УДК 531.36; 531.011

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СТІЙКІСТЬ РУХУ ЗА ЛАГРАНЖЕМ У ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ

For the three-body problem, we study the relation between the Hill stability of a fixed pair of mass points and the Lagrange stability of the system of all three mass points. We prove a theorem establishing sufficient conditions of the Lagrange stability. We consider a corollary of the theorem obtained concerning the restricted three-body problem. The relations are established which connect separately squared mutual distances between mass points and squared distances of mass points to the barycenter of the system. These relations may work both for the unrestricted and restricted three-body problems.

У задачі трьох тіл розглядається зв'язок між стійкістю за Хіллом фіксованої пари матеріальних точок і стійкістю за Лагранжем системи всіх трьох матеріальних точок. Доводиться відповідна теорема, що встановлює достатні умови стійкості за Лагранжем. Розглядається наслідок отриманої теореми стосовно обмеженої задачі трьох тіл. Встановлюються співвідношення, які зв'язують нарізно квадрати взаємних відстаней між матеріальними точками і квадрати відстаней матеріальних точок до барицентра системи. Ці співвідношення можуть виявитися корисними як в необмеженій, так і в обмеженій задачах трьох тіл.

1. Вступ. Як відомо [1 – 3], задача трьох тіл (матеріальних точок) полягає в тому, що три матеріальні точки відповідно з масами m_1, m_2, m_3 здійснюють рух у тривимірному евклідовому просторі під дією сил взаємного гравітаційного притягання. Потрібно визначити їхні координати і швидкості в будь-який момент часу t, виходячи з початкових даних. У такій формі задача залишається нерозв'язаною і донині, в зв'язку з чим актуальним є якісне дослідження руху системи, яке дозволяє принаймні отримати в ряді випадків уяву про характер траєкторій матеріальних точок. Зокрема, становить інтерес розгляд зв'язку між стійкістю за Хіллом фіксованої пари точок [4] і стійкістю за Лагранжем всієї системи.

Розглянемо інерційну систему відліку, початок якої виберемо в центрі мас m_1, m_2, m_3. Нехай $\mathbf{r_i}$, $i = 1, 2, 3,$ — радіуси-вектори матеріальних точок відповідно з масами m_1, m_2, m_3 в даній системі відліку. Тоді лагранжіан розглядуваної системи точок, що притягуються, набирає вигляду

$$L = T + U = \frac{1}{2}\sum_i^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}^2 + G\left(\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_{12}}|} + \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{r_{13}}|} + \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{r_{23}}|}\right),$$
$$\mathbf{r_{ij}} = \mathbf{r_j} - \mathbf{r_i}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

де $G > 0$ — гравітаційна стала.

Рівняння руху системи, які відповідають лагранжіану (1), запишемо у вигляді

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G\left(m_2\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3} + m_3\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3}\right),$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = G\left(-m_1\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3} + m_3\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right), \tag{2}$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = G\left(-m_1\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3} - m_2\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right).$$

На підставі структури лагранжіана (1) розглядуваної системи маємо

$$E = T - U = h = \text{const}. \tag{3}$$

Оскільки для даної системи існують інтеграли руху центра мас

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}, \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{c}t + \mathbf{b}, \tag{4}$$

де $\mathbf{c}$ і $\mathbf{b}$ — сталі вектори, то у відповідності з вибором системи відліку, без обмеження загальності розгляду, далі вважатимемо, що

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \tag{5}$$

і, як наслідок [3, 5],

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i^2 = M^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j |\mathbf{r}_{ij}|^2, \qquad M = \sum_{i=1}^{3} m_i. \tag{6}$$

Означення 1. *Рух* $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ *системи* (2) *назвемо стійким за Лагранжем, якщо виконується умова*

$$c_1 \le |\mathbf{r}_{ij}(t)| \le c_2 \qquad \forall t \in R =]-\infty, \infty[, \qquad \forall i < j,$$

де c_1, c_2 *— додатні сталі.*

Означення 2. *Рух* $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ *системи* (2) *назвемо дистальним, якщо виконується нерівність*

$$|\mathbf{r}_{ij}(t)| > c_3 \qquad \forall t \in R, \qquad \forall i < j, \qquad 0 < c_3 = \text{const}.$$

Означення 3. *Фіксовану пару точок* (m_i, m_j), $i < j$, *системи* (2) *згідно з* [4] *назвемо стійкою за Хіллом, якщо виконується нерівність*

$$|\mathbf{r}_{ij}(t)| < c_4 \qquad \forall t \in R, \qquad 0 < c_4 = \text{const},$$

при фіксованих i *та* j.

2. Про зв'язок довжин радіусів-векторів точок $\mathbf{r}_i$ з взаємними відстанями між точками $|\mathbf{r}_{ij}|$. Зобразимо рівність

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

у вигляді трьох еквівалентних рівностей

$$\begin{aligned} M\mathbf{r}_1 &= -m_2\mathbf{r}_{12} - m_3\mathbf{r}_{13}, \\ M\mathbf{r}_2 &= m_1\mathbf{r}_{12} - m_3\mathbf{r}_{23}, \\ M\mathbf{r}_3 &= m_1\mathbf{r}_{13} + m_2\mathbf{r}_{23}. \end{aligned} \tag{7}$$

На підставі (7) маємо

$$\begin{aligned} M^2\mathbf{r}_1^2 &= m_2^2\mathbf{r}_{12}^2 + m_3^2\mathbf{r}_{13}^2 + 2m_2m_3\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{13}, \\ M^2\mathbf{r}_2^2 &= m_1^2\mathbf{r}_{12}^2 + m_3^2\mathbf{r}_{23}^2 - 2m_1m_3\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{23}, \\ M^2\mathbf{r}_3^2 &= m_1^2\mathbf{r}_{13}^2 + m_2^2\mathbf{r}_{23}^2 + 2m_1m_2\mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_{23}, \end{aligned} \tag{8}$$

а оскільки має місце тотожність

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{13} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

то справджуються рівності

$$\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{13} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{13}^2 - \mathbf{r}_{23}^2\right),$$

$$\mathbf{r_{12}}\,\mathbf{r_{23}} = \frac{1}{2}\left(-\mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{13}^2 - \mathbf{r}_{23}^2\right), \tag{10}$$

$$\mathbf{r_{13}}\,\mathbf{r_{23}} = \frac{1}{2}\left(-\mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{13}^2 + \mathbf{r}_{23}^2\right).$$

Далі позначимо $|\mathbf{r_{ij}}| = r_{ij}$, $|\mathbf{r_i}| = r_i$. Враховуючи (10), згідно з (8) одержуємо рівності

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{1}{M^2}\left[m_2(m_2+m_3)r_{12}^2 + m_3(m_2+m_3)r_{13}^2 - m_2m_3\,r_{23}^2\right], \\ r_2^2 &= \frac{1}{M^2}\left[m_1(m_1+m_3)r_{12}^2 - m_1m_3\,r_{13}^2 + m_3(m_1+m_3)r_{23}^2\right], \\ r_3^2 &= \frac{1}{M^2}\left[-m_1m_2\,r_{12}^2 + m_1(m_1+m_2)r_{13}^2 + m_2(m_1+m_2)r_{23}^2\right], \end{aligned} \tag{11}$$

на підставі яких маємо

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= \frac{m_1(m_1+m_2)r_1^2 + m_2(m_1+m_2)r_2^2 - m_3^2\,r_3^2}{m_1m_2}, \\ r_{13}^2 &= \frac{m_1(m_1+m_3)r_1^2 - m_2^2\,r_2^2 + m_3(m_1+m_3)r_3^2}{m_1m_3}, \\ r_{23}^2 &= \frac{-m_1^2\,r_1^2 + m_2(m_2+m_3)r_2^2 + m_3(m_2+m_3)r_3^2}{m_2m_3}. \end{aligned} \tag{12}$$

Позначаючи $|\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{ij}}| = v_{ij}$, $|\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}| = v_i$, одержуємо співвідношення, що зв'язують v_{ij}^2 і v_i^2, аналогічні співвідношенням (11) і (12):

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{1}{M^2}\left[m_2(m_2+m_3)v_{12}^2 + m_3(m_2+m_3)v_{13}^2 - m_2m_3\,v_{23}^2\right], \\ v_2^2 &= \frac{1}{M^2}\left[m_1(m_1+m_3)v_{12}^2 - m_1m_3\,v_{13}^2 + m_3(m_1+m_3)v_{23}^2\right], \\ v_3^2 &= \frac{1}{M^2}\left[-m_1m_2\,v_{12}^2 + m_1(m_1+m_2)v_{13}^2 + m_2(m_1+m_2)v_{23}^2\right], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v_{12}^2 &= \frac{m_1(m_1+m_2)v_1^2 + m_2(m_1+m_2)v_2^2 - m_3^2\,v_3^2}{m_1m_2}, \\ v_{13}^2 &= \frac{m_1(m_1+m_3)v_1^2 - m_2^2\,v_2^2 + m_3(m_1+m_3)v_3^2}{m_1m_3}, \\ v_{23}^2 &= \frac{-m_1^2\,v_1^2 + m_2(m_2+m_3)v_2^2 + m_3(m_2+m_3)v_3^2}{m_2m_3}. \end{aligned} \tag{14}$$

Рівності (11), (12), що зв'язують квадрати відстаней матеріальних точок до барицентра системи і квадрати взаємних відстаней, а також їх аналоги (13), (14), які стосуються швидкостей, не дивлячись на простий спосіб їх одержання, раніше були невідомими і, мабуть, становлять самостійний інтерес.

3. Про рівняння відстаней у задачі трьох тіл. Рівняння руху (2) запишемо у вигляді [6]

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} + GM\frac{\mathbf{r_{12}}}{|\mathbf{r_{12}}|^3} = Gm_3\,\mathbf{F},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{13} + GM\frac{\mathbf{r}_{13}}{|\mathbf{r}_{13}|^3} = -Gm_2\,\mathbf{F}, \qquad (15)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{23} + GM\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3} = Gm_1\,\mathbf{F},$$

де

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{|\mathbf{r}_{13}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}.$$

Помноживши рівняння системи (15) відповідно на $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{13}$, $\mathbf{r}_{23}$ і врахувавши (10), отримаємо

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}r_{12}^2\right)^{\cdot\cdot} &= {v_{12}}^2 + G\left\{-\frac{m_1+m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{2r_{13}}\left[\frac{r_{23}^2 - r_{12}^2}{r_{13}^2} - 1\right] + \frac{m_3}{2r_{23}}\left[\frac{r_{13}^2 - r_{12}^2}{r_{23}^2} - 1\right]\right\},\\
\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot\cdot} &= {v_{13}}^2 + G\left\{-\frac{m_1+m_3}{r_{13}} + \frac{m_2}{2r_{12}}\left[\frac{r_{23}^2 - r_{13}^2}{r_{12}^2} - 1\right] + \frac{m_2}{2r_{23}}\left[\frac{r_{12}^2 - r_{13}^2}{r_{23}^2} - 1\right]\right\}, \qquad (16)\\
\left(\frac{1}{2}r_{23}^2\right)^{\cdot\cdot} &= {v_{23}}^2 + G\left\{-\frac{m_2+m_3}{r_{23}} + \frac{m_1}{2r_{12}}\left[\frac{r_{13}^2 - r_{23}^2}{r_{12}^2} - 1\right] + \frac{m_1}{2r_{13}}\left[\frac{r_{12}^2 - r_{23}^2}{r_{13}^2} - 1\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Рівняння (16), що зв’язують відстані між точками, є тими опорними співвідношеннями, які будемо використовувати в подальшому.

4. Теорема про стійкість за Лагранжем. Одержані вище рівняння (16), що містять взаємні відстані між матеріальними точками, спробуємо застосувати для встановлення зв’язку між стійкістю за Хіллом пари точок і стійкістю за Лагранжем всієї системи.

Далі обмежимося розглядом рухів системи (2), які належать множинам від’ємного рівня інтеграла енергії (3), оскільки саме при $h < 0$ питання про стійкість за Хіллом фіксованої пари матеріальних точок є конструктивним (детальніше див. [4]).

Теорема. *Нехай* $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ — *дистальний рух системи* (2), *який задовольняє умови*:

1) $T - U = h < 0$ *на даному русі*;

2) *пара тіл* (m_1, m_2) *є стійкою за Хіллом*;

3) $|r_{23}(t) - r_{13}(t)| \geq r_0 \quad \forall t \in R, \quad 0 < r_0 = \text{const}$.

Тоді розглядуваний рух є стійким за Лагранжем.

Доведення. Оскільки досліджуваний рух $\mathbf{r}(t)$ є дистальним, то має місце нерівність

$$T = h + U \leq T_0 = \text{const}. \qquad (17)$$

Припустимо, що при виконанні умов теореми рух $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ є нестійким за Лагранжем. Тоді, з урахуванням обмеженості кінетичної енергії T системи, існує така послідовність $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, що

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{i<j}^{3} r_{ij}^2(t_k) = \infty, \qquad (18)$$

і, таким чином, враховуючи умову 3 теореми, маємо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|r_{23}^2(t_k) - r_{13}^2(t_k)|}{r_{12}^2(t_k)} = \frac{(r_{23}(t_k) + r_{13}(t_k))\,|r_{23}(t_k) - r_{13}(t_k)|}{r_{12}^2(t_k)} = \infty. \qquad (19)$$

Переписуючи першу з рівностей (10) у вигляді

$$\mathbf{r}_{23}^2 = \mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{13}^2 - 2\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{13},$$

приходимо до висновку, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_{23}^2(t_k)}{r_{13}^2(t_k)} = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{r_{12}^2(t_k)}{r_{13}^2(t_k)} - 2\frac{r_{12}(t_k)}{r_{13}(t_k)}\cos\left(\widehat{\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}}\right) + 1\right] = 1. \qquad (20)$$

Без обмеження загальності розгляду, враховуючи структуру системи (16), вважатимемо далі, що $r_{23}^2 - r_{13}^2 < 0$. Тоді, беручи до уваги (17) – (20), на підставі другого рівняння системи (16) одержуємо нерівність

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot\cdot}\Bigg|_{t\in\{t_k\}} \le -\gamma \qquad \forall k \ge s, \qquad 0 < \gamma = \mathrm{const}, \qquad (21)$$

де s відповідає достатньо великому номеру в послідовності $\{t_k\}$.

Згідно з (17), (18) існують як завгодно великі відрізки часу $\left[t_{k_2}^* - t_{k_1}^*\right]$, $k_2 > > k_1$, на яких виконується нерівність (21). Інтегруючи (21), отримуємо

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot}\Bigg|_{t_1}^{t} \le -\gamma(t - t_1), \qquad t > t_1,$$

звідки

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)\Bigg|_{t_1}^{t} \le \left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot}\Bigg|_{t=t_1}(t - t_1) - \frac{\gamma}{2}(t - t_1)^2. \qquad (22)$$

Тут $[t_1, t] \subseteq \left[t_{k_1}^*, t_{k_2}^*\right]$.

Позначимо через $t^*(k)$ точку в замкнутому інтервалі $\left[t_{k_1}^*, t_{k_2}^*\right]$, $t^*(k) > t_{k_1}^*$, в якій величина $r_{13}^2/2$ набуває максимального значення. Покладемо в рівності (22) $t_1 = t_{k_1}^*$, $t = t^*(k)$ і перепишемо її у вигляді

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)\Bigg|_{t_{k_1}^*}^{t^*(k)} \le \left[t^*(k) - t_{k_1}^*\right]\left\{\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot}\Bigg|_{t=t_{k_1}^*} - \frac{\gamma}{2}\left[t^*(k) - t_{k_1}^*\right]\right\}. \qquad (23)$$

Доданок $\left(r_{13}^2/2\right)^{\cdot}\Big|_{t=t_{k_1}^*}$ в (23) відповідає такому моменту часу $t = t_{k_1}^*$, що сума $\sum_{i<j}^{3} r_{ij}^2\left(t_{k_1}^*\right)$ досягає в ньому критичного значення, при якому

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot\cdot}\Bigg|_{t=t_{k_1}^*} \le -\gamma.$$

Отже, вибір величини

$$\left(\frac{1}{2}r_{13}^2\right)^{\cdot}\Bigg|_{t=t_{k_1}^*}$$

в рівності (23) завжди можна здійснити таким чином, щоб вона була скінченною і не залежала від довжини проміжку $\left[t_{k_1}^*, t^*(k)\right]$. Разом з тим ця довжина, з урахуванням рівності (18), при $k \to \infty$ прямує до нескінченності. Оскільки за умови прямування довжини проміжку $\left[t_{k_1}^*, t^*(k)\right]$ до нескінченності права частина нерівності (23) стає від'ємною, а ліва — додатною, приходимо до суперечності.

Таким чином, зроблене припущення про нестійкість за Лагранжем руху $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ є помилковим, звідки випливає висновок про справедливість теореми.

***Наслідок* 1.** *Розв'язки Лагранжа, що відповідають розташуванню точок на одній прямій, задовольняють отриману теорему.*

Зауваження. Дана теорема дає уяву про конфігурацію трьох матеріальних точок, яка забезпечує стійкість руху за Лагранжем. З цією метою проведемо площину π через середину відрізка P_1P_2, що з'єднує відповідно точки з масами m_1, m_2. Будемо вважати, що $\pi \perp P_1P_2$. Тоді будь-який трикутник, утворений точками P_1, P_2 і точкою на площині π, буде рівнобедреним, і, відповідно, сутність теореми полягає в тому, що її умови виключають зіткнення мас m_1, m_2, m_3 і можливість перетину точкою P_3, в якій зосереджено масу m_3, площини π. Цікавим у цьому сенсі є той факт, що в системі Сонце – Земля – Місяць, якщо стійкою за Хіллом вважати пару Сонце – Земля, рух Місяця задовольняє умову 3 теореми.

5. Про обмежену задачу трьох тіл. Розглянемо такий випадок задачі трьох тіл, коли маса m_3 третього тіла є значно меншою за маси першого і другого тіл $(m_1 \geq m_2 \gg m_3)$. Зокрема, припустимо, що маса m_3 третього тіла настільки мала, що її вплив на рух тіл з масами m_1 і m_2 є дуже слабким. Тоді, як відомо [6], приходимо до класичної моделі обмеженої задачі трьох тіл

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathcal{G} m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathcal{G} m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathcal{G}\left(-m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3} - m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

Щоб одержати рівняння (24), необхідно в рівняннях (2) покласти $m_3 = 0$. Таким же способом отримуємо для обмеженої задачі трьох тіл і аналог рівнянь (16). Зокрема, маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} r_{12}^2\right)^{\cdot\cdot} &= v_{12}^2 + G\left\{ -\frac{m_1 + m_2}{r_{12}} \right\}, \\ \left(\frac{1}{2} r_{13}^2\right)^{\cdot\cdot} &= v_{13}^2 + G\left\{ -\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{2r_{12}}\left[\frac{r_{23}^2 - r_{13}^2}{r_{12}^2} - 1\right] + \frac{m_2}{2r_{23}}\left[\frac{r_{12}^2 - r_{13}^2}{r_{23}^2} - 1\right] \right\}, \\ \left(\frac{1}{2} r_{23}^2\right)^{\cdot\cdot} &= v_{23}^2 + G\left\{ -\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{2r_{12}}\left[\frac{r_{13}^2 - r_{23}^2}{r_{12}^2} - 1\right] + \frac{m_1}{2r_{13}}\left[\frac{r_{12}^2 - r_{23}^2}{r_{13}^2} - 1\right] \right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Оскільки наявність пари тіл (m_1, m_2), стійкої за Хіллом, є органічною частиною обмеженої задачі трьох тіл, то цілком природно сформулювати для неї наслідок одержаної вище теореми.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ — *дистальний рух системи* (24), *який належить множині від'ємного рівня інтеграла Якобі. Тоді при виконанні умови*

$$|r_{23}(t) - r_{13}(t)| \geq r_0 \qquad \forall t \in R, \quad 0 < r_0 = \text{const},$$

розглядуваний рух є стійким за Лагранжем.

Доведення. Оскільки відповідно до постановки обмеженої задачі трьох тіл два масивних тіла притягують третє тіло з нескінченно малою масою, але самі ним не притягуються, то величини v_{13} і v_{23} в рівняннях (25) на підставі дистальності розглядуваного руху є обмеженими. Тому, скориставшись далі рівняннями (25) і викладеною вище схемою доведення теореми, робимо висновок про справедливість наслідку 2.

При $|\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{12}|^0 = \text{const}$, а також від'ємній і достатньо великій за модулем сталій інтеграла Якобі, з огляду на структуру поверхонь Хілла [6], в обмеженій задачі існують стійкі за Лагранжем рухи, що задовольняють наслідок 2.

Рівність $m_3 = 0$ в обмеженій задачі трьох тіл більшою мірою є математичною абстракцією, ніж відображенням реальної ситуації, коли маса m_3 хоч і мала, проте скінченна. А це означає, що за умови скінченності маси m_3 знехтувані в рівняннях (2) доданки не є малими принаймні в точках зіткнення маси m_3 з масами m_1 і m_2, включаючи й деякі їх околи. Отже, якщо маса m_3 є скінченною, то для забезпечення коректності моделі обмеженої задачі трьох тіл постулювання дистальності розглядуваних рухів виглядає цілком природним. Зауважимо, що питання скінченності малої маси m_3 в обмеженій задачі трьох тіл і наслідки, які звідси випливають, більш докладно розглянуто в роботі [7]. У зв'язку з [7] інтерес становлять співвідношення (11), що дозволяють отримати величини r_{13}^2 і r_{23}^2 як функції параметрів, які характеризують рух тіл з масами m_1, m_2:

$$
\begin{aligned}
r_{13}^2 &= \frac{M\left[(m_1 + m_3)r_1^2 + m_2 r_2^2\right]}{m_3^2} - \frac{m_2(m_1 + m_3)r_{12}^2}{m_3^2}, \\
r_{23}^2 &= \frac{M\left[m_1 r_1^2 + (m_2 + m_3)r_2^2\right]}{m_3^2} - \frac{m_1(m_2 + m_3)r_{12}^2}{m_3^2}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Оскільки в обмеженій задачі трьох тіл вважається, що рух мас m_1 і m_2 є малим збуренням задачі двох тіл, то в конкретній ситуації, яка моделює обмежену задачу, вирази (26) можна розглядати як критерій прийнятності моделі обмеженої задачі трьох тіл. Це означає, що коли рух мас m_1 і m_2 дійсно відповідає малому збуренню задачі двох тіл, то вирази (26), які визначають квадрати відстаней r_{13}^2 і r_{23}^2, повинні достатньо точно узгоджуватися з реальним рухом тіла з малою масою m_3.

Поряд з формулами (26) корисним може виявитися також розгляд виразу

$$
r_3^2 = \frac{1}{m_3^2}\left[(m_1 + m_2)\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right) - m_1 m_2 r_{12}^2\right],
$$

який отримуємо з першої рівності (12).

Дана робота є дещо доповненим варіантом препринта [8].

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 635 с.
2. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 500 с.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
4. *Голубев В. Г., Гребеников Е. А.* Проблема трех тел в небесной механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 240 с.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 3. – 304 с.
6. *Рой А. Е.* Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.
7. *Sosnitskii S. P.* On the Lagrange and Hill stability of the motion of certain systems with Newtonian potential // Astron. J. – 1999. – **117**, № 6. – P. 3054–3058.
8. *Sosnitskii S. P.* On the Lagrange stability of the motion for the three-body problem. – Kyiv, 2003. – 13 p. – Preprint 2003.2.

Одержано 27.07.2004