УДК 521.21

Г. М. Торбін (Ін-т математики НАН України, Київ; Нац. пед. ун-т, Київ)

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИНГУЛЯРНО НЕПЕРЕРВНИХ ІМОВІРНІСНИХ МІР*

We analyze correlations between different approaches to the definition of Hausdorff dimension of singular probability measures on the basis of the fractal analysis of essential supports of these measures. We introduce characteristic multifractal measures of the first and higher orders. By using these measures, we perform the multifractal analysis of singular probability measures and prove theorems on the structural representation of such measures.

Проаналізовано взаємозв'язки різних підходів до означення хаусдорфової розмірності сингулярних імовірнісних мір на основі фрактального аналізу суттєвих носіїв цих мір. Введено в розгляд характеристичні мультифрактальні міри першого та вищих порядків, на основі яких здійснено мультифрактальний аналіз сингулярних імовірнісних мір та доведено теореми про структурне зображення таких мір.

1. Вступ. Протягом довгого періоду математики виявляли досить слабкий інтерес до сингулярно неперервних мір та розподілів імовірностей, що пояснюється, з одного боку, відсутністю адекватних аналітичних інструментів для задання та дослідження таких мір, а з іншого — поширеною думкою про відсутність застосувань таких мір. Завдяки „фрактальному вибуху" та існуванню глибокого зв'язку між теорією фракталів та сингулярних мір протягом останніх років ситуація суттєво змінилася. Було доведено, що сингулярні розподіли ймовірностей є домінуючими для багатьох класів випадкових величин [1]. T. Zamfirescu, користуючись методом категорій, показав, що майже всі (в топологічному сенсі) монотонні функції є сингулярними. Можливі застосування в спектральній теорії самоспряжених операторів є додатковим стимулом інтенсифікації досліджень властивостей сингулярно неперервних мір. Було показано [2], що оператори з сингулярно неперервним спектром є домінуючими для широкого класу збурень оператора Лапласа. Більш того, використовуючи фрактальний аналіз відповідних спектральних сингулярних мір, можна аналізувати динамічні властивості відповідних квантових систем [3]. Застосування методів фрактального аналізу сингулярно неперервних мір дозволило розв'язати деякі проблеми теорії чисел [4], теорії динамічних систем та загальної теорії неперервних перетворень, що зберігають фрактальну розмірність [5]. Зокрема, було показано, що множина M_s суттєво ненормальних чисел відрізка [0, 1] (тобто чисел, для яких їх s-адичний розклад не має асимптотичної частоти всіх цифр) є суперфрактальною множиною (тобто має розмірність Хаусдорфа – Безиковича, що дорівнює 1), оскільки містить у собі топологічні носії деяких суперфрактальних сингулярно неперервних мір.

Клас сингулярно неперервних мір є досить різноманітним, і фрактальний аналіз дозволяє здійснити певну класифікацію таких мір.

Першим етапом аналізу сингулярно неперервної ймовірнісної міри μ є дослідження тополого-метричних та фрактальних властивостей її топологічного носія S_μ (тобто мінімальної замкненої множини, на якій зосереджена міра μ). Наступна класифікація сингулярних мір [6, 7] грунтується на аналізі топологічних і метричних властивостей множини S_μ: довільну сингулярну ймовірнісну міру μ на $[0, 1]$ можна єдиним чином подати у вигляді $\mu = \alpha_c\mu_c + \alpha_s\mu_s + \alpha_p\mu_p$, де $\alpha_c \geq 0$, $\alpha_s \geq 0$, $\alpha_p \geq 0$, $\alpha_c + \alpha_s + \alpha_p = 1$; μ_c — сингулярна ймовірнісна міра з топологічним носієм нульової міри Лебега; μ_s — сингулярна ймовірнісна міра, для якої топологічний носій є відрізком або об'єднанням відрізків не більш ніж зчисленної множини точок; μ_p — сингулярна ймовірнісна міра

* Частково підтримано INTAS 00-257, DFG 436 UKR 113/78, DFG 436 113/80 та Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 01.07/00081).

така, що для будь-яких $x \in S_\mu$ і $\varepsilon > 0$ множина $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap S_{\mu_p}$ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега; топологічні носії S_{μ_c}, S_{μ_s} і S_{μ_p} мають не більш ніж зчисленний попарний перетин.

Прикладом міри C-типу може бути класична міра Кантора, тобто міра, яка відповідає розподілу випадкової величини η з незалежними трійковими знаками:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{3^k}, \tag{1}$$

де η_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 та 2 з імовірностями p_0 та p_2 відповідно, $0 < p_0 \le p_2 < 1$, $p_0 + p_2 = 1$.

Прикладом сингулярної міри S-типу може бути міра, що відповідає розподілу випадкової величини ψ з незалежними двійковими знаками:

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{2^k}, \tag{2}$$

де ψ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_0 та p_1, $0 < p_0 < p_1 < 1$, $p_0 + p_1 = 1$.

Прикладом сингулярної міри P-типу може бути міра, що відповідає розподілу випадкової величини ξ:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{10^k} \right), \tag{3}$$

де ξ_k незалежно набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_0 і p_1, $p_0 \ne p_1$.

Досить широкий запас сингулярних мір різних тополого-метричних типів містить так званий клас $P^* - Q^*$-мір [8]. У роботі [9] вивчено фрактальні властивості мір із даного класу.

Властивості топологічного носія S_μ сингулярно неперервної міри μ будемо називати зовнішньо фрактальними, оскільки ці властивості є адекватними характеристиками лише для „рівномірних” сингулярних розподілів канторівського типу. Справді, для міри (2) топологічний носій збігається з $[0, 1]$ незалежно від вибору $p_0 \in (0, 1)$, хоча при виборі двох різних значень p_0' і p_0'' відповідні ймовірнісні міри будуть взаємно ортогональними. Тому для вивчення глибших властивостей сингулярних мір необхідно здійснювати фрактальний аналіз всеможливих носіїв (не обов’язково замкнених) таких мір. Наприклад, для міри (2) існує незамкнений скрізь щільний на $[0, 1]$ носій T [9], розмірність Хаусдорфа – Безиковича якого дорівнює $-(p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1)/\ln 2 < 1$, і довільний інший носій цієї міри має не меншу хаусдорфову розмірність. Аналогічно для міри (1): при довільному виборі $0 < p_0 < p_2 < 1$ топологічний носій S_μ збігається з множиною Кантора, але „мінімальний розмірнісний носій” є скрізь щільним в S_μ і має хаусдорфову розмірність $-(p_0 \ln p_0 + p_2 \ln p_2)/\ln 3 <$ $< \ln 2/\ln 3$.

Дану роботу присвячено розвитку методів фрактального аналізу „внутрішньо фрактальних” властивостей сингулярних імовірнісних мір, що дозволяє класифікувати такі міри за рівнем складності локальної будови самої міри та її суттєвих носіїв.

У п. 2 досліджуються різні підходи до означення глобальної та локальної хаусдорфових розмірностей сингулярних імовірнісних мір, аналізуються взаємозв’язки між цими підходами. Особливу увагу приділено сингулярним мірам точної фрактальної розмірності.

У п. 3 запропоновано новий метод мультифрактального аналізу сингулярних мір. Для кожної сингулярної міри μ спеціальним чином вводиться характеристична мультифрактальна міра μ^* першого порядку, звичайний фрактальний аналіз якої дозволяє вивчати тонкі мультифрактальні властивості початкової міри μ. На цій основі доведено теореми про можливість однозначного розкладу довільної мультифрактальної сингулярної міри в опуклу комбінацію сингулярних мір простішої природи.

2. Різні підходи до означення хаусдорфової розмірності міри. Нехай μ — ймовірнісна міра на $\mathbb{R}$. Далі під словом „розмірність” будемо розуміти розмірність Хаусдорфа – Безиковича (див. [10, 11]).

Підхід I.

Означення 1. *Міра* μ *називається мірою точної розмірності* α, *якщо*:

1) *існує множина* S_0 *розмірності* α, *яка є носієм міри* μ;

2) *для будь-якого* $S \in \mathcal{B}$ *з умов* $\alpha_0(S) = \beta$ *і* $\beta < \alpha$ *випливає* $\mu(S) = 0$.

Очевидно, що довільна абсолютно неперервна міра має розмірність 1, а довільна дискретна міра має нульову розмірність.

Підхід II.

Означення 2. *Міра* μ *називається сингулярною відносно хаусдорфової міри* H_α *порядку* α (α-*сингулярною*), *якщо існує носій* A *міри* μ *нульової* H_α-*міри.*

Означення 3. *Міра* μ *називається* α-*неперервною, якщо для будь-якого* $A \in \mathcal{B}$ *з умови* $H_\alpha(A) = 0$ *випливає умова* $\mu(A) = 0$.

Означення 4. *Міра* μ *називається мірою точної розмірності* α, *якщо для довільного* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *міра* μ *є одночасно* $(\alpha - \varepsilon)$-*неперервною і* $(\alpha + \varepsilon)$-*сингулярною.*

Підхід III.

Нехай $\mathcal{A}_\mu = \{E : E \in \mathcal{B},\ \mu(E) = 1\}$ — множина всеможливих борелівських носіїв міри μ.

Означення 5. *Хаусдорфовою розмірністю міри* μ *називається число*

$$\dim_H \mu = \inf_{E \in \mathcal{A}_\mu} \{\alpha_0(E)\}. \tag{4}$$

Лема 1. *Для довільної міри* μ *існує мінімальний розмірнісний носій* T_μ, *тобто такий носій, для якого*

$$\dim_H \mu = \alpha_0(T_\mu).$$

Доведення. Нехай S_μ — топологічний носій міри μ. Якщо $\dim_H \mu = \alpha_0(S_\mu)$, то $T_\mu = S_\mu$.

Нехай $a = \dim_H \mu < \alpha_0(S_\mu) = b$, $b - a = d$. Розглянемо послідовність точок $d_k = a + d/2^{k-1}$. З (4) випливає, що $\forall\, k \in N\ \exists\, A_k \in \mathcal{A}_\mu:\ \alpha_0(A_k) \in (d_{k+1}; d_k]$.

Множина $T_\mu = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ буде носієм міри μ і $\alpha_0(T_\mu) = \inf_k \{\alpha_0(A_k)\} = \dim_H \mu$.

Зауваження **1.** Очевидно, що мінімальний розмірнісний носій T_μ міри μ визначається неоднозначно. Якщо T_μ є мінімальним розмірнісним носієм міри μ, то множина $T_\mu \cup A$ теж буде такою при умові $A \in \mathcal{B}$ і $\alpha_0(A) \le \alpha_0(T_\mu)$.

Нехай $N_\mu = \{E : E \in B,\ \alpha_0(E) = \dim_H \mu\}$ — множина всеможливих мінімальних розмірнісних носіїв міри μ. Цікавою і важливою для застосувань є задача знаходження елементів множини N_μ з додатковими структурними властивостями. Наприклад, для міри (2) $\dim_H \mu = -(p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1)/\ln 2$ і множина N_μ містить множину $M(p_0, p_1)$, яка складається з дійсних чисел, двійкові розклади яких містять цифру 0 з асимптотичною частотою p_0 (див. [4, 9]).

Означення 6. *Локальною розмірністю міри* μ *в точці* x_0 *називається число*

$$\dim_H(\mu, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{E \in \mathcal{A}_\mu} \{\alpha_0(E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\} \right]. \tag{5}$$

Означення 7. *Міра* μ *називається мірою точної розмірності* α_0, *якщо для довільної точки* $x_0 \in S_\mu$ *виконується умова* $\dim_H(\mu, x_0) = \alpha_0 = \dim_H \mu$.

Підхід IV.

Нехай $\alpha \geq 0$. Розглянемо вираз

$$D_\mu^\alpha = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\mu(x - \delta, x + \delta)}{\delta^\alpha}. \tag{6}$$

Очевидно, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ існує $\alpha = \alpha_0(\mu, x_0)$ таке, що $D_\mu^\alpha(x_0) = +\infty$ для всіх $\alpha > \alpha_0(\mu, x_0)$ і $D_\mu^\alpha(x_0) = 0$ для всіх $\alpha < \alpha_0(\mu, x_0)$.

Лема 2.

$$\alpha_0(\mu, x_0) = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln \mu(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{\ln \delta}.$$

Доведення. 1. Нехай $\alpha < \alpha_0(\mu, x_0) = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \dfrac{\ln \mu(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{\ln \delta}$. Розглянемо $\alpha^* \in (\alpha, \alpha_0(\mu, x_0))$ і знайдемо число $\delta(\alpha^*)$ таке, що для будь-якого $\delta < \delta(\alpha^*)$ виконується нерівність

$$\alpha^* < \frac{\ln \mu(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{\ln \delta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu(x - \delta, x + \delta)}{\delta^{\alpha^*}} < 1.$$

Тоді

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\mu(x - \delta, x + \delta)}{\delta^{\alpha^*}} \leq 1$$

і

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\mu(x - \delta, x + \delta)}{\delta^\alpha} = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\mu(x - \delta, x + \delta)}{\delta^{\alpha^*}} \frac{1}{\delta^{\alpha - \alpha^*}} = 0.$$

2. Нехай $\alpha > \alpha_0(\mu, x_0) = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \dfrac{\ln \mu(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{\ln \delta}$. Розглянемо $\alpha' \in (\alpha(\mu, x_0), \alpha)$. Виберемо послідовність $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$, таку, що

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln \mu(x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k)}{\ln \delta_k} = \alpha_0(\mu, x_0) < \alpha'.$$

Тоді

$$\exists k_0 \in N : \forall k > k_0 \;\; \frac{\ln \mu(x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k)}{\ln \delta_k} < \alpha' \Leftrightarrow \frac{\mu(x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k)}{\delta_k^{\alpha'}} > 1.$$

Отже, $\overline{\lim_{\delta_k \to 0}} \dfrac{\mu(x - \delta_k, x + \delta_k)}{\delta_k^{\alpha'}} \geq 1$ і

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\mu(x-\delta,\,x+\delta)}{\delta^{\alpha}} \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\mu(x-\delta_k,\,x+\delta_k)}{\delta_k^{\alpha}} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\mu(x-\delta_k,\,x+\delta_k)}{\delta_k^{\alpha'}}\frac{1}{\delta^{\alpha-\alpha'}} = +\infty.$$

Лему доведено.

Означення 8. *Міра* α *називається мірою точної розмірності* α, *якщо для* μ*-майже всіх* $x \in [0, 1]$ *виконується умова*

$$\alpha_0(\mu, x_0) = \alpha.$$

Теорема 1. *Означення* 1 *і* 4 *є еквівалентними.*

Доведення. 1. Нехай міра μ задовольняє означення 1. Доведемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ міра μ буде $(\alpha-\varepsilon)$-неперервною і $(\alpha+\varepsilon)$-сингулярною.

Нехай A — множина нульової міри Хаусдорфа порядка $\alpha-\varepsilon$. Оскільки $H_{\alpha-\varepsilon}(A) = 0$, то $\alpha_0(A) \leq \alpha-\varepsilon$. Тоді $\mu(A) = 0$ згідно з п. 2 означення 1. Отже, μ є $(\alpha-\varepsilon)$-неперервною мірою. Згідно з п. 1 означення 1 існує множина S_0 розмірності α, яка є носієм міри μ. Тоді за властивістю розмірності Хаусдорфа – Безиковича для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо $H_{\alpha+\varepsilon}(A) = 0$. Отже, міра μ є $(\alpha+\varepsilon)$-сингулярною.

2. Нехай міра μ задовольняє означення 4.

а) Міра μ є $(\alpha+\varepsilon)$-сингулярною $(\forall\,\varepsilon > 0)$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина A_ε така, що $H_{\alpha+\varepsilon}(A_\varepsilon) = 0$ і $\mu(A_\varepsilon) = 1$, звідки $\alpha_0(A_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon$.

Розглянемо послідовність $\varepsilon_k \to 0$ і множину $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\varepsilon_k}$. Очевидно, що $\mu(A_0) = 1$ і $\alpha_0(A_0) = \inf_k\{\alpha_0(A_{\varepsilon_k})\} \leq \alpha$.

Якщо $\alpha_0(A_0) = \alpha$, то п. 1 означення 1 виконано: $S_0 = A_0$.

Якщо $\alpha_0(A_0) < \alpha$, то $S_0 = A_0 \cup B_0$, де B_0 — довільна борелівська підмножина розмірності α. Справді, $\mu(S_0) = 1$ і $\alpha_0(S_0) = \max\{\alpha_0(A_0), \alpha_0(B_0)\} = \alpha$.

б) Міра μ є $(\alpha-\varepsilon)$-неперервною для довільного $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Тому для довільної множини A з умови $H_{\alpha-\varepsilon}(A) = 0$ випливає рівність $\mu(A) = 0$. Нехай $S \in \mathcal{B}$. Якщо $\alpha_0(S) = \beta$ і $\beta < \alpha$, то $H_{(\alpha+\beta)/2}(S) = H_{\alpha-(\alpha-\beta)/2}(S) = 0$, звідки $\mu(S) = 0$.

Теорему 1 доведено.

Нехай μ — довільна ймовірнісна міра на $\mathbb{R}$. Розглянемо наступні множини:

$$T_\infty = \{x : D_\mu^\alpha(x) = +\infty\}, \quad T_+ = \{x : 0 < D_\mu^\alpha(x) < +\infty\}, \quad T_0 = \{x : D_\mu^\alpha(x) = 0\}.$$

Як відомо [12], міра $\mu \upharpoonright T_\infty$ є α-сингулярною, міра $\mu \upharpoonright (T_0 \cup T_+)$ є α-неперервною, а міра $\mu \upharpoonright T_0$ є сильно α-неперервною (тобто $\mu \upharpoonright T_0(E) = 0$ для довільної борелівської множини E, яка має σ-скінченну H_α-міру).

Теорема 2. *Означення* 4 *і* 8 *є еквівалентними.*

Доведення. 1. Нехай міра μ має точну розмірність α за означенням 4. Оскільки μ є $(\alpha+\varepsilon)$-сингулярною $(\forall\,\varepsilon > 0)$, то $D_\mu^{\alpha+\varepsilon} = +\infty$ для μ-майже всіх x. Оскільки μ є $(\alpha-\varepsilon)$-неперервною для довільного $\alpha \in (0, \alpha)$, то

$D_\mu^{\alpha-\varepsilon} < \infty$ для μ-майже всіх x. Тоді $D_\mu^{\alpha-2\varepsilon}(x) = 0$ для μ-майже всіх x. Отже, для μ-майже всіх x існує число $\alpha_0(x) = \alpha$ таке, що $D_\mu^{\beta}(x) = +\infty$ при $\beta > \alpha$ і $D_\mu^{\beta}(x) = 0$ при $\beta < \alpha$. Отже, міра μ є мірою точної розмірності α за означенням 8.

2. Нехай

$$\alpha_0(\mu, x) = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln\mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln\delta} = \alpha$$

для μ-майже всіх x і $N_\mu = \{x : \alpha_0(\mu, x) = \alpha_0\}$. Якщо $x \in N_\mu$ і $\beta > \alpha_0$, то $D_\mu^{\beta}(x) = +\infty$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для μ-майже всіх x виконується умова $D_\mu^{\alpha+\varepsilon} = +\infty$. Тоді за теоремою Роджерса – Тейлора [12] міра μ є $(\alpha + \varepsilon)$-сингулярною для всіх $\varepsilon > 0$.

Якщо $\beta < \alpha_0$ і $x \in N_\mu$, то $D_\mu^{\beta}(x) = 0$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для μ-майже всіх x виконується умова $D_\mu^{\alpha-\varepsilon}(x) = 0$. Тоді міра μ є $(\alpha - \varepsilon)$-неперервною (більш того, у цьому випадку міра μ є сильно $(\alpha - \varepsilon)$-неперервною).

Теорему 2 доведено.

Отже, означення 1, 4 і 8 є рівносильними.

Розглянемо деякі приклади мір точної розмірності.

***Приклад* 1.** Класична симетрична міра Кантора (тобто міра вигляду (1) з умовою $p_0 = p_1 = 1/2$) є сингулярною мірою точної розмірності $\ln 2/\ln 3$, оскільки для всіх точок x множини Кантора виконується умова

$$\varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln\mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln\delta} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

***Приклад* 2.** Несиметрична міра Салема (тобто міра вигляду (2)) є сингулярною мірою точної розмірності $\alpha_0 = -(p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1)/\ln 2$. На відміну від попереднього прикладу для несиметричної міри Салема областю значень функції $\alpha_0(\mu, x) = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln\mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln\delta}$ є весь одиничний відрізок, але для μ-майже всіх $x \in [0, 1]$ виконується умова $\alpha_0(\mu, x) = \alpha_0$. В якості носія мінімальної розмірності можна вибрати множину

$$M(p_0, p_1) = \{x : \nu_0(x) = p_0,\ \nu_1(x) = p_1\},$$

де $\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$, $N_i(x, k)$ — кількість цифр i серед перших k цифр двійкового розкладу числа x (див. [4, 9]).

Твердження. *Означення* 1 *і* 7 *не є еквівалентними.*

Доведення. Побудуємо міру μ, яка має точну розмірність α за означенням 7, але не є мірою точної розмірності α за означенням 1.

Нехай μ_1 — міра Лебега на $[0, 1]$, а μ_2 — міра Салема з $p_0 < p_1$. Тоді міра $\mu = \mu_1/2 + \mu_2/2$ є мірою точної розмірності 1 за означенням 7 (справді, локальна розмірність $\dim_H(\mu, x) = 1\ \forall x \in [0, 1]$), але міра μ не є мірою точної розмірності 1 за означенням 1, оскільки існує множина $M(p_0, p_1)$ розмірності $-(p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1)/\ln 2 < 1$, для якої виконується умова $\mu(M(p_0, p_1)) = 1/2 > 0$.

Твердження доведено.

Означення 9. *Міри* μ, *які мають точну розмірність* α *за означенням* 1 (4, 8), *будемо називати мірами внутрішньо точної розмірності* α.

Міри μ, які мають точну розмірність α за означенням 7, називатимемо *мірами зовнішньо точної розмірності* α.

***Зауваження* 2.** Щойно побудована міра μ є лінійною комбінацією двох мір внутрішньо точної розмірності. Оскільки функція $f(p) = -(p\ln p + (1-p) \times \ln(1-p))/\ln 2$ строго зростає на $(0,1/2)$, $f(1/2) = 1$ і $f(p) \to 0$ при $p \to 0$, то легко побудувати послідовність несиметричних мір Салема таку, що $\mu^{(k)}$ є мірою внутрішньо точної розмірності α_k, де $\{\alpha_k\}$ — довільна послідовність дійсних чисел з $(0, 1)$. Тоді міра $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \mu^{(k)}$ є мірою зовнішньо точної розмірності $\alpha = \sup_k \{\alpha_k\}$, оскільки мінімальні розмірнісні носії $N_{\mu^{(k)}}$ мір $\mu^{(k)}$ є скрізь щільними монофрактальними множинами розмірності α_k.

У наступному пункті буде показано, що не кожну міру зовнішньо точної розмірності можна розкласти в суму мір внутрішньо точної розмірності.

Теорема 3. *Будь-яка міра* μ *внутрішньо точної розмірності* α *є мірою зовнішньо точної розмірності* α.

Доведення. З умов 1 і 2 означення 1 випливає існування носія S_0 розмірності α, який при цьому є мінімальним розмірнісним носієм міри μ.

Отже, $\dim_H \mu = \inf_{E \in \mathcal{A}_\mu} \{\alpha_0(E)\} = \alpha$. Доведемо, що для будь-якого $x \in S_\mu$ виконується умова $\dim_H(\mu, x) = \alpha$. Очевидно, що $\dim_H(\mu, x) \le \dim_H \mu$. Припустимо, що існує $x_0 \in S_\mu$ така, що $\dim_H(\mu, x_0) = \alpha_0 < \alpha$, тобто

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{E \in \mathcal{A}_\mu} \{\alpha_0(E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\} \right] = \alpha_0 < \alpha.$$

Тоді існує ε_0 таке, що

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 : \inf_{E \in \mathcal{A}_\mu} \{\alpha_0(E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\} < \frac{\alpha_0 + \alpha}{2}.$$

Отже, існує носій E_0 міри μ такий, що

$$\alpha_0(E_0 \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) \le \alpha_0 + \frac{3}{4}(\alpha - \alpha_0) < \alpha.$$

Оскільки $x_0 \in S_\mu$, то множина $S = E_0 \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ має розмірність $\beta < \alpha$ і $\mu(S) > 0$, що суперечить умові 2 означення 1.

Теорему 3 доведено.

***Приклад* 3.** Нехай μ_1 — класична симетрична міра Кантора, а μ_2 — несиметрична міра Салема з $p_0 < p_1$. Виберемо p_0 так, щоб

$$\beta = -\frac{p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1}{\ln 2} < \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Міра $\mu = \mu_1/2 + \mu_2/2$ не є мірою зовнішньо точної розмірності, оскільки для всіх чисел x з множини Кантора C_0 виконується умова $\dim_H(\mu, x) = \ln 2/\ln 3$, а для всіх чисел $x \in [0,1] \setminus C_0$ $\dim_H(\mu, x) = \beta$.

Наслідок. *Якщо для міри* μ *існує множина* A *така, що* $\mu(A) = 1$ *і для будь-якого* $x \in A$ $\alpha_0(\mu, x) = \alpha$, *то множина* A *є мінімальним розмірнісним носієм міри* μ *і* $\alpha_0(A) = \alpha$.

***Зауваження* 3.** Для довільної міри μ внутрішньо точної розмірності α існує множина A, вказана у наслідку, хоча сама побудова такої множини може бути нетривіальною задачею.

***Приклад* 4.** Нехай μ — несиметрична міра Кантора з $0 < p_0 < p_1 < 1$. Розглянемо

$$A = M(p_0, p_1) = \{x : \nu_0(x) = p_0,\ \nu_1(x) = 0,\ \nu_2(x) = p_1\}.$$

За посиленим законом великих чисел $\mu(A) = 1$. З іншого боку,

$$\forall\, x \in A : \ \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln\mu(x-\delta,\, x+\delta)}{\delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\mu\left(\Delta^3_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{\ln\left|\Delta^3_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\prod_{k=1}^n p_{\alpha_k(x)}}{\ln 3^{-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln p_0^{N_0(x,n)}\, p_2^{N_2(x,n)}}{-n\ln 3} = \frac{\nu_0(x)\ln p_0 + \nu_2(x)\ln p_2}{-\ln 3} = -\frac{p_0\ln p_0 + p_2\ln p_2}{\ln 3}.$$

Отже, міра μ є мірою внутрішньо точної розмірності, а множина $M(p_0, p_2)$ є мінімальним розмірнісним носієм.

3. Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних імовірнісних мір. У даному пункті буде проведено класифікацію ймовірнісних розподілів за „рівнем складності локальної будови”.

1. Найпростішу структуру мають абсолютно неперервні та дискретні розподіли. Звичайно, щільність абсолютно неперервного розподілу може мати досить складну будову (в [5] наведено приклад абсолютно неперервної ймовірнісної міри μ, для якої множини

$$N_0 = \left\{x : \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\mu(x-\delta,\, x+\delta)}{\delta} = 0\right\} \quad \text{і} \quad N_\infty = \left\{x : \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\mu(x-\delta,\, x+\delta)}{\delta} = +\infty\right\}$$

є одночасно скрізь щільними множинами повної розмірності: $\alpha_0(N_0) = \alpha_0(N_\infty) = 1$), але безпосередньо з означення 1 випливає, що довільна абсолютно неперервна міра μ на $\mathbb{R}$ має точну розмірність 1. Тому з теорем 1 та 2 випливає, що для μ-майже всіх точок x із топологічного носія абсолютно неперервної міри μ має місце рівність $\alpha_0(\mu, x) = 1$.

У випадку чисто дискретної міри $\alpha_0(\mu, x) = 0$ для всіх атомів міри μ, хоча тополого-метрична структура топологічного носія S_μ може бути будь-якого з C-, S-, P-типів або їх сумішшю.

2. Якщо міра μ є сингулярно неперервною і має внутрішню точну розмірність α, то $\alpha_0(\mu,x) = \alpha \in [0,1]$ для μ-майже всіх x. При цьому міру μ будемо називати α*-монофрактальною.*

У випадку $\alpha = 0$ міру μ називатимемо *аномально фрактальною* (її мінімальний розмірнісний носій та топологічний носій є аномально фрактальними множинами), а у випадку $\alpha = 1$ сингулярну міру μ — *суперфрактальною.*

$2'$. Найпростішими серед α-монофрактальних сингулярних мір є міри, для яких умова $\alpha_0(\mu, x) = \alpha$ виконується для λ-майже всіх точок топологічного носія. Прикладом такої міри може бути симетрична міра Кантора.

$2''$. Значно складнішими і цікавішими для фізичних застосувань [10] є α-монофрактальні сингулярні міри, для яких множини

$$A_\lambda = \left\{ x : \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln \delta} = \lambda \right\}$$

мають фрактальну структуру для континуальної кількості значень параметра λ. Прикладом таких мір можуть бути несиметричні канторівські та несиметричні салемівські міри. Основною проблемою у цьому випадку є дослідження функції $f(\lambda) = \alpha_0(A_\lambda)$, а основним методом дослідження є так званий „мультифрактальний формалізм” [10].

3. Для класифікації сингулярних мір, які не є α-монофрактальними, введемо наступне поняття.

Нехай μ — довільна сингулярна ймовірнісна міра на $[0, 1]$. Розглянемо функцію дійсної змінної α:

$$g_\mu(\alpha) = \mu \left\{ x : \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln \delta} < \alpha \right\}.$$

Очевидно, що $g_\mu(\alpha) = 0$ при $\alpha \le 0$, $g_\mu(\alpha) = 1$ при $\alpha > 1$, $g_\mu(\alpha)$ є зростаючою функцією, яка неперервна зліва. Отже, $g_\mu(\alpha)$ — функція розподілу, яка визначає на борелівських підмножинах одиничного відрізка ймовірнісну міру μ^*:

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu^*(E) = \int_0^1 \chi_E \, dg_\mu(\alpha), \tag{7}$$

де χ_E — характеристична функція множини E.

Іншими словами, для будь-якого $E \in \mathcal{B}$

$$\mu^*(E) = \mu \left\{ x : \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln \delta} \in E \right\}. \tag{8}$$

Міру μ^* назвемо *характеристичною мультифрактальною мірою (х. м. м.) першого порядку* для сингулярної міри μ.

Очевидно, що міра μ^* має вироджений розподіл з атомом одиничної ваги в точці α_0 тоді і тільки тоді, коли міра μ має внутрішньо точну розмірність α_0.

Означення 10. *Сингулярну міру μ назвемо мірою з дискретним мультифрактальним розподілом, якщо х. м. м. μ^* є чисто дискретною мірою з більш ніж одним атомом.*

Наступна теорема повністю описує структуру сингулярних мір із дискретним мультифрактальним спектром.

Теорема 4. *Довільну сингулярну ймовірнісну міру μ з дискретним мультифрактальним розподілом єдиним чином можна подати у вигляді*

$$\mu = \sum_k \beta_k \mu_k, \tag{9}$$

де $\beta_k > 0$, $\sum_k \beta_k = 1$, μ_k — сингулярні α_k-монофрактальні міри, $\alpha_i \ne \alpha_j$ $(i \ne j)$.

Доведення. Нехай $\{\alpha_k\}$ — множина всіх атомів х. м. м. μ^*, $\mu^*(\alpha_k) = \beta_k > 0$. Очевидно, що $\sum_k \beta_k = 1$. Позначимо

$$D_k = \{x : \alpha_0(\mu, x) = \alpha_k\}, \qquad C = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_k D_k \right).$$

За означенням міри μ^*:

$$\mu^*(\alpha_k) = \mu(D_k) = \beta_k, \quad \mu(C) = 0.$$

Нехай $\mu_k = \dfrac{1}{\beta_k}\mu \restriction D_k$, тобто для будь-якого $E \in \mathcal{B}$ $\mu_k(E) = \dfrac{1}{\beta_k}\mu(E \cap D_k)$.

З означення 8 випливає, що μ_k є мірою внутрішньо точної розмірності α_k.

Оскільки $D_k \cap D_n = \varnothing$ $(k \neq n)$, то для будь-якого $E \in \mathcal{B}$

$$\mu(E) = \mu\left(E \cap \left(\bigcup_k D_k \cup C\right)\right) = \mu(E \cap C) + \sum_k \mu(E \cap D_k) =$$

$$= \sum_k \beta_k \frac{1}{\beta_k}\mu(E \cap D_k) = \sum_k \beta_k \mu_k(E),$$

що доводить можливість розкладу (9).

Оскільки міра μ має внутрішньо точну розмірність α тоді і тільки тоді, коли відповідна х. м. м. μ^* має єдиний атом одиничної ваги в точці α, то розклад (9) є єдиним.

Теорему 4 доведено.

***Зауваження* 4.** Очевидно, що будь-яка сингулярна міра, яку можна подати у вигляді (9), є сингулярною мірою з дискретним мультифрактальним розподілом.

Теорема 5. *Для довільної чисто дискретної міри* ν *на* $[0, 1]$ *існує міра* μ, *для якої відповідна характеристична мультифрактальна міра* μ^* *збігається з* ν.

Доведення. Розглянемо клас випадкових величин

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{2^n}, \tag{10}$$

де ψ_n — незалежні однаково розподілені в. в., які набувають значень 0 і 1 з імовірностями p_0 та p_1 відповідно $(p_i > 0,\ p_0 + p_1 = 1)$. Імовірнісна міра μ_ψ є мірою внутрішньо точної розмірності $\alpha = (p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1)(-\ln 2)^{-1}$ [9].

Нехай $\{\alpha_k\}$ — множина всіх атомів міри ν і $\nu(\alpha_k) = \beta_k > 0$. Для довільного $\alpha \in [0, 1]$ існує єдине число $p_0 = p_0(\alpha) \in [0, 1/2]$ таке, що $(p_0 \ln p_0 + (1 - p_0 \ln(1 - p_0)))(-\ln 2)^{-1} = \alpha$. Для кожного атома α_k знайдемо відповідне $p_0^{(k)} = p_0(\alpha_k)$ і побудуємо міру μ_k, яка є ймовірнісною мірою випадкової величини

$$\psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^{(k)}}{2^n},$$

де $\psi_n^{(k)}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень 0 і 1 з імовірностями $p_0^{(k)}$ і $p_1^{(k)} = 1 - p_0^{(k)}$. Очевидно, що міра $\mu_k = \mu_{\psi^{(k)}}$ має внутрішньо точну розмірність α_k і міра $\mu = \sum_k \beta_k \mu_k$ є шуканою.

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 5.** Якщо $\alpha \in (0, 1)$, то міри μ_k у запропонованому доведенні є сингулярними. Якщо $\alpha_k = 0$, то μ_k є чисто дискретною з одним атомом; якщо $\alpha_k = 1$, то μ_k збігається з мірою Лебега. Для двох останніх випадків можна побудувати „сингулярні замінники” у класі ймовірнісних мір з незалежними різнорозподіленими двійковими цифрами.

При $\alpha_k = 0$

$$\psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^{(k)}}{2^n}, \qquad p_{0n}^{(k)} = \frac{1}{1+n}.$$

У цьому випадку μ_k є сингулярною аномально фрактальною мірою.

При $\alpha_k = 1$

$$\psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^{(k)}}{2^n}, \qquad p_{0n}^{(k)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n+7}}.$$

У цьому випадку μ_k є сингулярною суперфрактальною мірою.

Наслідок. *Для довільної чисто дискретної міри* ν *на* $[0, 1]$ *існує чисто сингулярна міра* μ, *для якої відповідна х. м. м.* μ^* *збігається з* ν.

Означення 11. *Сингулярну міру* μ *назвемо мірою з неперервним мультифрактальним розподілом, якщо відповідна характеристична мультифрактальна міра* μ^* *є неперервною.*

Клас сингулярних мір з неперервним мультифрактальним розподілом непорожній, що демонструє наступний приклад.

***Приклад* 5.** Розглянемо наступну конструкцію побудови системи подрібнюючих розбиттів одиничного відрізка.

На першому кроці $[0, 1]$ зобразимо у вигляді об'єднання трьох відрізків першого рангу:

$$\Delta_0^\Gamma = \left[0, \frac{1}{4}\right], \qquad \Delta_1^\Gamma = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \qquad \Delta_2^\Gamma = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

На k-му кроці кожен з відрізків $\Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$ $(k-1)$-го рангу розбиваємо зліва направо на 3 відрізки k-го рангу так, щоб

$$\frac{\left|\Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}0}\right|}{\left|\Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}\right|} = \frac{\left|\Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}2}\right|}{\left|\Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}\right|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i 2^{-(i+1)} + 2^{-k}}}.$$

Очевидно, що система вкладених відрізків

$$\Delta^\Gamma_{\alpha_1} \supset \Delta^\Gamma_{\alpha_1\alpha_2} \supset \ldots \supset \Delta^\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \supset \ldots$$

визначає єдину точку і, навпаки, для кожної точки x з $[0, 1]$ існує послідовність $\{\Delta^\Gamma_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}\}$ така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^\Gamma_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^\Gamma_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}. \tag{11}$$

Зображення (11) будемо називати Г-зображенням точки x, яке є єдиним для всіх точок, що не є кінцевими точками рангових відрізків.

Розглянемо множину

$$M = \left\{x : x = \Delta^\Gamma_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},\ \alpha_n(x) \in \{0, 2\}\right\}.$$

Можна показати [13], що M — ніде не щільна нуль-множина і локальна розмірність Хаусдорфа – Безиковича множини M в точці $x = \Delta^\Gamma_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} \in M$ дорівнює

$$\alpha_0(M, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_0(M \bigcap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{2^{i+1}}.$$

Розглянемо послідовність імовірнісних просторів $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu'_k)$:

$$\Omega_k = \{0, 1, 2\}, \quad \mathcal{F}_k = 2^{\Omega_k}, \quad \mu'_k(0) = \mu'_k(2) = \frac{1}{2}, \quad \mu'_k(1) = 0,$$

та їх нескінченний добуток

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu') = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu'_k).$$

Розглянемо вимірне відображення $f: \Omega \to [0, 1]$, задане таким чином:

$$\forall\, \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots) \in \Omega: f(\omega) = \Delta^{\Gamma}_{\omega_1 \ldots \omega_k \ldots},$$

та індуковану образ-міру $\mu = \mu'(f^{-1})$ на борелівських підмножинах $[0, 1]$

$$\forall\, E \in \mathcal{B}: \mu(E) = \mu'(f^{-1}(E)).$$

Покажемо, що міра μ є сингулярною мірою з неперервним мультифрактальним розподілом. Сингулярність μ випливає з того, що топологічний носій міри μ є ніде не щільною нуль-множиною (він збігається з означеною вище множиною M).

Для довільного $x = \Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} \in M = S_\mu$ маємо

$$\alpha_0(\mu, x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln \delta} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln \mu(\Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \left| \Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)} \right|} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 2^{-k}}{\ln \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{i+1}}\right)^{-1}}} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{i+1}}}}.$$

Нехай

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j(x)}{2^j},$$

де $\beta_j(x) = \alpha_j(x)/2 \in \{0, 1\}$. Тоді

$$\forall\, x \in M: \alpha_0(\mu, x) = z, \quad \text{оскільки} \quad \left\{ z \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{i+1}} \right)^{-1} \right\} \to 1, \quad i \to \infty.$$

Отже, для будь-якого $z_0 \in [0, 1]$ існує $x_0 \in S_\mu$ таке, що $\alpha_0(\mu, x_0) = z_0$, причому якщо $z_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(z_0)/2^k$, $\beta_k(z_0) \in \{0, 1\}$, то $x_0 = \Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)\ldots}$, де $\alpha_k(x_0) = 2\beta_k(z_0)$.

Тому

$$\forall\, z_0 \in [0, 1]: \quad \mu^*(z_0) = \mu\, \{x : \alpha_0(\mu, x) = z_0\} = \mu(x_0) = 0.$$

Отже, μ^* — неперервна х. м. м.

Теорема 6. *Довільну сингулярну міру* μ *єдиним чином можна зобразити у вигляді*

$$\mu = \gamma_d \mu_d + \gamma_c \mu_c, \tag{12}$$

де $\gamma_d \geq 0$, $\gamma_c \geq 0$, $\gamma_d + \gamma_c = 1$, μ_d *і* μ_c *— сингулярні міри з дискретним та неперервним мультифрактальним розподілом відповідно.*

Доведення. Нехай μ^* — х. м. м. першого порядку для міри μ. За класичною теоремою аналізу міра μ^* єдиним чином зображується у вигляді

$$\mu^* = \gamma_d \mu_d^* + \gamma_c \mu_c^*, \tag{13}$$

де μ_d^* і μ_c^* — чисто дискретна та чисто неперервна ймовірнісні міри, $\gamma_d \geq 0$, $\gamma_c \geq 0$, $\gamma_d + \gamma_c = 1$. Якщо $\gamma_d = 1$ або $\gamma_c = 1$, то твердження теореми є очевидним.

Розглянемо випадок, коли $\gamma_d > 0$ і $\gamma_c > 0$. Нехай $\{\alpha_k\}$ — множина всіх атомів міри μ_d^*. Тоді $\sum_k \mu^*(\alpha_k) = \gamma_d$.

Нехай

$$D_k = \{x : \alpha_0(\mu, x) = \alpha_k\}, \quad D = \bigcup_k D_k, \quad \mu(D) = \bigcup_k \mu(D_k) = \gamma_d$$

і

$$C = \mathbb{R} \backslash D, \quad \forall \alpha \in C : \mu\{x : \alpha_0(\mu, x) = \alpha\} = 0.$$

Міри μ_d і μ_c означимо таким чином:

$$\forall E \in \mathcal{B} : \mu_d(E) = \frac{1}{\gamma_d} \mu(E \cap D), \quad \mu_c(E) = \frac{1}{\gamma_c} \mu(E \cap C).$$

За побудовою міри μ_d і μ_c є сингулярними мірами з дискретним і неперервним розподілом відповідно і

$$\mu(E) = \mu(E \cap (D \cup C)) = \mu(E \cap D) + \mu(E \cap C) = \gamma_d \mu_d(E) + \gamma_c \mu_c(E),$$

що доводить можливість розкладу (12).

Єдиність даного розкладу випливає з єдиності розкладу (13) міри μ^* на дискретну і неперервну компоненти.

Наслідок. *Довільну сингулярну ймовірнісну міру* μ *єдиним чином можна подати у вигляді*

$$\mu = \beta_c \mu_c + \sum_k \beta_k \mu_k,$$

де $\beta_c \geq 0$, $\beta_k \geq 0$, $\beta_c + \sum_k \beta_k = 1$, μ_k *— сингулярні* α_k*-монофрактальні міри,* μ_c *— сингулярна міра з неперервним мультифрактальним розподілом.*

Означення 12. *Сингулярну міру* μ *назвемо мірою з абсолютно неперервним* (*сингулярно неперервним*) *мультифрактальним розподілом, якщо відповідна характеристична мультифрактальна міра* μ^* *є абсолютно неперервною* (*сингулярно неперервною*).

Щойно означені класи сингулярних мір є непорожніми. Сингулярна міра μ, яка побудована у прикладі 5, має абсолютно неперервний мультифрактальний розподіл. Справді, якщо $\Delta^2_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ — двійковий відрізок n-го рангу, тобто

$$\Delta^2_{\beta_1 \ldots \beta_n} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2^i}; \ \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2^i} \right],$$

то з побудови міри μ випливає

$$\left\{x : \alpha_0(\mu, x) \in \Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_n}\right\} = \Delta^{\Gamma}_{(2\beta_1)\ldots(2\beta_n)}.$$

Отже,

$$\forall\, n \in N : \ \mu^*(\Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_n}) = \mu(\Delta^{\Gamma}_{(2\beta_1)\ldots(2\beta_n)}) = \frac{1}{2^n}.$$

Тобто характеристична міра першого порядку μ^* збігається з мірою Лебега на $[0, 1]$.

***Приклад* 6.** Побудуємо приклад міри ν з сингулярно неперервним мультифрактальним розподілом. Для цього використаємо алгоритм побудови міри з попереднього прикладу, але означимо інакше дискретні міри $\nu'_k : \nu'_k(0) = p_0 < 1/2$, $p_0 > 0$, $\nu'_k(2) = p_2 = 1 - p_0$, $\nu'_k(1) = 0$.

При цьому множина

$$M = \left\{x : x = \Delta^2_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},\ \alpha_k(x) \in \{0, 2\}\right\}$$

залишається топологічним носієм для міри ν. За підсиленим законом великих чисел для μ-майже всіх x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_0(x,n)}{n} = p_0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{N_2(x,n)}{n} = p_2,$$

де $N_i(x,n)$ — кількість цифр i серед перших n цифр у Γ-зображенні числа x. Тому для ν-майже всіх x

$$\alpha_0(\nu, x) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln \nu(x-\delta,\, x+\delta)}{\ln \delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \nu(\Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \left|\Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}\right|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln p_0^{N_0(x,k)} \cdot p_2^{N_2(x,k)}}{\ln \prod_{i=1}^k 2^{-\left(\sum_{j=1}^i \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{i+1}}\right)^{-1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{N_0(x,k)}{k}\ln p_0 + \frac{N_2(x,k)}{k}\ln p_2}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^i \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}}\right) + \frac{1}{2^{i+1}}}\ln\frac{1}{2}} = z p^*,$$

де

$$p^* = \frac{p_0 \ln p_0 + p_2 \ln p_2}{-\ln 2}, \qquad z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j(x)}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j(z)}{2^j}, \qquad \beta_j(z) = \frac{1}{2}\alpha_j(x).$$

У даному випадку міра ν^* є сингулярно розподіленою на відрізку $[0, p^*]$. Справді, за щойно доведеним для ν-майже всіх $x = \Delta^{\Gamma}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$

$$\alpha_0(\nu, x) = p^* z = p^* \Delta^2_{\left(\frac{1}{2}\alpha_1(x)\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\alpha_j(x)\right)\ldots}.$$

Нехай для будь-якого $y_0 \in [0, p^*]$

$$z_0 = \frac{y_0}{p^*} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j(z_0)}{2^j}, \qquad x_0 = \Delta^{\Gamma}_{(2\beta_1(z_0))\ldots(2\beta_k(z_0))\ldots}.$$

Тоді

$$\nu^*(y_0) = \nu\{x : \alpha_0(\nu, x) = y_0\} = \nu(x_0) = 0.$$

Отже, ν^* — неперервна міра. Нехай $\Delta^{2,p^*}_{\beta_1\ldots\beta_n}$ — образ відрізка n-го рангу двійкового розбиття $[0, 1]$ при стиску $x' = p^* x$, тобто

$$\Delta^{2,p^*}_{\beta_1\ldots\beta_n} = \left[p^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{2^j},\ p^* \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{2^j} \right) \right].$$

З побудови міри ν:

$$\nu^*\left(\Delta^{2,p^*}_{\beta_1\ldots\beta_n}\right) = \nu\left\{x : \alpha_0(\nu, x) \in \Delta^{2,p^*}_{\beta_1\ldots\beta_n}\right\} = \nu\left(\Delta^{\Gamma}_{(2\beta_1)\ldots(2\beta_n)}\right) = \prod\nolimits_{j=1}^{n} p_{2\beta_j},$$

і тому міра ν^* має несиметричний сингулярний салемівський розподіл на $[0, p^*]$, тобто міра ν^* є ймовірнісною мірою випадкової величини $\xi = p^* \times \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j / 2^j$, де ξ_j — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень 0 і 1 з імовірностями p_0 і p_1 $(0 < p_0 < p_1 < 1,\ p_0 + p_1 = 1)$.

Теорема 7. *Довільну сингулярну ймовірнісну міру* μ_c *з неперервним мультифрактальним розподілом єдиним чином можна подати у вигляді*

$$\mu_c = k_{sc}\mu_{sc} + k_{ac}\mu_{ac},$$

де $k_{sc} \geq 0$, $k_{ac} \geq 0$, $k_{sc} + k_{ac} = 1$, μ_{sc} *і* μ_{ac} *— сингулярно неперервні ймовірнісні міри з сингулярно неперервним та абсолютно неперервним мультифрактальним розподілом відповідно.*

Доведення. Нехай μ_c^* — х. м. м. для μ_c. За класичною теоремою аналізу міру μ_c^* єдиним чином можна розкласти у вигляді $\mu_c^* = k_{sc}\mu_{sc}^* + k_{ac}\mu_{ac}^*$, де $k_{sc} \geq 0$, $k_{ac} \geq 0$, μ_{sc}^* — чисто сингулярна, μ_{ac}^* — чисто абсолютно неперервна ймовірнісні міри. Якщо $k_{sc} = 1$ або $k_{ac} = 1$, то твердження теореми є очевидним.

Розглянемо випадок $k_{sc} > 0$ і $k_{ac} > 0$. Нехай T^* — мінімальний розмірнісний носій міри μ_{sc}^*. Тоді $\mu_c^*(T^*) = k_{sc}$, $\lambda(T^*) = 0$. Нехай $T = \{x : \alpha_0(\mu, x) \in T^*\}$, $U = \mathbb{R} \setminus T$. За означенням міри μ_c^* $\mu^*(T^*) = \mu(T) = k_{sc}$, $\mu^*(\mathbb{R} \setminus T^*) = \mu(U) = k_{ac}$. Розглянемо міри

$$\mu_{sc} = \frac{1}{k_{sc}} \mu_c \restriction T, \qquad \mu_{ac} = \frac{1}{k_{ac}} \mu_c \restriction U.$$

Очевидно, що μ_{sc} і μ_{ac} — сингулярні міри з сингулярним та абсолютно неперервним мультифрактальним розподілом відповідно і

$$\mu_c = k_{sc}\mu_{sc} + k_{ac}\mu_{ac}.$$

Єдиність даного розкладу випливає з єдиності розкладу міри μ_c^* на сингулярну та абсолютно неперервну компоненти.

Теорему 7 доведено.

Наслідок. *Довільну сингулярну ймовірнісну міру* μ *єдиним чином можна подати у вигляді*

$$\mu = \alpha_{ac}\mu_{ac} + \alpha_{sc}\mu_{sc} + \sum_k \alpha_k \mu_k,$$

де $\alpha_{ac} \geq 0$, $\alpha_{sc} \geq 0$, $\alpha_k \geq 0$, $\alpha_{ac} + \alpha_{sc} + \sum_k \alpha_k = 1$, μ_k — *сингулярні* α_k*-монофрактальні міри,* μ_{ac} (μ_{sc}) — *сингулярна ймовірнісна міра з абсолютно неперервним* (*сингулярним*) *мультифрактальним розподілом.*

Насамкінець зробимо два зауваження.

Зауваження **6.** Для ще глибшої характеризації сингулярних мір можна ввести до розгляду характеристичні мультифрактальні міри вищих порядків:

$$\mu^{**}(E) = \mu^{*}\left\{x : \varliminf_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu^{*}(x-\delta, x+\delta)}{\ln \delta} \in E\right\}$$

— х. м. м. другого порядку і далі — за індукцією.

Для міри ν з прикладу 6 ν^* має сингулярний салемівський розподіл, ν^{**} — дискретний розподіл з атомом одиничної ваги в точці p^*.

Зауваження **7.** Теореми у пп. 2 і 3 формулювались для одновимірних імовірнісних мір, але їх можна переформулювати для довільних скінченних борелівських мір.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1998. – 296 с.
2. *Del Rio R., Jitomirskaya S., Makarov N., Simon B.* Singular continuous spectrum is generic // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1994. – **31**, № 2. – P. 208–212.
3. *Last Y.* Quantum dynamics and decomposition of singular continuous spectra // J. Funct. Anal. – 1996. – **142**. – P. 406–445.
4. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal. – Bonn, 2004. – 14 p. – Preprint № 191.
5. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff – Besicovitch dimension // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 2004. – **24**, № 1. – P. 1–16.
6. *Працевитый Н. В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 77–83.
7. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of singular continuous spectrum // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 101–119.
8. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions. – Bonn, 2004. – 22 p. – Preprint № 12.
9. *Торбін Г. М.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q^*-знаками // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 3. – С. 363–375.
10. *Falconer K. J.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. – Chichester: Wiley, 2003.
11. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

Одержано 24.12.2004