УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СВОЙСТВА ПОТОКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С ОТРАЖЕНИЕМ*

We consider properties of a random set $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$, where $\varphi_t(x)$ is a solution of a stochastic differential equation in $\mathbb{R}_+^d$ with normal reflection on the boundary starting at the point x. We perform the characterization of inner and boundary points of the set $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$. We prove that the Hausdorff dimension of the boundary $\partial\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$ is not greater than $d-1$.

Розглядаються властивості випадкової множини $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$, де $\varphi_t(x)$ — розв'язок стохастичного диференціального рівняння в $\mathbb{R}_+^d$ з нормальним відбиттям від межі, що стартує з точки x. Проведено характеризацію внутрішніх та граничних точок множини $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$. Доведено, що розмірність Хаусдорфа межі $\partial\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$ не перевищує $d-1$.

Пусть $\varphi_t(x)$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty)$, — решение следующего стохастического уравнения с нормальным отражением от границы [1]:

$$d\varphi_t(x) = a_0(\varphi_t(x))\,dt + \sum_{k=1}^m a_k(\varphi_t(x))\,dw_k(t) + \bar{n}\xi(dt, x), \qquad t \in [0, T],$$

$$\varphi_0(x) = x, \qquad \xi(0, x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+^d, \tag{1}$$

где $a_k\colon \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}^d$, $k = 0, \ldots, m$, $\{w_k(t),\ k = 1, \ldots, m\}$ — независимые винеровские процессы, $\bar{n} = (0, \ldots, 0, 1)$ — нормаль к гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, $\xi(t, x)$ — неубывающий по t процесс для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}_+^d$, причем

$$\xi(t, x) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}}\,\xi(ds, x),$$

т. е. $\xi(t, x)$ возрастает только в те моменты времени, когда $\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

Предположим, что функции a_k, $k = 0, \ldots, m$, удовлетворяют условию Липшица. Несложно проверить, что в этом случае существует единственное сильное решение уравнения (1), причем $(\varphi_t(x), \xi(t, x))$ имеет непрерывную по паре аргументов (t, x) модификацию (см., например, [2]). Далее будем считать, что в качестве (φ, ξ) уже взята эта модификация.

Рассмотрим случайное множество $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$, которое занимают в момент времени t образы точек пространства $\mathbb{R}_+^d$ при действии случайного отображения $\varphi_t(\cdot, \omega)\colon \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}_+^d$.

Целью статьи является характеризация начальных значений из $\mathbb{R}_+^d$, которые попадают во внутренность или на границу множества $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$. Основной результат содержится в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Для почти всех* ω *и всех* $t \in [0, T]$ *размерность Хаусдорфа множества* $\partial\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$ *— границы множества* $\varphi_t\left(\mathbb{R}_+^d\right)$ *— не превышает* $d-1$.

---

* Выполнена при поддержке Министерства науки и образования Украины (проект GP/F8/0086).

Более того, для любого $R > 0$ *мера Хаусдорфа* H^{d-1} *множества* $\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+) \cap \{x \in \mathbb{R}^d_+ : \|x\| \le R\}$ *конечна.*

***Замечание* 1.** Легко видеть, что если множество $\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$ содержит внутренние точки, то $\dim \partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$ не меньше $d-1$ — размерности проекции этого множества на $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, т. е. в этом случае

$$\dim \partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+) = d-1.$$

***Замечание* 2.** В конце статьи будет приведен пример, когда с положительной вероятностью имеет место строгое неравенство

$$\dim \partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+) < d-1.$$

Теорема 2. *Для почти всех* ω *и всех* $t \in [0, T]$ *имеет место равенство случайных множеств*

$$\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+) = \varphi_t(\partial\mathbb{R}^d_+) = \varphi_t\{x \in \mathbb{R}^d_+ : \tau(x) \le t\},$$

где $\tau(x) = \inf\{s \ge 0 : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}$ *— момент попадания решения, стартующего из* x, *на гиперплоскость* $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

***Доказательство теоремы* 1.** В работе [2] были установлены следующие свойства $\varphi_t(x)$.

Теорема 3. *Существует множество* Ω_0 *вероятности* 1 *такое, что для всех* $\omega \in \Omega_0$ *выполняется следующее*:

1) *для любых* $x, y \in \mathbb{R}^d_+$, $x \ne y$, *и* $t < \max\{\tau(x), \tau(y)\}$ *имеет место неравенство*

$$\varphi_t(x) \ne \varphi_t(y);$$

2) *для любых* $x \in \mathbb{R}^d_+$ *и* $\omega \in \Omega_0$ *таких, что* $\tau(x, \omega) < \infty$, *найдется* $y = y(x, \omega) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ *такое, что*

$$\varphi_{\tau(x)}(x) = \varphi_{\tau(x)}(y),$$

причем $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$ *при* $t \ge \tau(x)$;

3) *отображение* $\varphi_t : \{x \in \mathbb{R}^d_+ : t < \tau(x)\} \to \mathbb{R}^d$ *является локальным гомеоморфизмом*;

4) $$P\left(\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in \mathbb{R}^d_+}} \inf_{t \in [0, T]} \|\varphi_t(x)\| = \infty\right) = 1.$$

Из данной теоремы следует, что множество $\{\varphi_t(x) : \tau(x) > t\}$ открыто, а множество $\{\varphi_t(x) : \tau(x) \le t\}$ содержится в $\varphi_t(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$. Поэтому $\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+) \subset \varphi_t(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$, и для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что для любого $R > 0$ имеет место неравенство (см. п. 4 теоремы 3):

$$H^{d-1}\Big(\varphi_t\big(\{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x\| \le R\} \times \{0\}\big)\Big) < \infty.$$

Нам потребуется следующее утверждение [3].

Теорема 4. *Предположим, что отображение* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \le m$, *принадлежит соболевскому пространству* $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}$ *для некоторого* $p > n$. *Пусть* $U \subset \subset \mathbb{R}^n$ — *произвольное ограниченное множество. Тогда* $H^n\big(f(U)\big) < \infty$, *где* H^n — *n-мерная мера Хаусдорфа в* $\mathbb{R}^m$.

***Замечание* 3.** Из теорем вложения Соболева следует существование непрерывной модификации функции f. Именно эта модификация рассматривается в теореме 4.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно проверить, что отображение

$$\mathbb{R}^{d-1} \ni \bar{u} \to \varphi_t((\bar{u}, 0)) \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

принадлежит пространству $\bigcap\limits_{p>1} W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$.

***Замечание* 4.** В статье используются некоторые идеи из гл. 4 [4], где доказано, что решение стохастического уравнения (без отражения) с липшицевыми коэффициентами в $\mathbb{R}^d$ дифференцируемо по начальным данным почти наверное относительно меры Лебега. В частности, отсюда следует, что отображение

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d_+ : t < \tau(x) \right\} \ni x \to \varphi_t(x) \in \mathbb{R}^d$$

принадлежит $\bigcap\limits_{p>1} W^1_{p,\,\mathrm{loc}}\Big(\left\{ x \in \mathbb{R}^d_+ : t < \tau(x) \right\}, \mathbb{R}^d\Big)$. Однако (2) не следует непосредственно из [4].

Рассмотрим аппроксимирующую последовательность процессов $\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)$, $\varepsilon > 0$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$d\varphi_t^{(\varepsilon)}(x) = \Big(a_0\big(\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)\big) + g_\varepsilon\big(\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)\big)\Big)dt + \sum_{k=1}^{m} a_k\big(\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)\big)dw_k(t), \qquad t \ge 0,$$

$$\varphi_0^{(\varepsilon)}(x) = x,$$

где $g_\varepsilon(x) = \left(0, \ldots, 0, \dfrac{\psi(x_d/\varepsilon)}{x_d^2}\right)$, $\psi \in C^\infty((0, \infty))$, $\psi(y) = 0$ при $y \ge 2$, $\psi(y) = 1$ при $y \le 1$, ψ монотонно не возрастает.

Несложно проверить, что

$$\mathrm{P}\Big(\exists t \ge 0 \;\; \exists x \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty) \colon \varphi_t^{(\varepsilon)}(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\Big) = 0.$$

Лемма 1. *Для любых* $x \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$, $p > 1$ *и* $T > 0$ *имеет место сходимость*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mathrm{E} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \varphi_t^{(\varepsilon)}(x) - \varphi_t(x) \right\|^p = 0. \tag{3}$$

***Замечание* 5.** Введение функции типа g_ε и доказательство сходимости $\varphi_t^{(\varepsilon)} \to \varphi_t$, $\varepsilon \to 0$, называется методом штрафов (см., например, [5, 6]). Мы приведем, однако, доказательство соответствующего утверждения, так как предположения леммы 1 несколько отличаются от условий указанных работ.

***Доказательство леммы* 1.** Докажем для любого x слабую сходимость распределений процессов $\varphi_\cdot^{(\varepsilon)}(x)$ к распределению $\varphi_\cdot(x)$ в пространстве $C\big([0, T], \mathbb{R}^d\big)$.

Пусть $\tilde{h} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ — монотонная функция, такая, что $\tilde{h}(x) = 0$ при $x \le 1/2$ и $\tilde{h}(x) = x$ при $x \ge 1$. Определим функцию $h_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, где $\delta > 0$, следующим образом:

$$h_\delta(x_1, \ldots, x_d) = \left(x_1, \ldots, x_{d-1}, \tilde{h}\left(\frac{x_d}{\delta}\right)\right).$$

Обозначим $B_r := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty) : \| x \| \le r \right\}$.

Доказательство следующей леммы имеет стандартный характер и поэтому не приводится.

Лемма 2.

1) $\forall\, p > 1 \;\; \forall\, r > 0$:

$$\sup_{x \in B_r} \left(\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \varphi_t^{(\varepsilon)}(x) \right\|^p + \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \| \varphi_t(x) \|^p \right) < \infty; \tag{4}$$

2) $\forall\, x \in B_r \;\; \forall\, p > 1 \;\; \forall\, \delta \in (0, 1]$:

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \delta/2]} \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| h_\delta\left(\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)\right) \right\|^p < \infty; \tag{5}$$

3) $\forall\, x \in B_r \;\; \forall\, p > 1 \;\; \forall\, \delta \in (0, 1] \;\; \exists\, c > 0 \;\; \forall\, \varepsilon \in (0, \delta/2] \;\; \forall\, s, t \in [0, T]$:

$$\mathrm{E} \left\| h_\delta\left(\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)\right) - h_\delta\left(\varphi_s^{(\varepsilon)}(x)\right) \right\|^p \le c |t - s|^{p/2}. \tag{6}$$

Пусть x фиксировано. Далее будем обозначать φ_t, $\varphi_t^{(\varepsilon)}$ вместо $\varphi_t(x)$, $\varphi_t^{(\varepsilon)}(x)$.

Из теоремы 12. 2 [7] и (5), (6) следует, что для любого фиксированного $\delta > 0$ распределение процессов $\left\{ h_\delta\left(\varphi_\cdot^{(\varepsilon)}\right) \right\}_{\varepsilon \in (0, \delta/2]}$ слабо относительно компактно. Поэтому

$$\forall\, \alpha > 0 \;\; \exists\, c > 0 \;\; \forall\, \varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right] : \sup_{\varepsilon \in (0, \delta/2]} \mathrm{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} \left\| h_\delta\left(\varphi_t^{(\varepsilon)}\right) \right\| \ge c \right) \le \alpha$$

и

$$\forall\, \alpha > 0 \;\; \forall\, \beta > 0 \;\; \exists\, \eta > 0 \;\; \forall\, \varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right] :$$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{|s-t| < \eta} \left\| h_\delta\left(\varphi_t^{(\varepsilon)}\right) - h_\delta\left(\varphi_s^{(\varepsilon)}\right) \right\| \ge \beta \right) \le \alpha.$$

Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \delta/2]} \mathrm{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} \left\| \varphi_t^{(\varepsilon)} \right\| \ge c + \delta \right) \le \alpha,$$

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \delta/2]} \mathrm{P}\left(\sup_{|s-t| < \eta} \left\| \varphi_t^{(\varepsilon)} - \varphi_s^{(\varepsilon)} \right\| \ge \beta + \delta \right) \le \alpha.$$

Из произвольности выбора α, β, δ и теоремы 8. 2 [7] следует слабая относительная компактность распределений последовательности $\left\{ \varphi^{\varepsilon} \right\}_{\varepsilon > 0}$.

Пусть $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, — такая последовательность, что $\left\{ \varphi^{\varepsilon_k} \right\}$ слабо сходится при $k \to \infty$. Из оценки (5) и липшицевости функций $a_0, \ldots, a_m$ следует также слабая относительная компактность распределений процессов

$$\alpha_t^k := \int_0^t a_0\left(\varphi_s^{\varepsilon_k}\right) ds, \qquad \beta_t^k := \sum_{j=1}^m \int_0^t a_j\left(\varphi_s^{\varepsilon_k}\right) dw_j(s),$$

а следовательно, и

$$\xi_t^k := \left(\varphi_t^{(\varepsilon_k)} - \alpha_t^k - \beta_t^k, \bar{n}\right).$$

Без потери общности можно считать, что распределения процессов $\varphi_\cdot^{\varepsilon_k}$, $\alpha_\cdot^k$, $\beta_\cdot^k$, $\xi_\cdot^k$ слабо сходятся.

Из теоремы Скорохода (см., например, [8]) следует существование единого вероятностного пространства и последовательности случайных процессов

$$\tilde{\zeta}^k = \left(\tilde{\varphi}^{\varepsilon_k}, \tilde{\alpha}^k, \tilde{\beta}^k, \tilde{\xi}^k, w_1^k, \ldots, w_m^k, \overline{\varphi}^k, \overline{\xi}^k\right)$$

такой, что:

а) совместное распределение $\left(\tilde{\varphi}^{(\varepsilon_k)}, \ldots, \overline{\xi}^{(k)}\right)$ совпадает с совместным распределением процессов $\left(\varphi^{(\varepsilon_k)}, \alpha^k, \beta^k, \xi^k, w_1, \ldots, w_m, \varphi, \xi\right)$;

б) $\tilde{\zeta}^k$ сходится (в пространстве непрерывных функций) почти наверное к некоторому предельному процессу $\tilde{\zeta}^0 = \left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\alpha}^0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\xi}^0, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_m, \overline{\varphi}^0, \overline{\xi}^0\right)$.

Аналогично теореме 1 [1] (гл. 5, § 2) можно проверить, что

$$\tilde{\varphi}_t^0 = x + \int_0^t a_0\left(\tilde{\varphi}_t^0\right) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k\left(\tilde{\varphi}_s^0\right) d\tilde{w}_k(s) + \bar{n}\,\tilde{\xi}_t^0. \tag{7}$$

При этом $\tilde{\xi}_t^0$ — неубывающий процесс как предел неубывающих процессов. Несложно также заметить, что

$$\int_0^t 1\!\!1_{\left\{\tilde{\varphi}_s^0 \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\right\}} d\tilde{\xi}_s^0 = \tilde{\xi}_t^0, \qquad t \geq 0.$$

Таким образом, пара $\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\xi}^0\right)$ является решением стохастического уравнения (7) с нормальным отражением. Из единственности решения следует, что $\tilde{\varphi}^0 = \overline{\varphi}^0$, $\tilde{\xi}^0 = \overline{\xi}^0$. Из (4) и сходимости $\tilde{\varphi}^{(\varepsilon_k)} \to \tilde{\varphi}^0 (= \overline{\varphi}^0)$, $\overline{\varphi}^{(\varepsilon_k)} \to \overline{\varphi}^0$ при $k \to \infty$ следует, что

$$\forall\, p > 1 \quad \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \tilde{\varphi}_t^{(\varepsilon_k)} - \overline{\varphi}_t^0 \right\|^p \to 0, \qquad k \to \infty,$$

$$\forall\, p > 1 \quad \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \overline{\varphi}_t^k - \overline{\varphi}_t^0 \right\|^p \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Поэтому

$$\mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \varphi_t^{(\varepsilon_k)} - \varphi_t \right\|^p = \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \tilde{\varphi}_t^{(\varepsilon_k)} - \overline{\varphi}_t^k \right\|^p \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left(\left\| \tilde{\varphi}_t^{(\varepsilon_k)} - \overline{\varphi}_t^0 \right\|^p + \left\| \tilde{\varphi}_t^k - \overline{\varphi}_t^0 \right\|^p \right) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Из произвольности выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}$ следует (3).

Лемма 1 доказана.

Пусть $\left\{a_k^{(\varepsilon)}\right\}_{\varepsilon>0,\, k=\overline{1,m}}$ — такая последовательность функций, что:

1) $a_k^{(\varepsilon)} \in C^\infty\left(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}^d\right)$, $\varepsilon > 0$, $k = \overline{0, m}$;

2) $a_k^{(\varepsilon)}$ равномерно сходится к a_k при $\varepsilon \to 0+$;

3) $\left\{a_k^{(\varepsilon)}\right\}$ удовлетворяет условию Липшица равномерно по $\varepsilon > 0$, $k = \overline{0, m}$:

$$\exists\, L \quad \forall\, x_1, x_2: \left\| a_k^{(\varepsilon)}(x_1) - a_k^{(\varepsilon)}(x_2) \right\| \;\le\; L\| x_1 - x_2 \|. \tag{8}$$

Применяя леммы 1 и 2, рассуждения, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 8 [1] (гл. 4, § 1), и диагональный метод Кантора, выбираем такие последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_k\}$, что

$$\forall\, R > 0 \;\; \forall\, p > 1 \;\; \forall\, \xi \in B_R: \; \lim_{k\to\infty} \mathrm{E} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \hat\varphi_t^k(x) - \varphi_t(x) \right\|^p \;=\; 0, \tag{9}$$

$$\sup_{x\in B_R} \mathrm{E} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \hat\varphi_t^k(x) \right\|^p \;<\; \infty, \tag{10}$$

где $\hat\varphi_t^k$ — решение уравнения

$$d\hat\varphi_t^k(x) \;=\; \left(a_0^{(\varepsilon_k)}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right) + g_{\delta_k}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right)\right)dt \;+\; \sum_{k=1}^m a_k^{(\varepsilon_k)}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right)dw_k(t), \qquad t \;\ge\; 0,$$

$$\hat\varphi_0^k(x) \;=\; x.$$

Случайный процесс $\hat\varphi_t^k(x)$ имеет модификацию, непрерывно дифференцируемую по x [9] (далее рассматриваем только эту модификацию), при этом производная $y_t^k(x) := \dfrac{\partial\hat\varphi_t^k(x)}{\partial x}$ удовлетворяет уравнению

$$d y_t^k(x) \;=\; \left(\nabla a_0^{(\varepsilon)}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right) + \nabla g_{\delta_k}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right)\right) y_t^k(x)\,dt \;+$$

$$+\; \sum_{k=1}^m \nabla a_k^{(\varepsilon)}\left(\hat\varphi_t^k(x)\right) y_t^k(x)\,dw_k(t),$$

$$y_0^k(x) \;=\; \mathbb{1},$$

где $\mathbb{1}$ — единичная $(d\times d)$-матрица.

Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ соответственно скалярное произведение и норму Гильберта – Шмидта на пространстве $(d\times d)$-матриц. Из того, что $\psi'(x) \le 0$ при $x > 0$ (см. определение функции g), следует, что

$$\left\langle \nabla g_\delta(x)y, y \right\rangle \;\le\; 0 \tag{11}$$

для любого $x \in \mathbb{R}_+^d$ и любой матрицы y. Используя (11), несложно проверить, что

$$\forall\, p > 1 \quad \exists\, c \;=\; c(p, L) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^d \quad \forall\, t \in [0, T] \quad \forall\, \varepsilon > 0:$$

$$\mathrm{E} \sup_{s\in[0,t]} \left\| y_s^k(x) \right\|^p \;\le\; d^{p/2} \;+\; c\int_0^t \mathrm{E} \sup_{z\in[0,s]} \left\| y_z^k(x) \right\|^p dz,$$

где L — константа Липшица из (8).

Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon>0}\sup_{x\in\mathbb{R}_+^d}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\nabla\hat{\varphi}_t^k(x)\right\|^p < \infty. \tag{12}$$

Нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $U\subset\mathbb{R}^k$ *— ограниченное открытое множество. Допустим, что последовательность измеримых случайных полей* $\left\{\xi_t^n(x)\right\}_{n\geq 1}$, $x\in U$, $t\in[0,T]$, *удовлетворяет условиям*:

1) *для любого* $n\geq 1$ *случайный процесс* $\xi_t^n(\cdot)$, $t\in[0,T]$, *принимает значения в* $W_p^1(U,\mathbb{R}^d)$ *и имеет непрерывные траектории* (*в* W_p^1);

2) $\sup\limits_{n\geq 1}\mathrm{E}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\xi_t^n\right\|_{W_p^1} > \infty$;

3) *существует случайное поле* $\xi_t(x)$, $t\in[0,T]$, $x\in U$, *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_U\left\|\xi_t^n(x)-\xi_t(x)\right\|^p dx = 0.$$

Тогда процесс ξ_t *принимает значения в* $W_p^1(U,\mathbb{R}^d)$, *причем* $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\xi_t\|_{W_p^1}$ *является измеримым относительно пополнения исходной* σ*-алгебры множествами нулевой меры и*

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t\|_{W_p^1} \leq \sup_n\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\xi_t^n\right\|_{W_p^1}.$$

Доказательство. Заметим, что последовательность $\left\{\nabla\xi_\cdot^n(\cdot)\right\}_{n\geq 1}$ ограничена в пространстве $L_p(\Omega\times U\times[0,T], dP\times dx\times dt)$ и, следовательно, слабо компактна. Согласно теореме Банаха – Сакса [10], существует последовательность выпуклых линейных комбинаций $\eta^n=\sum_{j=1}^n c_{n,j}\xi^j$ такая, что $\nabla\eta^n$ сходится в L_p к некоторому случайному элементу g. Без потери общности можно считать, что для почти всех $t\in[0,T]$ (относительно меры Лебега) и почти всех $\omega\in\Omega$ имеет место сходимость

$$\eta_t^n(\cdot,\omega)\to\xi_t(\cdot,\omega) \quad \text{в} \quad L_p(U,\mathbb{R}^d),$$

$$\nabla\eta_t^n(\cdot,\omega)\to g_t(\cdot,\omega) \quad \text{в} \quad L_p(U,\mathbb{R}^{d\times k}).$$

Следовательно, для этих t, ω

$$\xi_t(\cdot,\omega)\in W_p^1(U,\mathbb{R}^d), \qquad \nabla\xi_t(\cdot,\omega) = g_t(\cdot,\omega)$$

и

$$\|\xi_t(\cdot,\omega)\|_{W_p^1} = \lim_{n\to\infty}\left\|\eta_t^n(\cdot,\omega)\right\|_{W_p^1}.$$

Пусть $\Theta\subset[0,T]$, $\Omega_0\subset\Omega$ — соответствующие множества полной меры, $\tilde{\Theta}\subset\Theta$ — счетное плотное подмножество. Тогда согласно лемме Фату

$$\mathrm{E}\sup_{t\in\tilde{\Theta}}\|\xi_t\|_{W_p^1} \leq \varliminf_{n\to\infty}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\eta_t^n\right\|_{W_p^1} \leq \sup_{n\geq 1}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\xi_t^n\right\|_{W_p^1}.$$

Поскольку множество $\tilde{\Theta}$ плотно в $[0,T]$ и процесс ξ_t, $t\in[0,T]$, имеет непрерывные траектории в L_p (см. условия 1, 3 леммы), с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, легко установить, что для всех ω из некоторого множества Ω_1, $P(\Omega_1) = 1$, и всех $t \in [0, T]$ имеет место включение $\xi_t(\cdot, \omega) \in W_p^1(U, \mathbb{R}^d)$, причем

$$\|\xi_t(\cdot, \omega)\|_{W_p^1} \leq \sup_{s \in \tilde{\Theta}} \|\xi_s(\cdot, \omega)\|_{W_p^1}.$$

Отсюда следует равенство $\sup_{t \in \tilde{\Theta}} \|\xi_t\|_{W_p^1} = \sup_{t \in [0, T]} \|\xi_t\|_{W_p^1}$ п. н., и, следовательно, доказательство леммы 3.

Пусть $R > 0$, $p > 1$. Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ обозначим $\tilde{x} := (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Пусть $U_R = \left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1} : \|\tilde{x}\| < R\right\}$. Из (9), (10), (12) и леммы 3 следует, что для любого фиксированного $x_d > 0$ отображение

$$\mathbb{R}^{d-1} \supset U_R \ni \tilde{x} \mapsto \varphi_t(\tilde{x}, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

является элементом соболевского пространства $W_p^1(U_R, \mathbb{R}^d)$ для почти всех ω и всех $t \in [0, T]$, причем

$$\sup_{x_d \in (0,1]} \mathrm{E} \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi_t(\cdot, x_d)\|_{W_p^1(U_R, \mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Как уже упоминалось в начале статьи, $\varphi_t(x)$ с вероятностью 1 непрерывен по x, поэтому из (4) имеем сходимость

$$\int_{U_R} \|\varphi_t(\tilde{x}, x_d) - \varphi_t(\tilde{x}, 0)\|^p d\tilde{x} \to 0, \qquad x_d \to 0+.$$

Применяя лемму 3 еще раз, получаем

$$\forall R > 0 : \mathrm{E} \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi_t(\cdot, 0)\|_{W_p^1(U_R, \mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Используя теоремы 3, 4, получаем доказательство теоремы 1.

***Замечание* 6.** Аналогично доказательству теоремы 1 несложно проверить, что отображение $\mathbb{R}_+^d \ni x \mapsto \varphi_t(x) \in \mathbb{R}^d$ принадлежит пространствам Соболева $W_p^1(\mathbb{R}_+^d)$, $p > 1$, для всех $t \geq 0$ с вероятностью 1.

***Доказательство теоремы* 2.** Продолжим функции $a_k \colon \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}^d$, $k = 0, \ldots, m$, до липшицевых отображений, определенных на всем $\mathbb{R}^d$:

$$\tilde{a}_k(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) := \begin{cases} a_k(x_1, \ldots, x_d), & x_d \geq 0, \\ a_k(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0), & x_d < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее стохастическое уравнение в $\mathbb{R}^d$:

$$d\tilde{\varphi}_t(x) = \tilde{a}_0(\tilde{\varphi}_t(x))dt + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_k(\tilde{\varphi}_t(x))dw_k(t), \qquad t \geq s,$$
$$\tilde{\varphi}_0(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Случайный процесс $\tilde{\varphi}$ имеет модификацию [9], непрерывную по (t, x), причем для любых $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$:

отображение $\tilde{\varphi}_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *является гомеоморфизмом.* (14)

Эта модификация и будет рассматриваться далее.

Из единственности решений (1) и (13) и непрерывности по (s, t, x) следует существование множества Ω_0 полной меры такого, что

$$\forall\, t \geq 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d_+, \ \ \tau(x) > t: \varphi_t(x, \omega) = \tilde{\varphi}_t(x, \omega), \tag{15}$$

где $\tau(x) = \inf\left\{ s \geq 0 : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \right\}$.

Пусть Ω_1 — множество полной меры из теоремы 1 такое, что

$$\forall\, \omega \in \Omega_1 \quad \forall\, t \geq 0: \dim \varphi_t\left(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}, \omega\right) \leq d - 1.$$

Как было отмечено в начале доказательства теоремы 1, граница $\partial\varphi_t\left(\mathbb{R}^d_+\right)$ содержится в множестве $\varphi_t\left(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\right)$. Предположим противное к утверждению теоремы 2. Тогда найдутся $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ и $x \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ такие, что точка $\varphi_t(x, \omega)$ является внутренней точкой множества $\varphi_t\left(\mathbb{R}^d_+, \omega\right)$.

Пусть $U \subset \varphi_t\left(\mathbb{R}^d_+\right)$ — открытое множество, содержащее $\varphi_t(x)$ (ω сейчас фиксировано). Из (14) следует, что $V = \tilde{\varphi}_t^{-1}(U)$ также открыто, причем множество $A := U \cap \tilde{\varphi}_t\left(V \cap \left(R^{d-1} \times (-\infty; 0)\right)\right)$ открыто и не пусто.

Из теоремы 3 и (15) следует, что для любого $y \in \mathbb{R}^d_+$ имеет место, по крайней мере, одно из утверждений

$$\varphi_t(y) = \tilde{\varphi}_t(y) \quad \text{или} \quad \varphi_t(y) \in \varphi_t\left(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\right).$$

Но $\tilde{\varphi}_t\left(\mathbb{R}^d_+\right) \cap \tilde{\varphi}_t\left(R^{d-1} \times (-\infty; 0)\right) = \varnothing$, поэтому $A \subset \varphi_t\left(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\right)$, что невозможно, так как $\dim A = d > d - 1 \geq \dim \varphi_t\left(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\right)$.

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

В следующем примере приведено уравнение, для которого с положительной вероятностью выполняется неравенство $\dim \varphi_t\left(\mathbb{R}^d_+\right) < d - 1$ (ср. с теоремой 1 и замечанием 1).

Пример. Пусть $d = 3$, $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3_+ : \|x\| = 1 \right\}$. Выберем множество $D \subset \mathbb{R}^2$ и биекцию $g : S \to D$ так, что:

1) D — ограниченное выпуклое множество с гладкой границей;

2) граница ∂D содержит два перпендикулярных отрезка;

3) отображения g и g^{-1} дифференцируемы бесконечное число раз и имеют ограниченные производные любого порядка.

Пусть $\psi_t(y)$, $y \in D$, — броуновское движение в D, стартующее из точки y с нормальным отражением от границы:

$$\psi_t(y) = y + w_t + \int_0^t \bar{\nu}(\psi_s(y))\eta(ds, y),$$

где $\bar{\nu}$ — внутренняя нормаль к ∂D, $\eta(t, y)$ не убывает по t при фиксированном y,

$$\eta(0, y) = 0, \qquad \int_0^t \mathbb{1}_{\{\psi_s(y) \in \partial D\}} \eta(ds, y) = \eta(t, y).$$

Рассмотрим процесс

$$\psi_t(x) = \|x\| g^{-1}\left(\psi_t\left(g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)\right). \tag{16}$$

Заметим, что

$$\forall\, r > 0 \quad \varphi_t(x) = r\varphi_t\left(\frac{x}{r}\right), \quad \|\varphi_t(x)\| = \|x\|,$$
$$\psi_t\left(g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = g\left(\frac{\varphi_t(x)}{\|\varphi_t(x)\|}\right). \tag{17}$$

Применяя формулу Ито к представлению (16), а затем используя (17), замечаем, что $\varphi_t(x)$ удовлетворяет уравнению

$$d\varphi_t(x) = h_1(\varphi_t(x))dw_t + h_2(\varphi_t(x))dt + \bar{n}\xi(x, dt),$$

$$\varphi_0(x) = x, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \xi(x, t) = \int_0^t 1\!\!1_{\{\varphi_s(x) \in \partial\mathbb{R}^d_+\}} \xi(x, ds),$$

где h_1, h_2 — некоторые липшицевы функции.

Известно, что если область D удовлетворяет сформулированным для нее условиям, то для любого $t > 0$ с положительной вероятностью имеет место равенство [11]

$$\forall\, y_1, y_2 \in D:\ \psi_t(y_1) = \psi_t(y_2),$$

т. е. с положительной вероятностью случайное отображение ψ_t переводит все точки области D в одну. Следовательно, для соответствующих исходов множество $\varphi_t\left(\mathbb{R}^d_+\right)$ является полупрямой и имеет размерность 1.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Pilipenko A. Yu.* Flows generated by stochastic equations with reflection // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2004. – **12**, № 4. – P. 389–396.
3. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. mat. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – P. 203–213.
4. *Bouleau N., Hirsch F.* Dirichlet forms and analysis on Wiener space // Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruyter, 1991. – **14**. – x + 325 p.
5. *Lions P. L., Menaldi J.-L., Sznitman A.-S.* Construction de processus de diffusion re'fle'chis par pe'nalisation du domaine // C. r. Acad. sci. Math. – 1981. – **292**, № 11. – P. 559–562.
6. *Menaldi J.-L.* Stochastic variational inequality for reflected diffusion // Indiana Univ. Math. J. – 1983. – **2**, № 5. – P. 733–744.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
8. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. – 2nd ed. – New York: Springer, 2002. – 638 p.
9. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Cambridge Stud. Adv. Math. – 1990. – 346 p.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
11. *Cranston M., Le Jan Y.* Noncoalescence for the Skorohod equation in a convex domain of R^2 // Probab. Theory Relat. Fields. – 1990. – **87**, № 2. – P. 241–252.

Получено 24.11.2004