УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, Т. В. Жигалло (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ОПЕРАТОРАМИ АБЕЛЯ – ПУАССОНА

Asymptotic equalities are obtained for upper bounds of approximations of functions on classes $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ and $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel – Poisson operators.

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж наближень функцій на класах $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ операторами Абеля – Пуассона.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. В якості наближаючих агрегатів для функцій, заданих на всій числовій осі (які є, взагалі кажучи, неперіодичними), використовуються цілі функції експоненціального типу $\leq \sigma$. Протягом останніх десятиліть О. І. Степанцем та його послідовниками [1 – 8] розвивалась теорія наближення цілими функціями, до якої входить і теорія наближення періодичних функцій.

Класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, згідно з [1, 2] або [8] (гл. IX), означаються таким чином. Нехай $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, — множина функцій $\varphi(\cdot)$, заданих на всій дійсній осі R, що мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, де при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in R}\left(\int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

і $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|$, C — множина неперервних заданих на дійсній осі функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{x\in R}|f(x)|$.

Через $\mathfrak{M}$ позначають множину опуклих донизу функцій $\psi(v)$, $v \geq 1$, для яких $\lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0, 1)$ таким чином, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0, \infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty, \tag{1}$$

позначимо через F.

Покладемо

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv,$$

де β — деяке фіксоване число.

Якщо $\psi \in F$, то, як показано в [1], для будь-якого $\beta \in R$ перетворення $\hat{\psi}(t)$ є сумовним на всій осі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)| dt < \infty.$$

Далі через $\hat{L}_\beta^\psi$ будемо позначати множину функцій $f(x) \in \hat{L}_1$, які майже для всіх $x \in R$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\hat{\psi}(t)dt, \tag{2}$$

де A_0 — деяка стала і $\varphi(\cdot) \in \hat{L}_1$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по проміжках, що симетрично розширюються.

Якщо $f(\cdot) \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина неперервних функцій із $\hat{L}_1$, то вважають, що $f(\cdot) \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\hat{L}_\beta^\psi$, $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають відповідно через $\hat{C}_\beta^\psi$, $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. У випадку, коли $\mathfrak{N}$ збігається з множиною функцій $\varphi(\cdot)$, що задовольняють умову $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(\cdot)| \leq 1$, клас $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають через $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$. Якщо ж $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\|\varphi(\cdot)\|_{\hat{1}} \leq 1$, то будемо говорити, що $f \in \hat{L}_{\beta,1}^\psi$.

У роботі [8] (гл. IX) показано, що якщо $\varphi(\cdot)$ — 2π-періодична сумовна функція, то в цьому випадку множини $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$, $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ переходять відповідно у класи $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $L_{\beta,1}^\psi$, $C_{\beta,\infty}^\psi$. Будь-яку функцію, еквівалентну до функції $\varphi(\cdot)$ із (2), як і в періодичному випадку (див., наприклад, [9] (гл. I) та [1]), називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f_\beta^\psi(\cdot)$.

Наслідуючи О. І. Степанця [7, с. 159, 160], для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ введемо характеристики

$$\eta(t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2), \qquad \mu(t) := \frac{t}{\eta(t) - t}$$

і множини

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \leq K \ \ \forall t \geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 < \mu(\psi, t) \leq K_2 \ \ \forall t \geq 1\}.$$

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$ і при цьому на проміжку $t \geq 1$ $\psi \in \mathfrak{M}_0$ або $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то будемо записувати, згідно з [8, с. 112], $\psi \in \mathfrak{A}_0$ або $\psi \in \mathfrak{A}_C$ відповідно.

У даній роботі вивчаються відхилення на класах $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$ і $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ операторів Абеля – Пуассона

$$P_\sigma(f, x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi(v)e^{-v/\sigma}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv dt, \quad \sigma \in (0, \infty).$$

Оператори $P_\sigma(f, x)$ можна розглядати як частинний випадок операторів

$$U_\sigma(f, x, \Lambda) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi(v)\lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv dt,$$

що породжуються λ-методом $U_\sigma(\Lambda)$, означеним сукупністю $\Lambda = \left\{\lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right\}$ функцій $\lambda_\sigma = e^{-v/\sigma}$ при всіх $v \geq 0$ (див. співвідношення (2) із [10]). Вважатимемо, що функції $\psi(v)$ такі, що перетворення

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)e^{-v/\sigma}\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv$$

є сумовним на всій дійсній осі.

У роботі досліджується асимптотична поведінка величин

$$\mathcal{E}(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; P_\sigma)_C = \sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \|f(x) - P_\sigma(f,x)\|_C,$$
$$\mathcal{E}(\hat{L}^\psi_{\beta,1}; P_\sigma)_{\hat{1}} = \sup_{f\in\hat{L}^\psi_{\beta,1}} \|f(x) - P_\sigma(f,x)\|_{\hat{1}} \tag{3}$$

при $\sigma \to \infty$ і $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

Наведемо деякі допоміжні означення і твердження, необхідні для подальшого розгляду.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\sigma) = \varphi(\mathfrak{N};\sigma)$ таку, що при $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; P_\sigma)_X = \varphi(\sigma) + o(\varphi(\sigma)),$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [7, с. 198], будемо говорити, що на класі $\mathfrak{N}$ для оператора Абеля – Пуассона розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського в метриці простору X.

Як зазначалося вище, класи $\hat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$ були введені О. І. Степанцем в [1, 2] (див. також [8], гл. IX). Ним же розглядалась задача про наближення функцій із класів $\hat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$ за допомогою так званих операторів Фур'є $F_\gamma(f,\cdot)$. Там же було отримано зображення на класах $\hat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$ для відхилення операторів $U_\sigma(f,x,\lambda)$ — інтегральних аналогів поліноміальних операторів, що породжуються трикутними λ-методами підсумовування рядів Фур'є. Потім за допомогою отриманих в [1, 2] методів досліджень задача типу (3) поширювалась на оператори Зигмунда, Рогозинського, Стєклова, Валле Пуссена та ін. (див. [3 – 6]).

У даній роботі знайдено розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для оператора Абеля – Пуассона на класах $\hat{L}^\psi_{\beta,1}$ та $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$, $\beta \in R$ і $\psi \in \mathfrak{M}_0$. У періодичному випадку найбільш повні результати в цьому напрямку отримано в роботі [11], а при $\psi(v) = v^{-r}$, $r > 0$, — в [12 – 14].

Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v,\psi) = \begin{cases}(1-e^{-v})\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & 0 \le v \le \dfrac{1}{\sigma},\\[2mm] (1-e^{-v})\dfrac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, & v \ge \dfrac{1}{\sigma},\end{cases} \tag{4}$$

де $\psi(v)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $v \ge 1$.

Означення [12]. *Нехай функція $\tau(v)$ задана на $[0,\infty)$, абсолютно неперервна і $\tau(\infty) = 0$. Говорять, що функція $\tau(v) \in \mathcal{E}_a$, якщо похідну $\tau'(v)$ у тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб для деякого $a \ge 0$ існували інтеграли*

$$\int_0^{a/2} v|d\tau'(v)|, \qquad \int_{a/2}^\infty |v-a||d\tau'(v)|.$$

Надалі домовимося через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, не одні і ті ж у різних співвідношеннях.

Теорема 1′ [12]. *Нехай* $\tau(v) \in \mathscr{E}_a$ *і* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(0) = 0$. *Тоді для збіжності інтеграла*

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \tag{5}$$

необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv, \qquad \int_{0}^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv.$$

При цьому якщо

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv \geq \frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv,$$

то

$$\left|A(\tau)-\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv\right| \leq K\left(\int_{0}^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv + H(\tau)\right), \tag{6}$$

де

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(a)| + \int_{0}^{a/2} v\,|d\tau'(v)| + \int_{a/2}^{\infty}|v-a|\,|d\tau'(v)|. \tag{7}$$

Якщо ж

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv \leq \frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv,$$

то

$$\left|A(\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv\right| \leq K\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv + H(\tau)\right). \tag{8}$$

Теорема 2′ [7, с. 161]. *Функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належить* $\mathfrak{M}_0$ *тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0)$$

задовольняє умову

$$\alpha(t) \geq K > 0 \quad \forall\, t \geq 1.$$

Теорема 3′ [7, с. 175]. *Для того щоб функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належала* $\mathfrak{M}_0$, *необхідно і достатньо, щоб існувала стала* K *така, щоб при всіх* $t \geq 1$ *виконувалась нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K,$$

де c — *довільна стала, що задовольняє умову* $c > 1$.

2. Оцінка верхніх меж наближень функцій на класах $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ їх операторами Абеля – Пуассона.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *функція* $g(v) = v\psi(v)$ *є опуклою. Тоді при* $\sigma \to \infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\sigma)_C = \psi(\sigma)A(\tau), \tag{9}$$

де величина $A(\tau)$ *означена за допомогою рівності* (5) *і для неї справедливою є оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\int_1^\sigma \psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_\sigma^\infty \frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{10}$$

Доведення. За допомогою теореми 1$'$ покажемо спочатку сумовність перетворення Фур'є функції $\tau(v)$, заданої співвідношенням (4). Для цього знайдемо оцінки інтегралів

$$\int_0^{1/2} v|d\tau'(v)|, \qquad \int_{1/2}^\infty |v-1||d\tau'(v)|, \tag{11}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau(v)|}{v}dv, \qquad \int_0^1 \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv. \tag{12}$$

Для оцінки першого інтеграла з (11) розіб'ємо проміжок $[0; 1/2]$ на дві частини: $[0; 1/\sigma]$ та $[1/\sigma; 1/2]$. Оскільки при $v \in [0; 1/\sigma]$

$$\tau'(v) = e^{-v}\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, \qquad \tau''(v) = -e^{-v}\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)},$$

то функція $\tau(v)$ є опуклою догори при $v \in [0; 1/\sigma]$. Тому, враховуючи, що

$$1 - e^{-v} \le v, \tag{13}$$

отримуємо

$$\int_0^{1/\sigma} v|d\tau'(v)| = \left(-v\tau'(v)+\tau(v)\right)\Big|_0^{1/\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}e^{-1/\sigma} + \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}(1-e^{-1/\sigma}) = \frac{O(1)}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{14}$$

Нехай

$$\tau_1(v) := (1-e^{-v}-v)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \tag{15}$$

$$\tau_2(v) := v\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}. \tag{16}$$

Тоді при $v \ge 1/\sigma$

$$\tau(v) = \tau_1(v) + \tau_2(v)$$

і

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v|d\tau'(v)| \le \int_{1/\sigma}^{1/2} v|d\tau_1'(v)| + \int_{1/\sigma}^{1/2} v|d\tau_2'(v)|. \tag{17}$$

Оцінимо перший інтеграл з правої частини нерівності (17). Для цього дослідимо спочатку функцію

$$\bar{\mu}(v) = 1 - e^{-v} - v. \tag{18}$$

З того, що

$$\bar{\mu}'(v) = e^{-v} - 1, \qquad \bar{\mu}''(v) = -e^{-v}, \qquad \bar{\mu}(0) = 0, \qquad \bar{\mu}'(0) = 0,$$

випливає

$$\bar{\mu}(v) \le 0, \qquad \bar{\mu}'(v) \le 0, \qquad \bar{\mu}''(v) < 0 \quad \text{при} \quad v \ge 0. \tag{19}$$

Враховуючи (13), (19) і нерівність

$$e^{-v} \le 1 - v + \frac{v^2}{2}, \tag{20}$$

одержуємо

$$|\bar{\mu}(v)| = v - 1 + e^{-v} \le \frac{v^2}{2}, \quad |\bar{\mu}'(v)| = 1 - e^{-v} \le v, \quad |\bar{\mu}''(v)| = e^{-v} \le 1. \tag{21}$$

Оскільки при $v \ge 1/\sigma$, згідно з (15), (18),

$$|d\tau_1'(v)| \le \left\{ |\bar{\mu}(v)| \frac{\sigma^2 \psi''(\sigma v)}{\psi(\sigma)} + 2|\bar{\mu}'(v)| \frac{\sigma |\psi'(\sigma v)|}{\psi(\sigma)} + |\bar{\mu}''(v)| \frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)} \right\} dv, \tag{22}$$

то з урахуванням (21) маємо

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v |d\tau_1'(v)| \le \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} \frac{v^3}{2} \sigma^2 \psi''(\sigma v) dv +$$

$$+ \frac{2}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v^2 \sigma |\psi'(\sigma v)| dv + \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v \psi(\sigma v) dv.$$

Проінтегрувавши перший інтеграл правої частини останньої нерівності за частинами, отримаємо

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v |d\tau_1'(v)| \le \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{v^3}{2} \sigma \psi'(\sigma v) \Bigg|_{1/\sigma}^{1/2} +$$

$$+ \frac{7}{2\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v^2 \sigma |\psi'(\sigma v)| dv + \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v \psi(\sigma v) dv. \tag{23}$$

На підставі теореми 2′

$$\frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v^2 \sigma |\psi'(\sigma v)| dv \le \frac{K}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v \psi(\sigma v) dv.$$

Тоді із (23) з урахуванням теореми 3′ одержимо

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v |d\tau_1'(v)| \le K_1 + \frac{K_2}{\sigma^2 \psi(\sigma)} + \frac{K_3}{\psi(\sigma)} \int_{1/\sigma}^{1/2} v \psi(\sigma v) dv. \tag{24}$$

Оскільки функція $v\psi(v)$ є опуклою і $v\psi(v) \ne 0$ при $v \ge 1$, то при $v \in [1, \sigma]$ можливі лише два випадки: або $v\psi(v) \le \psi(1)$, або $v\psi(v) \le \sigma\psi(\sigma)$. Отже,

$$\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma/2} v\psi(v)dv \;\le\; \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma} v\psi(v)dv \;=\; O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{25}$$

Враховуючи (25), з (24) отримуємо

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v\left|d\tau_1'(v)\right| \;=\; O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{26}$$

З (16) і опуклості функції $v\psi(v)$ випливає

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v\left|d\tau_2'(v)\right| \;=\; \left|\int_{1/\sigma}^{1/2} v\,d\tau_2'(v)\right| \;=\; \left|\left(v\tau_2'(v)-\tau_2(v)\right)\Big|_{1/\sigma}^{1/2}\right| \;=\; O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{27}$$

Таким чином, із співвідношень (14), (17), (26) і (27) маємо

$$\int_{0}^{1/2} v\left|d\tau'(v)\right| \;=\; O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{28}$$

Оцінимо другий інтеграл з (11). Оскільки при $v \in [1/\sigma; \infty)$, згідно з (4),

$$\psi(\sigma)d\tau'(v) \;=\; \left\{(1-e^{-v})\sigma^2\psi''(\sigma v) + 2\sigma e^{-v}\psi'(\sigma v) - e^{-v}\psi(\sigma v)\right\}dv, \tag{29}$$

то

$$\int_{1/2}^{\infty} |v-1|\left|d\tau'(v)\right| \;\le\; \int_{1/2}^{\infty} v\left|d\tau'(v)\right| \;\le\; \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_{1/2}^{\infty} v(1-e^{-v})\sigma^2\psi''(\sigma v)dv \;+$$

$$+\;\frac{2\sigma}{\psi(\sigma)}\int_{1/2}^{\infty} ve^{-v}\left|\psi'(\sigma v)\right|dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_{1/2}^{\infty} ve^{-v}\psi(\sigma v)dv.$$

Далі, враховуючи, що при $v \ge 0$

$$1 - e^{-v} \;\le\; 1, \quad ve^{-v} \;\le\; K, \tag{30}$$

і при $v \in [1/2; +\infty)$

$$\psi(\sigma v) \;\le\; \psi(\sigma/2),$$

переконуємося, що

$$\int_{1/2}^{\infty} |v-1|\left|d\tau'(v)\right| \;=\; O(1). \tag{31}$$

Для оцінки першого інтеграла із (12) розіб'ємо проміжок $[0; \infty)$ на три частини: $[0; 1/\sigma]$, $[1/\sigma; 1]$ та $[1; \infty)$. Використовуючи співвідношення (4) і (13), отримуємо

$$\int_0^{1/\sigma}\frac{\tau(v)}{v}dv \;=\; \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma}(1-e^{-v})\frac{dv}{v} \;\le\; \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma} v\frac{dv}{v} \;=\; \frac{\psi(1)}{\sigma\psi(\sigma)}. \tag{32}$$

Із співвідношень (4), (18), (21) і (25) маємо

$$\left|\int_{1/\sigma}^{1}\frac{\tau(v)}{v}dv - \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_{1/\sigma}^{1}\psi(\sigma v)dv\right| \;\le\; \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_{1/\sigma}^{1}\frac{\left|\bar{\mu}(v)\right|}{v}\psi(\sigma v)dv \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{2\psi(\sigma)}\int_{1/\sigma}^{1} v\psi(\sigma v)dv \;=\; O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right).$$

Звідси

$$\int_{1/\sigma}^{1} \frac{\tau(v)}{v} dv = \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \psi(v) dv + O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{33}$$

Із рівності (4), враховуючи спадання функції $\psi(v)$ при $v \geq 1$, отримуємо

$$\left| \int_{1}^{\infty} \frac{\tau(v)}{v} dv - \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv \right| = \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} \psi(\sigma v) dv \leq \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv \leq K. \tag{34}$$

Із співвідношень (32) – (34) випливає

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\tau(v)|}{v} dv = \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \psi(v) dv + \frac{1}{\psi(\sigma)} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{35}$$

Оцінимо другий інтеграл із (12). Якщо функція $\tau(v) \in \mathscr{E}_1$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sigma > 1/2$, то виконується нерівність (див. співвідношення (21) роботи [10])

$$\int_{0}^{1} |\tau(1-v) - \tau(1+v)| \frac{dv}{v} \leq \int_{0}^{1} |\bar{\lambda}(1-v) - \bar{\lambda}(1+v)| \frac{dv}{v} +$$

$$+ K\left(|\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_{0}^{1/2} v |d\tau'(v)| + \int_{1/2}^{\infty} |v-1| |d\tau'(v)| \right), \tag{36}$$

де, згідно з (4), $\bar{\lambda}(v) = e^{-v}$. Оскільки

$$\int_{0}^{1} |\bar{\lambda}(1-v) - \bar{\lambda}(1+v)| \frac{dv}{v} = \int_{0}^{1} |e^{-1+v} - e^{-1-v}| \frac{dv}{v} = O(1), \tag{37}$$

то з урахуванням співвідношень (28), (31) і (37) із (36) випливає

$$\int_{0}^{1} |\tau(1-v) - \tau(1+v)| \frac{dv}{v} = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right). \tag{38}$$

Таким чином, за теоремою 1′ перетворення Фур'є функції $\tau(v)$, заданої у вигляді (4), сумовне на всі числовій осі. Тоді за лемою 1 роботи В. І. Рукасова [5] має місце рівність (9). Із нерівностей (6) і (8) з урахуванням формул (7), (28), (31), (35) і (38) отримаємо співвідношення (10).

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо функція* $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ *і* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *то при* $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\sigma)_C = \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \right| \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O(\psi(\sigma)). \tag{39}$$

Доведення. Як відомо (див., наприклад, [9, с. 94]), при будь-якому $\varepsilon > 0$ і достатньо великих v функція $v^{\varepsilon}\psi(v)$ зростає, якщо $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$. Тому

$$\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \psi(v) dv \leq \frac{\sigma^{\varepsilon}\psi(\sigma)}{\sigma\psi(\sigma)} \int_{1}^{\sigma} \frac{1}{v^{\varepsilon}} dv = O(1). \tag{40}$$

Використовуючи правило Лопіталя і те, що $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0$, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x\psi'(x)}. \tag{41}$$

Оскільки $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$, то $\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\psi(x)}{x\psi'(x)} = \infty$. Отже, при $\sigma \to \infty$

$$\psi(\sigma) = o\left(\int_\sigma^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv\right). \tag{42}$$

Підставивши (40) та (42) у (9), (10), отримаємо (39).

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1, є $\psi(v) = \frac{1}{\ln^\alpha(v+K)}$, де $\alpha > 1$, $K > 1$.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v\psi(v)$ *є опуклою і*

$$\lim_{v\to\infty} v\psi(v) = \infty, \tag{43}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)} \int_1^\sigma \psi(v) dv = \infty. \tag{44}$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; P_\sigma)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\sigma}\int_1^\sigma \psi(v) dv + O(\psi(\sigma)). \tag{45}$$

Доведення. Якщо функція ψ задовольняє умови (43) і (44), то, використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\psi(x) + x\psi'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \psi(v) dv}{x\psi(x)} = \infty.$$

Звідси

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = -1. \tag{46}$$

З рівностей (41) та (46) одержуємо

$$\int_\sigma^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv = O(\psi(\sigma)).$$

Використовуючи останню оцінку і співвідношення (9), (10), (43) та (44), отримуємо (45).

Зауважимо, що функції $\psi(v) = \frac{1}{v}\ln^\alpha(v+K)$, $K > 0$, $\alpha > 0$, задовольняють умови наслідку 2.

Наслідок 3. *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v\psi(v)$ *є опуклою донизу,*

$$\lim_{v\to\infty} v\psi(v) = K < \infty, \tag{47}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_1^{\sigma}\psi(v)dv = \infty. \tag{48}$$

Тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{\sigma})_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\sigma}\int_1^{\sigma}\psi(v)dv + O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{49}$$

Справді, з умови (47) маємо

$$\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv \le \int_{\sigma}^{\infty}\frac{K}{v^2}dv = O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Рівність (49) отримаємо, підставивши останній вираз у (10) та врахувавши співвідношення (9), (47), (48).

Прикладом функцій, для яких має місце наслідок 3, є $\psi(v) = \frac{1}{v}(K+e^{-v})$, $\psi(v) = \frac{1}{v}\ln^{\alpha}(v+K)$, де сталі $K>1$ і $-1\le\alpha\le 0$ підібрано так, щоб функція $v\psi(v)$ була опуклою донизу при $v\ge 1$.

В умовах теореми 1, якщо $\int_1^{\infty}\psi(v)dv<\infty$, рівність (9) не є асимптотичною.

Теорема 2. *Якщо* $\psi\in\mathfrak{A}_C$, *функція* $g(v) = v\psi(v)$ *є опуклою донизу і* $\int_1^{\infty}\psi(v)dv<\infty$, *то при* $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{\sigma})_C = \frac{1}{\sigma}\sup_{f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f_0^{(1)}(x)\right\|_C + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\int_1^{\sigma}t\psi(t)dt + \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}^{\infty}\psi(t)dt\right), \tag{50}$$

де $f_0^{(1)}$ — (ψ,β)*-похідна функції* f, *при* $\psi(v) = 1/v$, $\beta = 0$.

Доведення. Подамо функцію $\tau(v)$, задану співвідношенням (4), у вигляді $\tau(v) = \varphi(v)+\mu(v)$, де

$$\varphi(v) = \begin{cases} v\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & 0\le v<\dfrac{1}{\sigma}, \\ v\dfrac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, & v\ge\dfrac{1}{\sigma}, \end{cases}$$

$$\mu(v) = \begin{cases} (1-e^{-v}-v)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & 0\le v<\dfrac{1}{\sigma}, \\ (1-e^{-v}-v)\dfrac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, & v\ge\dfrac{1}{\sigma}. \end{cases} \tag{51}$$

Як і при доведенні теореми 1, можна переконатися в сумовності функцій

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv,$$

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

Крім того, як показано в [10] (див. співвідношення (12)), для функції $\tau(v)$, заданої співвідношенням (4), справджується рівність

$$f(x) - P_\sigma(f; x) = \psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt =$$

$$=: \psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\tau}(t)\,dt.$$

Тому

$$\mathscr{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi; P_\sigma)_C = \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\tau}(t)\,dt\right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)(\hat{\varphi}(t)+\hat{\mu}(t))\,dt\right\|_C \le$$

$$\le \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\varphi}(t)\,dt\right\|_C + \psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\mu}(t)|\,dt.$$

Звідси, враховуючи (5), маємо

$$\mathscr{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi; P_\sigma)_C = \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\varphi}(t)\,dt\right\|_C + O\big(\psi(\sigma)A(\mu)\big). \tag{52}$$

Згідно з співвідношенням (3) роботи [15], функція, яку можна подати у вигляді згортки

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi(x+t)\int_0^\infty v\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt,$$

буде (ψ,β)-похідною функції f, де $\psi(v) = 1/v$, $\beta = 0$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\varphi}(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}f_0^{(1)}(x). \tag{53}$$

Підставляючи (53) в (52), отримуємо

$$\mathscr{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi; P_\sigma)_C = \frac{1}{\sigma}\sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|f_0^{(1)}(x)\right\|_C + O\big(\psi(\sigma)A(\mu)\big) \tag{54}$$

при $\sigma \to \infty$.

Для того щоб оцінити величину $A(\mu)$, згідно з сформульованою вище теоремою 1′, досить знайти оцінку інтегралів

$$\int_0^{1/2} v|d\mu'(v)|, \qquad \int_{1/2}^\infty |v-1||d\mu'(v)|, \tag{55}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\mu(v)|}{v}dv, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu(1-v) - \mu(1+v)|}{v}dv. \tag{56}$$

Для оцінки першого інтеграла з (55) розіб’ємо проміжок $[0; 1/2]$ на дві частини: $[0; 1/\sigma]$ та $[1/\sigma; 1/2]$. Оскільки, згідно з (51), $\mu''(v) = -e^{-v}\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}$ при $v \in [0; 1/\sigma]$, то

$$\int_0^{1/\sigma} v\left|d\mu'(v)\right| = \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma} ve^{-v}dv \le \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma} ve^{-v}dv = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right).$$

Враховуючи (24) і те, що $\tau_1(v) \equiv \mu(v)$, одержуємо

$$\int_{1/\sigma}^{1/2} v\left|d\mu'(v)\right| = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma} v\psi(v)dv\right).$$

Отже,

$$\int_0^{1/2} v\left|d\mu'(v)\right| = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma} v\psi(v)dv\right). \tag{57}$$

Оскільки $d\tau'(v) \equiv d\mu'(v)$, то, згідно з (31), маємо

$$\int_{1/2}^{\infty} |v-1|\left|d\mu'(v)\right| = O(1). \tag{58}$$

Для того щоб оцінити перший інтеграл з (56), розіб'ємо проміжок $[0, \infty)$ на три частини: $\left[0; \frac{1}{\sigma}\right]$, $\left[\frac{1}{\sigma}; 1\right]$ та $[1, \infty)$. Враховуючи рівність (51) і першу нерівність з (20), одержуємо

$$\int_0^{1/\sigma} \frac{|\mu(v)|}{v}dv = \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma} (-1+e^{-v}+v)\frac{dv}{v} \le \frac{\psi(1)}{2\psi(\sigma)}\int_0^{1/\sigma} v\,dv = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right),$$

$$\int_{1/\sigma}^{1} \frac{|\mu(v)|}{v}dv \le \int_{1/\sigma}^{1} v\frac{\psi(\sigma v)}{2\psi(\sigma)}dv = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma} v\psi(v)dv\right),$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\mu(v)|}{v}dv = \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_1^{\infty} \psi(\sigma v)\left(\frac{e^{-v}-1}{v}+1\right)dv \le \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_1^{\infty} \psi(\sigma v)dv.$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} \frac{|\mu(v)|}{v}dv = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int_1^{\sigma} v\psi(v)dv + \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\int_{\sigma}^{\infty} \psi(v)dv\right). \tag{59}$$

Для того щоб оцінити другий інтеграл з (56), відмітимо, що при $\bar{\lambda}(v) = e^{-v} + v$ має місце рівність (див. співвідношення (21) роботи [10])

$$\int_0^1 |\mu(1-v)-\mu(1+v)|\frac{dv}{v} = \int_0^1 \left|\bar{\lambda}(1-v)-\bar{\lambda}(1+v)\right|\frac{dv}{v} +$$

$$+ O\left(|\mu(0)|+|\mu(1)|+\int_0^{1/2} v\left|d\mu'(v)\right| + \int_{1/2}^{\infty} |v-1|\left|d\mu'(v)\right|\right).$$

Оскільки

$$\int_0^1 \left|\bar{\lambda}(1-v)-\bar{\lambda}(1+v)\right|\frac{dv}{v} = O(1),$$

то, враховуючи співвідношення (57) і (58), отримуємо

$$\int_0^1 |\mu(1-v) - \mu(1+v)| \frac{dv}{v} = O\left(\frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \int_1^\sigma v \psi(v) dv \right). \tag{60}$$

Підставляючи (59), (60) в (6), (8) з урахуванням співвідношень (7), (57), (58) і того, що

$$\frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \int_1^\sigma v \psi(v) dv \geq \frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \sigma \psi(\sigma) \int_1^\sigma dv \geq K,$$

$$\int_1^\sigma v \psi(v) dv \geq K,$$

знаходимо

$$A(\mu) = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \int_1^\sigma v \psi(v) dv + \frac{1}{\sigma \psi(\sigma)} \int_\sigma^\infty \psi(v) dv \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \int_1^\sigma v \psi(v) dv + \frac{1}{\sigma \psi(\sigma)} \int_\sigma^\infty \psi(v) dv \right).$$

Звідси, враховуючи (54), отримуємо (50).

Теорему 2 доведено.

Прикладом функцій, для яких має місце теорема 2, є:

$\psi(v) = \frac{1}{v} \ln^\alpha (v + K), \; K > 1, \; \alpha < -1;$

$\psi(v) = \frac{1}{v^r} \ln^\alpha (v + K)$, де сталі $r > 1$, $K > 1$ і α підібрано так, що функція $v \psi(v)$ є опуклою донизу при $v \geq 1$;

$\psi(v) = \frac{1}{v^r} \operatorname{arctg} v, \; \psi(v) = \frac{1}{v^r}(K + e^{-v}), \; K > 0, \; r > 1, \; \alpha$ — довільне.

3. Оцінка верхніх меж наближень функцій на класах $\hat{L}^\psi_{\beta,1}$ їх операторами Абеля – Пуассона в інтегральній метриці. Нехай $f \in \hat{L}^\psi_\beta$, функція $\tau_\sigma(v)$ задана співвідношенням (4), така, що її перетворення Фур'є $\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_\sigma(t)$ є сумовним на R. Тоді майже в кожній точці, згідно з рівністю (43) [10],

$$f(x) - P_\sigma(f, x) = \psi(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta \left(x + \frac{t}{\sigma} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv dt.$$

Оскільки функція $\tau(v)$, задана співвідношенням (4), є неперервною і її перетворення Фур'є, як показано при доведенні теореми 1, сумовне, то, згідно з лемою роботи [10, с. 1278], при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathscr{E}(\hat{L}^\psi_{\beta,1}; P_\sigma)_{\hat{1}} = \psi(\sigma) A(\tau) + O\left(\psi(\sigma) \int_{|t| \geq \sigma\pi/2} |\hat{\tau}(t)| dt \right).$$

Порівнюючи це співвідношення з рівністю (9), приходимо до висновку, що має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0$, *функція* $g(v) = v \psi(v)$ *є опуклою догори або донизу. Тоді при* $\sigma \to \infty$ *має місце рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; P_{\sigma})_{\hat{1}} = \psi(\sigma)A(\tau) + O\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $A(\tau)$ *визначається рівністю* (5) *і для цієї величини справедливою є оцінка* (10).

Із теореми 3 на підставі міркувань, наведених при доведенні наслідків 1 – 3, випливають наступні твердження.

***Наслідок* 4.** *Якщо функція* $\psi \in F \cap \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ *і* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *то при* $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; P_{\sigma})_{\hat{1}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O(\psi(\sigma)).$$

***Наслідок* 5.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v\psi(v)$ *є опуклою догори або донизу,*

$$\lim_{v\to\infty} v\psi(v) = \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma\psi(\sigma)} \int_1^{\sigma} \psi(v)dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; P_{\sigma})_{\hat{1}} = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\sigma}\int_1^{\sigma} \psi(v)dv + O(\psi(\sigma)).$$

***Наслідок* 6.** *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v\psi(v)$ *є опуклою донизу,*

$$\lim_{v\to\infty} v\psi(v) = K < \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_1^{\sigma} \psi(v)dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; P_{\sigma})_{\hat{1}} = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\sigma}\int_1^{\sigma} \psi(v)dv + O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

1. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102–112.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210–222.
3. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда. – Киев, 1989. – С. 3–42. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
4. *Дзимистаришвили М. Г.* О поведении верхних граней уклонений операторов Стеклова. – Киев, 1990. – С. 3–29. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.25).
5. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682–691.
6. *Репета Л. А.* Приближение функций классов $\hat{C}^{\infty}_{\beta,\psi}$ операторами вида $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ // Ряды Фурье: теория и приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 147–154.
7. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.

8. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.2. – 468 с.
9. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
10. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій, заданих на дійсній осі, операторами, що породжуються λ-методами підсумовування їх інтегралів Фур'є // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1267–1280.
11. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Абеля – Пуассона // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – 314 с.
12. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15–31.
13. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **74**. – С. 17–20.
14. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 43–52.
15. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике. – Киев, 1988. – С. 3–41. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).

Одержано 13.07.2004