorname{Ind}(\pi_2^{\chi_{\overline{\varphi}}})|}(\mathbb{C}) \otimes \mathbf{1}_{n_2(\overline{\varphi}) \times n_2(\overline{\varphi})} \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus M_{|\operatorname{Ind}(\pi_s^{\chi_{\overline{\varphi}}})|}(\mathbb{C}) \otimes \mathbf{1}_{n_s(\overline{\varphi}) \times n_s(\overline{\varphi})}$$

$$\forall\, \overline{\varphi} \in \partial\mathcal{F}(G) \Big\}.$$

***Зауваження* 4.** У кожному конкретному випадку функції $V(\overline{\varphi})$ можна записати в явному вигляді.

Автори щиро вдячні Д. П. Проскуріну за корисні поради та зауваження.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators. – London: Gordon and Breach Publ. Group, 1999. – 225 p.
3. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups. – Cambridge: Cambridge Press, 1990. – 486 p.
4. *Bourbaki N.* Groupes et algebres de Lie IV – VI. – Paris: Hemmann, 1968. – 335 p.
5. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1972. – 336 с.
6. *Mackey G. W.* Induced representations of locally compact groups // Ann. Math. – 1952. – **55**, № 1. – P. 101 – 139.
7. *Dixmier J.* Les C^*-algebras et leur representations. – Paris: Gauthier, 1969. – 400 p.
8. *Fell J. M. G.* The structure of algebras of operator fields // Acta Math. – 1961. – **106**, № 3-4.
9. *Grove L. C., Benson C. T.* Finite reflection groups // Grad. Texts in Math. – 1977. – **57**. – P. 173 – 185.
10. *Jushenko E.* On decomposition of affine Coxeter groups in semi-direct products // J. Algebra and Discrete Math. – 2004. – № 3. – P. 59 – 69.
11. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория представлений гомологии. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Одержано 17.01.2005