УДК 517.9

О. М. Станжицький, А. М. Ткачук (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЛАСТИВОСТЯМИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Conditions are established under which the existence of periodic solution of a differential equation preserves in the case where a solution of the corresponding difference equation possesses the same property. The convergence of periodic solutions of a system of difference equations to a periodic solution of a system of differential equations is proved. Similar problems are considered for bounded solutions.

Встановлено умови, при яких існування періодичного розв'язку диференціального рівняння зберігається при наявності цієї властивості у розв'язку відповідного різницевого рівняння. Доведено збіжність періодичних розв'язків системи різницевих рівнянь до періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь. Аналогічні питання розглянуто для обмежених розв'язків.

1. Вступ. Ефективним методом дослідження диференціальних рівнянь є перехід від них до різницевих рівнянь, які отримуються з диференціальних заміною похідної відповідним різницевим відношенням. Останнє рівняння легко розв'язується покроковим методом, особливо враховуючи сучасний розвиток ЕОМ. Однак розв'язувати такі рівняння вказаним методом можна лише на скінченному інтервалі (в скінченній кількості вузлових точок). З цієї причини він не дає якісних характеристик (обмеженості, періодичності, стійкості) відповідних розв'язків диференціальних рівнянь. Тому актуальною є проблема вивчення якісної відповідності між розв'язками диференціальних та різницевих рівнянь.

У роботах [1 – 3] розглядались умови збереження властивостей періодичності, стійкості та коливності розв'язків різницевих рівнянь при наявності такої властивості у диференціальних рівнянь. Але не менш актуальною і цікавою є обернена задача про збереження вказаних вище властивостей розв'язків диференціальних рівнянь при наявності таких у відповідних різницевих. У роботі [4] дане питання розглянуто для стійкості та коливності. В даній роботі ці питання вивчаються для обмеженості та періодичності розв'язків. Розглядаються також питання про збіжність періодичних та обмежених розв'язків різницевих рівнянь до відповідних періодичних та обмежених розв'язків диференціальних рівнянь.

2. Постановка задачі. Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1}$$

і відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h) \tag{2}$$

($k \in \mathbb{Z},\ h > 0$ — крок різницевого рівняння),

$$x_k^h = x_k^h(t_0 + kh),$$

$$x^h(t_0) = x_0^h.$$

Вектор-функція $X(t, x)$ визначена при $t \in \mathbb{R},\ x \in D$ (D — деяка область простору $\mathbb{R}^n$), $t_0 \in \mathbb{R}$.

Мета роботи — вивчити питання про зв'язок між обмеженими і періодичними розв'язками систем (1) та (2).

3. Допоміжні твердження. Для розв'язування поставленої вище задачі наведемо кілька допоміжних тверджень. Далі скрізь будемо вважати, що функція $X(t,x)$ в області $\mathbb{R}\times D$ є неперервно диференційовною і обмеженою разом зі своїми частинними похідними, так що

$$\left|X(t,x)\right| + \left|\frac{\partial X}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X}{\partial x}\right\| \le C.$$

Тоді справедливою є лема про рівномірну оцінку близькості між розв'язками (1) і (2).

Лема 1. *Нехай* $x(t)$ *і* x_k^h — *розв'язки задач Коші, визначені на відрізку* $[t_0, t_0+T]$, *для* (1) *та* (2) *такі, що* $x(t_0) = x_0^h = x_0$, $x_0 \in D$. *Тодi виконується нерівність*

$$\left|x(t_0+kh) - x_k^h\right| \le he^{CT}[1+NT] \quad при \quad kh \le T,$$

де $N = C + C^2$.

Доведення безпосередньо випливає з формули (12) монографії [5, с. 384].

Лема 2. *При наведених вище умовах розв'язок* x_k^h *системи* (2) *неперервно залежить від початкових даних до моменту виходу його з області* D.

Доведення. Розв'язки системи (2) можна подати у вигляді

$$x_k^h = x_0^h + h\sum_{p=0}^{k-1} X(t_p, x_p^h),$$

$$y_k^h = y_0^h + h\sum_{p=0}^{k-1} X(t_p, y_p^h),$$

а тому

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| \le \left|x_0^h - y_0^h\right| + h\sum_{p=0}^{k-1}\left|X(t_p, x_p^h) - X(t_p, y_p^h)\right| \le$$

$$\le \left|x_0^h - y_0^h\right| + h\sum_{p=0}^{k-1} C\left|x_p^h - y_p^h\right|.$$

Звідси та з [1] маємо

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| \le \left|x_0^h - y_0^h\right|(1+Ch)^k,$$

що й доводить лему.

Лема 3. *Якщо розв'язок* x_k^h *системи* (2) *рівномірно асимптотично стійкий по* $k_0 \in \mathbb{Z}$, *то він рівномірно асимптотично стійкий і по* x_0.

Доведення. Оскільки розв'язок x_k^h системи (2) рівномірно асимптотично стійкий, то для будь-якого $\eta > 0$ існує $\delta = \delta(\eta) > 0$ таке, що для довільного іншого розв'язку y_k^h системи (2) з того, що

$$\left|x_{k_0}^h - y_{k_0}^h\right| < \delta,$$

випливає

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| < \frac{\eta}{2} \quad \text{при} \quad k \ge k_0$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\left|x_k^h - y_k^h\right| = 0. \tag{3}$$

Позначимо через $U_\delta(k_0)$ δ-окіл точки $x_{k_0}^h(x_0)$. Покажемо, що граничне співвідношення (3) є рівномірним по $x_0 \in U_\delta(k_0)$. Нехай це не так. Тоді існує $\mu > 0$ таке, що в $U_\delta(0)$ можна вказати збіжну послідовність точок $x^{(n)}$ і послідовність чисел k_n такі, що

$$\left|x^{(n)} - x_0^h\right| < \delta,$$

$$\left|x_{k_n}^h(x^{(n)}) - x_{k_n}^h\right| \geq \mu, \quad k_n \to \infty, \tag{4}$$

де $x_k^h(x^{(n)})$ — розв'язок (2) такий, що $x_0^h(x^{(n)}) = x^{(n)}$. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x^0$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty}\left|x_k^h(x^0) - x_k^h\right| = 0$ і можна вказати $N > 0$ таке, щоб виконувалася нерівність

$$\left|x_k^h(x^0) - x_k^h\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \tag{5}$$

для всіх $k \geq N + k_0$, де $\sigma(\mu)$ — стала, що гарантує включення розв'язків $x_k^h(x)$ ($x_0^h(x) = x$) системи (2), які починаються в $U_{\delta(\mu)}(0)$-околі точки $x_0^h(0)$, в $(\mu/2)$-окіл розв'язку x_k^h для всіх $k \geq 0$.

На підставі леми 1 існує $N_1 > 0$ таке, що виконується нерівність

$$\left|x_k^h(x^{(n)}) - x_k^h(x^0)\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2}, \quad k \in [k_0, k_0 + N], \quad n > N_1 \tag{6}$$

(можна вважати, що $k_n \geq N + k_0$ для $n > N_1$).

З (5), (6) випливає

$$\left|x_k^h(k_0 + N,\ x^{(n)}) - x_k^h(k_0 + N)\right| \leq \sigma(\mu).$$

Тому

$$\left|x_k^h(x^{(n)}) - x_k^h\right| < \frac{\mu}{2}, \quad k \geq k_0 + N.$$

Отже, при $k = k_n$ маємо $\left|x_{k_n}^h(x^{(n)}) - x_{k_n}^h\right| < \mu/2$, що суперечить (4).

Лему доведено.

4. Основні результати. Розглянемо спочатку відповідність між обмеженими розв'язками систем (1) та (2). Наступна теорема гарантує існування обмеженого розв'язку системи (2) при умові, що система (1) має обмежений розв'язок.

Теорема 1. *Якщо система* (1) *має обмежений, рівномірно по* $t_0 \in \mathbb{R}$ *асимптотично стійкий розв'язок* $x(t)$, *визначений на* $\mathbb{R}$ *і такий, що належить області* D *разом із деяким своїм околом, то існує* h_0 *таке, що при* $h \leq h_0$ *система* (2) *також буде мати обмежений розв'язок, причому*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|x(kh) - x_k^h\right| \to 0, \quad h \to 0. \tag{7}$$

Доведення. За умовою теореми $x(t)$ — обмежений розв'язок системи (1), тобто для нього виконується нерівність

$$\left|x(t)\right| \leq A \quad \forall t.$$

Внаслідок рівномірної асимптотичної стійкості $x(t)$ для довільних $\varepsilon > 0$ і t_0 існують $\delta > 0$ і T такі, що якщо $y(t)$ — розв'язок системи (1), для якого виконується умова

$$|x(t_0) - y(t_0)| \leq \delta,$$

то

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \tag{8}$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad t \geq t_0 + T, \tag{9}$$

причому δ і T не залежать від t_0.

Нехай x_m^h — розв'язок системи (2), який у початковій точці t_0 збігається з розв'язком $y(t)$, тобто

$$x_0^h = y(t_0). \tag{10}$$

Тоді за лемою 1 буде виконуватися нерівність

$$\left| y(t_0 + mh) - x_m^h \right| \leq he^{C(T+1)}[1 + N(T+1)] \quad \text{при} \quad m \leq k_0,$$

де k_0 таке, що $T \leq k_0 h \leq T + 1$. Зазначимо, що внаслідок стійкості $y(t)$ при $t \geq$ $\geq t_0$ належить D разом із деяким околом.

Виберемо h так, щоб

$$he^{C(T+1)}[1 + N(T+1)] \leq \frac{\delta}{2}. \tag{11}$$

Звідси

$$\left| y(mh) - x_m^h \right| \leq \frac{\delta}{2}, \quad m \leq k_0. \tag{12}$$

Далі будемо розглядати відрізок довжини $k_0 h$.

Оскільки на підставі умови (10) маємо

$$\left| x_0^h - x(t_0) \right| \leq \delta,$$

то з (9) випливає

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \geq k_0 h.$$

Тому

$$\left| x(mh) - x_m^h \right| \leq |x(mh) - y(mh)| + |y(mh) - x_m^h| < 2\varepsilon, \quad m \leq k_0,$$

і

$$\left| x(k_0 h) - x_{k_0}^h \right| \leq \delta. \tag{13}$$

Тепер розглянемо наступний відрізок довжини $k_0 h$ — $[k_0 h, 2k_0 h]$ і виберемо розв'язок $\tilde{y}(t)$ системи (1), який починається в точці $k_0 h$ і збігається в цій точці з розв'язком x_m^h:

$$x_{k_0}^h = \tilde{y}(k_0 h).$$

На підставі (13) маємо

$$|x(k_0 h) - \tilde{y}(k_0 h)| \leq \delta,$$

а з (8), (9) випливає

$$|x(t) - \tilde{y}(t)| < \varepsilon, \quad t \geq k_0 h,$$

$$|x(t) - \tilde{y}(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \geq k_0 h + T.$$

Тому виконуються нерівності

$$\left| x(mh) - x_m^h \right| < 2\varepsilon, \quad m \in [k_0, 2k_0],$$

і

$$\left| x(2k_0 h) - x_{2k_0}^h \right| \leq \delta.$$

Продовжуючи далі цей процес побудови розв'язку x_m^h системи (2), переконуємося, що x_m^h постійно знаходиться в 2ε-околі обмеженого розв'язку $x(t)$ системи (1), а у точках вигляду pk_0h — в його δ-околі.

Отже, x_m^h належить 2ε-околу обмеженого розв'язку, тому і x_m^h є обмеженим при $mh \geq t_0$.

Таким чином, для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ ми побудували обмежений розв'язок x_m^h рівняння (2) при $mh \geq t_0$, причому h не залежить від t_0. Побудуємо тепер обмежений на всій осі розв'язок x_m^h рівняння (2). З викладеного вище випливає, що всі розв'язки різницевого рівняння, які починаються в δ-околі розв'язку $x(t)$, не виходять з його 2ε-околу, а через k_0 кроків знову опиняються в його δ-околі. Тому обмежені розв'язки x_m^h різницевого рівняння, що в момент $-k_0$ починаються в δ-околі точки $x(-k_0 h)$, при $m = 0$ знову опиняються в δ-околі точки $x(0)$.

Аналогічно можна показати, що всі обмежені розв'язки системи (2), які при $-k_0 n$ починаються в δ-околі точки $x(-k_0 nh)$, не виходять з 2ε-околу розв'язку $x(t)$, а при $m = -k_0(n-1)$ опиняються в δ-околі точки $x(-k_0(n-1)h)$.

Позначимо через $\mathbb{S}_n$ множину значень розв'язків системи (2) в точці $m = 0$, які при $m = -k_0 n$ належать δ-околу точки $x(-k_0 nh)$. На підставі викладеного вище ця множина не є порожньою для довільного натурального n і при цьому $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_{n-1}$. За своєю побудовою множини $\mathbb{S}_n$ складаються з образів розв'язків рівняння (2), що починаються в точках $m = -k_0 n$. Відображення, що породжує $\mathbb{S}_n$, є неперервним на підставі леми 2, а тому $\mathbb{S}_n$ замкнені (як образи замкнених множин при неперервному відображенні).

Нехай z_0 — спільна для всіх $\mathbb{S}_n$ точка. Розглянемо тепер розв'язок різницевого рівняння $x_m^h(z_0)$, який при $m = 0$ виходить з точки z_0. Даний розв'язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і в точках $-k_0 n$ належить δ-околу точки $x(-k_0 nh)$ для довільного натурального n, де $x(t)$ — обмежений розв'язок системи (1), що фігурує в теоремі. Тому він необмежено продовжуваний вліво і належить 2ε-околу розв'язку $x(t)$, а отже, є обмеженим. Його продовжуваність вправо і обмеженість є очевидними. Таким чином, першу частину теореми доведено.

З доведення теореми випливає, що нерівність (11) виконується при всіх $h_1 < h$, вибраного з цієї нерівності, тому система (2) при таких h_1 має обмежений розв'язок, що не виходить з 2ε-околу розв'язку $x(t)$. Внаслідок довільності ε звідси випливає справедливість формули (7).

Теорему доведено.

Далі розглянемо питання про відповідність між періодичними розв'язками рівнянь (1) та (2). Будемо вважати, що функція $X(t,x)$ є періодичною по t з періодом ω, тобто $X(t+\omega, x) = X(t,x)$. Виберемо крок $h = \omega/n$ (n — натуральне число).

Теорема 2. *Якщо система* (2) *для достатньо малого кроку* h ($n \geq N_0$) *має рівномірно по* k_0 *і* h *асимптотично стійкий періодичний розв'язок* x_k^h, *що належить* D *разом із деяким* ρ*-околом, то система* (1) *має також періодичний розв'язок періоду, кратного* ω.

Доведення. За умовою теореми маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left(\varepsilon < \frac{\rho}{2}\right) \quad \exists \delta > 0 \quad (\delta < \varepsilon) \quad \exists n_0(\delta) \in \mathbb{N},$$

що якщо $\left| x_{k_0}^h - y_{k_0}^h \right| < \delta$, то

$$\left| x_k^h - y_k^h \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad k \geq k_0 \tag{14}$$

і

$$\left| x_k^h - y_k^h \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad k \geq n_0 + k_0. \tag{15}$$

При цьому δ не залежить ні від k_0, ні від h.

За заданими $\delta > 0$ і n_0 виберемо крок

$$h_0 = h_0(\delta, n_0) = \frac{\omega}{m_0}$$

такий, що якщо $y_k^{h_0}$ — розв'язок різницевого рівняння, а $\varphi(t)$ — розв'язок диференціального рівняння, такий, що $\varphi(kh_0) = y_k^{h_0}$, то виконується нерівність

$$\left| \varphi(ih_0) - y_i^{h_0} \right| < \frac{\delta}{2}, \qquad i \in [k, k+n_0]. \tag{16}$$

На підставі леми 1 такий вибір h_0 є можливим. За умовами теореми при такому h_0 система (2) має періодичний асимптотично стійкий розв'язок $x_k^{h_0}$ періоду $p(h_0)$.

Тепер розглянемо $U_\delta(x_0^{h_0})$ — δ-окіл точки $x_0^{h_0}$. Нехай y_0 — довільна точка з $U_\delta(x_0^{h_0})$, $\varphi(t, y_0)$ — розв'язок системи (1) такий, що $\varphi(0, y_0) = y_0$, $y_k^{h_0}$ — розв'язок системи (2) такий, що $y_0^{h_0} = y_0$.

Тоді із співвідношень (14), (15) маємо

$$\left| y_k^{h_0} - x_k^{h_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in [0, n_0],$$

$$\left| y_{n_0}^{h_0} - x_{n_0}^{h_0} \right| < \frac{\delta}{2},$$

а тому

$$\left| x_k^{h_0} - \varphi(kh_0, y_0) \right| < \varepsilon, \quad k \in [0, n_0],$$

$$\left| x_{n_0}^{h_0} - \varphi(n_0 h_0, y_0) \right| < \delta.$$

Отже, розв'язок $\varphi(t)$ системи (1), що починається в δ-околі $x_0^{h_0}$, не виходячи у вузлових точках kh_0 $(k \in [0, n_0])$ з ε-околу розв'язку $x_k^{h_0}$ системи (2), в момент $n_0 h_0$ знову опиняється в його δ-околі при умові, що розв'язок $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, n_0 h_0]$. Покажемо, що цього можна досягти вибором достатньо малого кроку h.

Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб точки з ε-околу періодичного розв'язку x_k^h системи (2) належали області D разом з $(\rho/2)$-околом. На підставі умов теореми такий вибір є можливим. Тому розв'язки системи (1), що починаються в такому $(\rho/2)$-околі, продовжуються вліво і вправо на інтервал довжини, не меншої ніж $\rho/(2C)$. Виберемо тепер крок h_0 так, щоб виконувались нерівності (16) і $h_0 < \rho/(2C)$. Отже, на підставі викладеного $h_0 = \omega/m_0$, де m_0 — деяке натуральне число.

Тоді розв'язок $\varphi(t)$, що починається в δ-околі $x_0^{h_0}$, продовжується на інтервал $[0, \rho/(2C)]$, а в точці $t = h_0$ виконується нерівність

$$\left|\varphi(h_0) - y_1^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2},$$

де $y_k^{h_0}$ — вказаний вище розв'язок системи (2). Отже, точка $\varphi(h_0)$ належить області D разом з $(\rho/2)$-околом, а тому розв'язок $\varphi(t)$ продовжується до точки $2h_0$, і $\varphi(2h_0)$ також належить D разом з $(\rho/2)$-околом. Продовжуючи цей процес, переконуємося, що $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, n_0 h_0]$.

Позначимо через $\hat{y}_k^h$ такий розв'язок системи (2), що в момент n_0 його початкові дані збігаються з початковими даними розв'язку $\varphi(t)$: $\varphi\left(\dfrac{n_0\omega}{m_0}\right) = \hat{y}_{n_0}^{h_0}$.

Аналогічно попереднім міркуванням отримуємо

$$\left|\hat{y}_k^{h_0} - x_k^{h_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in [n_0, 2n_0],$$

$$\left|\hat{y}_{2n_0}^{h_0} - x_{2n_0}^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2}$$

та

$$\left|x_k^{h_0} - \varphi(kh_0)\right| < \varepsilon, \quad k \in [n_0, 2n_0],$$

$$\left|x_{2n_0}^{h_0} - \varphi(2n_0 h_0)\right| < \delta.$$

Продовжуючи цей процес, на M-кроці, де M — найменше спільне кратне чисел m_0, n_0, p, одержуємо

$$\left|x_M^{h_0} - \varphi(Mh_0)\right| < \delta.$$

При цьому $Mh_0 := M^0 = r\omega$ і є кратним ω. Звідси випливає

$$\left|x_M^{h_0} - \varphi(r\omega)\right| < \delta.$$

Але $x_M^{h_0} = x_0^{h_0}$, тому відображення $\pi: y_0 \to \varphi(r\omega, y_0)$ кулю радіуса δ переводить в себе, отже, існує $y_1 \in U_\delta(x_0^{h_0})$ — нерухома точка відображення така, що $\varphi(r\omega, y_1) = y_1$. Останнє означає, що розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $\varphi(0) = y_1$ є періодичним з періодом $r\omega$.

Теорему доведено.

Наступний результат визначає умови збіжності періодичних розв'язків системи (2) до періодичного розв'язку системи (1).

Теорема 3. *Якщо при виконанні умов теореми* 2 *система* (1) *має єдиний періодичний розв'язок* $\varphi(t)$ *періоду* $s\omega$ (s — *ціле*), *то має місце співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\le n}\left|x_m^h\left(\frac{ms\omega}{n}\right)-\varphi\left(\frac{ms\omega}{n}\right)\right| = 0, \tag{17}$$

де x_m^h — *періодичний розв'язок системи* (2), $h = s\omega/n$ — *крок.*

Доведення. Для встановлення справедливості співвідношення (17) достатньо показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує h_0 (існує n_0 : $h_0 = s\omega/n_0$) таке, що якщо $h < h_0$ $(n > n_0)$, то виконується нерівність

$$\left|\varphi\left(\frac{s\omega}{n}k\right)-x_k^h\left(\frac{s\omega}{n}k\right)\right| < \varepsilon, \quad k \le n. \tag{18}$$

Згідно з попередньою теоремою система (2) для всіх достатньо малих h має періодичний розв'язок, причому для вказаного вище $\varepsilon > 0$ існують $\delta > 0$ і $h_0 = h_0(\delta)$ такі, що при $h < h_0$ в δ-околі x_0^h, де x_k^h — періодичний розв'язок системи (2), починається деякий періодичний розв'язок $\varphi(t)$ системи (1), який у вузлових точках відрізняється від відповідного періодичного розв'язку x_k^h не більше, ніж на ε, при всіх $h < h_0$. Звідси на підставі єдиності періодичного розв'язку $\varphi(t)$ системи (1) випливає виконання нерівності (18), а відтак і доведення теореми.

1. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / Под ред. Ю. А. Митропольского. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
2. *Карасик Г. Я.* О сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным // Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки. – 1958. – № 4. – С. 43–46.
3. *Скалкина М. А.* О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**, вып. 3. – С. 93–98.
4. *Ateiwi A. M.* To the problem on periodic solutions of one class of systems of difference equations // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 309–314.
5. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

Одержано 08.06.2004