УДК 519.21

Н. Н. Вахания, В. В. Кварацхелия, В. И. Тариеладзе*
(Ин-т вычислит. математики АН Грузии, Тбилиси)

СЛАБО СУБГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

A survey of properties of weakly sub-Gaussian random elements in infinite-dimensional spaces is given. Some new results and examples are also presented.

Наведено огляд властивостей слабко субгауссових випадкових елементів у нескінченновимірних просторах, а також декілька нових результатів та прикладів.

1. Введение. Субгауссовские случайные величины введены Ж. П. Каханом в 1960 г. в [1]. В этой работе в качестве мотивации введения этого понятия назван известный цикл работ Пэли и Зигмунда 1932 г. (см. [2]). Впоследствии это понятие было использовано (явно или неявно) многими авторами, изучавшими регулярность траекторий гауссовских (и не только гауссовских) случайных процессов в терминах поведения их приращений [3 – 6].

Более детальное изучение собственно субгауссовских случайных величин было возобновлено в работах В. В. Булдыгина, Ю. В. Козаченко [7] и Е. И. Островского [8]. После этих работ возник интерес к изучению аналогов понятия субгауссовской случайной величины для случайных элементов со значениями в общих банаховых пространствах. Отметим в этой связи работы Фукуда [9] и Антонини [10]. Эти работы вместе с упомянутыми выше послужили мотивацией для данного исследования.

2. Предварительные сведения. Будем использовать обычные для вероятностной литературы соглашения и обозначения. В частности, будем считать, что фиксировано некоторое, достаточно богатое, основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. С произвольной случайной величиной $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ свяжем функцию $M_f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$:

$$M_f(t) = \mathbb{E} e^{tf}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{E}$ — символ математического ожидания.

Исходным для последующего изложения является следующее свойство центрированных гауссовских случайных величин: если g — центрированная (т. е. $\mathbb{E} g = 0$) гауссовская случайная величина, то

$$M_g(t) = e^{t^2 \mathbb{E} g^2 / 2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Напомним, что гауссовская центрированная случайная величина g с $\mathbb{E} g^2 = 1$ называется стандартной гауссовской случайной величиной.

Следуя [1], будем говорить, что случайная величина $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ является *субгауссовской*, если для некоторого a, $0 \le a < \infty$, выполняется неравенство

$$M_f(t) \le e^{t^2 a^2 / 2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Имея в виду отмеченные свойства центрированных гауссовских случайных величин, можно сказать, что случайная величина $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ является субгаус-

---

* Частично поддержан грантом MGYT BFM2003-05878.

совской в том и только в том случае, если найдется такая центрированная гауссовская случайная величина $g : \Omega \to \mathbb{R}$, что

$$M_f(t) \le M_g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Этим наблюдением можно объяснить происхождение названия *субгауссовская случайная величина*.

В дальнейшем для произвольной субгауссовской случайной величины f через $\tau(f)$ будем обозначать число, определяемое равенством

$$\tau(f) = \inf\left\{ a \in [0, \infty) : M_f(t) \le e^{t^2 a^2/2} \text{ для всех } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Число $\tau(f)$ будем называть *субгауссовским стандартом* f (см. [7, 11]; в [1] используется термин *гауссовское отклонение*).

Предложение 2.1. *Пусть* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина.*

A. *Если* $r > 0$ — *такое число, что* $M_f(r) + M_f(-r) < \infty$, *то*:

a_1) $\mathbb{E}\left(|f|^n \exp\{t|f|\} \right) \le \dfrac{n!}{(r-t)^n} M_{|f|}(r)$ *для всех* $t \in (-r, r)$ *и* $n \in \mathbb{N}$;

a_2) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|t|^n \mathbb{E}|f|^n}{n!} = M_{|f|}(|t|) \le M_{|f|}(r) < \infty$

и

$$M_f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E} f^n}{n!}, \quad t \in (-r, r);$$

a_3) $M_f(\cdot)$ *является аналитической функцией на* $(-r, r)$ *и ее производные* $M_f^{(n)}$ *определяются равенством*

$$M_f^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} \mathbb{E}\left(f^n \exp\{tf\} \right), \quad t \in (-r, r), \quad n \in \mathbb{N}.$$

B. *Если* f — *субгауссовская случайная величина с субгауссовским стандартом* $\tau(f)$, *то*:

b_1) $M_f(t) \le e^{t^2 \tau^2(f)/2}, \quad t \in \mathbb{R}$;

b_2) $M_{|f|}(|t|) \le 2e^{t^2 \tau^2(f)/2}, \quad t \in \mathbb{R}$;

b_3) $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|t|^n \mathbb{E}|f|^n}{n!} = M_{|f|}(|t|) \le 2e^{t^2 \tau^2(f)/2} < \infty, \quad t \in \mathbb{R}$;

b_4) $\mathbb{E} f = 0, \quad \left(\mathbb{E} f^2 \right)^{1/2} \le \tau(f)$;

b_5) *если* $\tau(f) = \left(\mathbb{E} f^2 \right)^{1/2}$, *то* $\mathbb{E} f^3 = 0$ *и* $\mathbb{E} f^4 \le 3\left(\mathbb{E} f^2 \right)^2$;

b_6) $\mathbb{E} e^{tf^2} \le \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2t\tau^2(f)}}, \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{2\tau^2(f)} \right)$.

Доказательство. Справедливость утверждений a$_1$) – a$_3$), b$_1$) – b$_3$) легко можно проверить. Используя a$_2$) и b$_1$), записываем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \, \mathbb{E} f^n}{n!} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \left(\frac{\tau^2(f)}{2} \right)^n,$$

и так как это неравенство выполняется для каждого $t \in \mathbb{R}$, из него можно вывести утверждения b$_4$) и b$_5$). Для доказательства утверждения b$_6$) положим, что $t \in \left(0, \dfrac{1}{2\tau^2(f)} \right)$ и γ_t — симметрическая гауссовская мера в $\mathbb{R}$ с дисперсией $2t$. Тогда для всех $\omega \in \Omega$

$$e^{tf^2(\omega)} = \int_{\mathbb{R}} e^{xf(\omega)} d\gamma_t(x).$$

Отсюда с учетом утверждения b$_1$) и теоремы Фубини получаем

$$\mathbb{E} e^{tf^2} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} e^{xf} d\gamma_t(x) \le \int_{\mathbb{R}} e^{x^2 \tau^2(f)/2} d\gamma_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\tau^2(f)}}.$$

Утверждения b$_5$) и b$_6$) были доказаны ранее в [11].

Следуя [7], будем говорить, что субгауссовская случайная величина f является *строго субгауссовской,* если $\tau(f) = \left(\mathbb{E} f^2 \right)^{1/2}$.

Обозначим через $G(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, или $G(\Omega)$, множество всех центрированных гауссовских случайных величин $g: \Omega \to \mathbb{R}$; через $SSG(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, или $SSG(\Omega)$, множество всех строго субгауссовских случайных величин $f: \Omega \to \mathbb{R}$; через $SG(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, или $SG(\Omega)$, множество всех субгауссовских случайных величин $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

Легко видеть, что $G(\Omega) \subset SSG(\Omega) \subset SG(\Omega)$.

В [7, 11] установлено, что:

a) $SG(\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы $\tau(\cdot)$; для $f \in SG(\Omega)$ число $\tau(f)$ называют также *субгауссовской нормой* f;

b) $SG(\Omega)$ совпадает с подпространством пространства Орлича $L_\Phi(\Omega)$, где $\Phi(x) = e^{x^2} - 1$.

Однако множества $G(\Omega)$ и $SSG(\Omega)$ не являются векторными подпространствами $SG(\Omega)$; более того, сумма двух центрированных ортогональных гауссовских случайных величин может не быть строго субгауссовской случайной величиной (см. пример 3.9 ниже).

Для альтернативной характеризации субгауссовости нам понадобятся две общие леммы. Предварительно введем следующие обозначения. Для произвольной случайной величины f обозначим

$$\vartheta_1(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{(2n-1)!!} \mathbb{E} |f|^{2n} \right)^{1/2n}, \quad \vartheta_2(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n^n} \mathbb{E} |f|^{2n} \right)^{1/2n},$$

где

$$(2n-1)!! = 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для индикатора множества A используем обычное обозначение 1_A.

Лемма 2.1. *Пусть* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина. Тогда*:

A) $\vartheta_2(f) \leq \vartheta_1(f) \leq \sqrt{\dfrac{e}{2}}\vartheta_2(f)$;

B) *если* $t > 0$, *то* $\mathbb{E}|f|^p \leq \left(\dfrac{p}{e}\right)^p t^{-p}\,\mathbb{E}e^{t|f|}, \quad p > 0$;

C) *если* f — *такая случайная величина, что при некоторых* $a \geq 0$ *и* $b \geq 1$

$$\mathbb{E}e^{t|f|} \leq be^{a^2t^2/2}, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

то справедливы следующие соотношения:

c_1) $\mathbb{E}|f|^p \leq b\left(\dfrac{p}{e}\right)^{p/2}a^p, \quad p > 0$;

c_2) $\vartheta_2(f) \leq \left(\dfrac{2b}{e}\right)^{1/2}a$;

c_3) $\vartheta_1(f) \leq b^{1/2}a$;

c_4) $\mathbb{P}[|f|>x] \leq be^{-x^2/(2a^2)}, \quad x \geq 0$;

c_5) $\mathbb{E}\left(e^{\varepsilon f^2}1_{[|f|\geq t]}\right) \leq \dfrac{b}{1-2a^2\varepsilon}e^{\left(\varepsilon-1/(2a^2)\right)t^2}, \quad \varepsilon < \dfrac{1}{2a^2}, \quad t \geq 0.$

Доказательство. Утверждение **A**) следует из соотношений $(2n/e)^n \leq \leq (2n-1)!! \leq n^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Справедливость утверждения **B**) следует из неравенства

$$x^p \leq \left(\frac{p}{e}\right)^p e^x, \quad x > 0, \quad p > 0. \tag{2.2}$$

С учетом утверждения **B**) и неравенства (2.1) для любого $t > 0$ имеем $\mathbb{E}|f|^p \leq \leq (p/e)^p t^{-p} be^{t^2a^2/2}$. Полагая в этом неравенстве $t = \sqrt{p}/a$, получаем соотношение c_1).

Соотношение c_2) следует из соотношения c_1) и определения ϑ_2, соотношение c_3) — из соотношений c_2) и **A**).

В силу неравенства Маркова с учетом (2.1) для любых $t, x > 0$ имеем $\mathbb{P}[|f|>x] \leq e^{-tx}\mathbb{E}e^{t|f|} \leq be^{-tx+t^2a^2/2}$. Полагая в этом неравенстве $t = x/a^2$, получаем соотношение c_4).

По формуле интегрирования по частям и с учетом соотношения c_4) при $\varepsilon < < 1/(2a^2)$ и $t > 0$ имеем

$$\mathbb{E}\left(e^{\varepsilon f^2}1_{[|f|\geq t]}\right) = e^{\varepsilon t^2}\,\mathbb{P}[|f|\geq t] +$$

$$+ \int_t^\infty \mathbb{P}[|f|>x]\,de^{\varepsilon x^2} \leq \frac{1}{1-2a^2\varepsilon}e^{\left(\varepsilon-1/(2a^2)\right)t^2},$$

что доказывает справедливость соотношения c_5).

***Следствие* 2.1.** *Пусть* f — *субгауссовская случайная величина с субгауссовским стандартом* $\tau(f)$. *Тогда*:

a) $\left(\mathbb{E}|f|^p\right)^{1/p} \le \beta_p \tau(f)$ *для каждого* $p > 0$, *где*

$$\beta_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \le 2, \\ 2^{1/p}(p/e)^{1/2}, & \text{если } 2 < p < \infty; \end{cases}$$

b) $\vartheta_2(f) \le \left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)\tau(f)$;

c) $\vartheta_1(f) \le \sqrt{2}\,\tau(f)$;

d) $\mathbb{P}[|f| > x] \le 2e^{-x^2/\left(2\tau^2(f)\right)}, \quad x \ge 0$;

e) $\mathbb{E}\left(e^{\varepsilon f^2} 1_{[|f| \ge t]}\right) \le \dfrac{2}{1 - 2\tau^2(f)\varepsilon} e^{\left(\varepsilon - 1/\left(2\tau^2(f)\right)\right)t^2}, \quad \varepsilon < \dfrac{1}{2\tau^2(f)}, \quad t \ge 0.$

Доказательство. Утверждение a) в случае $p \le 2$ следует из предложения 2.1, b_4). Остальные утверждения следуют из предложения 2.1, b_2) и леммы 2.1, **C**).

***Замечание* 2.1.** Точные значения констант в случае следствий 2.1, a) и 2.1, b) нам неизвестны. Если g — центрированная гауссовская случайная величина с $\sigma = \left(\mathbb{E}g^2\right)^{1/2}$, то имеют место следующие точные утверждения:

a) $\left(\mathbb{E}|g|^p\right)^{1/p} = \pi^{-1/(2p)}\sqrt{2}\left(\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)\right)^{1/p} = \sigma, \quad p > 0$;

b) $\vartheta_2(g) = \vartheta_1(g) = \sigma$;

c) $\mathbb{P}[|g| > x] \le e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad x \ge 0$;

d) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{1 + x/\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \le \mathbb{P}[|g| \ge x], \; x \ge 0$ (см. [12], предложение 2.17);

e) $$\mathbb{E}e^{\varepsilon g^2} = \begin{cases} (1 - 2\varepsilon\sigma^2)^{-1/2}, & \text{если } \varepsilon < \dfrac{1}{2\sigma^2}, \\ \infty, & \text{если } \varepsilon \ge \dfrac{1}{2\sigma^2}. \end{cases}$$

***Замечание* 2.2.** Используя следствие 2.1, d) и замечание 2.1, d), можно заключить, что для субгауссовской случайной величины f и стандартной гауссовской случайной величины g выполняется неравенство

$$\mathbb{P}[|f| > x] \le \mathbb{P}\left[|g| > \frac{x}{\sqrt{2}\,\tau(f)}\right], \quad x \ge 2\tau(f)$$

(ср. [11, с. 15], доказательство теоремы 1.1.1).

Лемма 2.2. *Пусть* f — *некоторая случайная величина. Следующие утверждения эквивалентны*:

i) $\vartheta_2(f) < \infty$;

ii) $\vartheta_1(f) < \infty$;

iii) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{E}e^{\varepsilon f^2} < \infty$;

iv) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{P}[\,|f| > x\,] = O\!\left(e^{-\varepsilon x^2}\right)$, $x \to \infty$;

v) *существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $c \geq 1$ *такие, что* $\mathbb{P}[\,|f| > x\,] \leq c e^{-\varepsilon x^2}$, $x > 0$;

vi) *существуют* $a \geq 0$ *и* $b \geq 1$ *такие, что* $\mathbb{E} e^{t|f|} \leq b e^{t^2 a^2/2}$, $t \geq 0$;

vii) *существуют* $a \geq 0$ *и* $b \geq 0$ *такие, что* $\mathbb{E} e^{tf} \leq b e^{t^2 a^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Кроме того,

a) $\vartheta_2(f) < \infty \Rightarrow \mathbb{E} e^{\varepsilon f^2} \leq \dfrac{1}{1 - \varepsilon e \vartheta_2^2(f)}$ *для всех* $\varepsilon < \dfrac{1}{e \vartheta_2^2(f)}$;

b) *если* $\varepsilon > 0$ *и* $c \geq 1$ *выбраны так, что верно* v), *то*

$$\mathbb{E} e^{\varepsilon_1 f^2} \leq \frac{c\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} \quad \text{для всех} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon;$$

c) *если* $\varepsilon > 0$ *выбрано так, что верно* iii), *то*

$$\mathbb{E} e^{t|f|} \leq e^{t^2/(4\varepsilon)} \mathbb{E} e^{\varepsilon f^2} \quad \text{для всех} \quad t \geq 0;$$

d) *если* $\varepsilon > 0$ *выбрано так, что верно* iii), *то*

$$\vartheta_2(f) \leq \sqrt{\frac{1}{e}} \left(\mathbb{E} e^{\varepsilon f^2}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};$$

e) *если* $\varepsilon > 0$ *и* $c \geq 1$ *выбраны согласно* v), *то*

$$\mathbb{E} e^{t|f|} \leq \frac{c\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} e^{t^2/(4\varepsilon_1)} \quad \text{для всех} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon \quad \text{и} \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Эквивалентность i) $\Leftrightarrow$ ii) вытекает из леммы 2.1, A). Импликация i) $\Rightarrow$ iii) следует из сформулированного во второй части этой леммы утверждения a). Она легко вытекает из неравенств $\mathbb{E} f^{2n} \leq n^n (\vartheta_2(f))^{2n}$, $n^n / n! \leq e^n$, $n = 1, 2, \ldots$, в силу которых

$$\mathbb{E} e^{\varepsilon f^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \mathbb{E} f^{2n}}{n!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon e \vartheta_2^2(f)\right)^n = \frac{1}{1 - \varepsilon e \vartheta_2^2(f)}.$$

Импликации iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) очевидны. Импликация v) $\Rightarrow$ iii) содержится в утверждении b), а утверждение b) доказывается по формуле интегрирования по частям: если $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то

$$\mathbb{E} e^{\varepsilon_1 f^2} = 2\varepsilon_1 \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}[\,|f| > x\,] x e^{\varepsilon_1 x^2} dx \leq 2\varepsilon_1 c \int_{\mathbb{R}_+} e^{(\varepsilon_1 - \varepsilon)x^2} x\, dx = \frac{c\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1}.$$

Импликация iii) $\Rightarrow$ vi) содержится в утверждении c), которое следует из очевидного неравенства

$$tx \leq \frac{t^2}{4\varepsilon} + \varepsilon x^2 \quad \text{для всех} \quad t, x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0.$$

Импликации vi) $\Rightarrow$ ii) и c) $\Rightarrow$ d) справедливы согласно лемме 2.1, первая следует из соотношения c_3), вторая — из соотношения c_2), утверждение e) следует из утверждений c) и b); импликация vi) $\Rightarrow$ vii) очевидна. Импликация vii) $\Rightarrow$ vi) следует из очевидного неравенства $e^{|x|} \le e^x + e^{-x}$.

Следствие 2.2 (ср. [7], лемма 2, и [11], теорема 1.1.3). *Пусть f — случайная величина, для которой $\vartheta_1(f) < \infty$. Тогда*:

a) *если* $\mathbb{E} f^{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (*в частности, если f — симметричная случайная величина*), *то f — субгауссовская случайная величина и*

$$\tau(f) \le \vartheta_1(f) \le \sqrt{\frac{e}{2}}\vartheta_2(f);$$

b) *если* $\mathbb{E} f^{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (*в частности, если f — симметричная случайная величина*) *и* $\vartheta_1(f) = \left(\mathbb{E} f^2\right)^{1/2}$, *то f — строго субгауссовская случайная величина*;

c) $\mathbb{E} e^{tf} \le t\mathbb{E} f + e^{\sqrt{2{,}05}t^2 \vartheta_1^2(f)/2}$, $t \in \mathbb{R}$;

d) *если* $\mathbb{E} f = 0$, *то f — субгауссовская случайная величина и*

$$\tau(f) \le \sqrt[4]{2{,}05}\,\vartheta_1(f) \le \sqrt[4]{2{,}05}\sqrt{\frac{e}{2}}\vartheta_2(f).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2 имеем $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n \mathbb{E}|f|^n}{n!} = \mathbb{E} e^{|t||f|} <$ $< \infty$, и поэтому

$$\mathbb{E} e^{tf} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E} f^n}{n!}, \tag{2.3}$$

где ряд сходится абсолютно.

a) Если $\mathbb{E} f^{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то равенство (2.3) принимает вид

$$\mathbb{E} e^{tf} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} \mathbb{E} f^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) и соотношений $\mathbb{E} f^{2n} \le \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}(\vartheta_1(f))^{2n}$ получаем неравенство $\tau(f) \le$ $\le \vartheta_1(f)$.

Утверждение b) следует из утверждения a).

c) Пусть $x \in \mathbb{R}$ и q — произвольное положительное число. Ввиду того, что $x \le 1/(4q) + qx^2$, для каждого натурального n имеем $x^{2n+1} \le x^{2n}/(4q) +$ $+ qx^{2n+2}$. Поэтому для всех $q > 0$ имеем

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le 1 + x + \left(1 + \frac{1}{12q}\right)\frac{x^2}{2} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4q(2n+1)} + 2nq\right)\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Соотношение $1+\frac{1}{4q(2n+1)}+2nq \le \left(1+\frac{1}{20q}+4q\right)^{n/2}$ справедливо для всех $q >$ > 0, если $n \ge 2$. Вместе с тем неравенство $1+\frac{1}{12q} \le \left(1+\frac{1}{20q}+4q\right)^{1/2}$ имеет место для всех q начиная с некоторого положительного числа (например, $1/5$). Следовательно, для таких значений q получаем неравенство

$$e^x \le 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{20q}+4q\right)^{n/2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Полагая теперь $q = 1/5$, получаем оценку

$$e^x \le 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty}(2{,}05)^{n/2}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \left(= x + \operatorname{ch}\left(\sqrt[4]{2{,}05}\,x\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Полагая в этом неравенстве tf вместо x и интегрируя, имеем

$$\mathbb{E}e^{tf} \le 1 + t\mathbb{E}f + \sum_{n=1}^{\infty}(2{,}05)^{n/2}\frac{\mathbb{E}f^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.6}$$

и доказательство утверждения a) завершается применением (2.6) с учетом неравенств $\mathbb{E}f^{2n} \le \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}(\vartheta_1(f))^{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Утверждение d) следует из утверждения c).

***Замечание* 2.3.** Следствие 2.2, d), по существу, имеется в [1] (предложения 7 и 8). Оно получено также в [7] с константами $e^{9/16}/\sqrt{2}$ (в симметричном случае) и $(3{,}1)^{1/4}e^{9/16}/\sqrt{2}$ (в центрированном случае). Предложенная здесь формулировка утверждения a) в следствии 2.2 представляется нам новой. При доказательстве мы следовали схеме [7], однако в отличие от [7] предварительно обосновали равенство (2.3) и выделили чисто функциональное неравенство (2.5).

Предложение 2.2. 1. *Случайная величина* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *является субгауссовской в том и только в том случае, если* $\vartheta_2(f) < \infty$ *и* $\mathbb{E}f = 0$.

2. $\vartheta_2(\cdot)$ *является нормой на* $SG(\Omega)$ *и*

$$(2{,}05)^{-1/4}\sqrt{\frac{4}{e}}\,\tau(f) \le \vartheta_2(f) \le \frac{2}{\sqrt{e}}\tau(f), \quad f \in SG(\Omega).$$

3. $\vartheta_1(\cdot)$ *является нормой на* $SG(\Omega)$ *и*

$$(2{,}05)^{-1/4}\tau(f) \le \vartheta_1(f) \le \sqrt{2}\,\tau(f), \quad f \in SG(\Omega).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 2.1, A) и следствия 2.2, d). Второе и третье утверждения также легко доказываются: свойства нормы функционалов ϑ_2 и ϑ_1 следуют из их определений, а соответствующие оценки вытекают из леммы 2.1, A) и следствий 2.2, d), 2.1, b) и 2.1, c).

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина. Следующие утверждения эквивалентны*:

i) f — *субгауссовская случайная величина*;

ii) $\vartheta_2(f) < \infty$ *и* $\mathbb{E} f = 0$;

iii) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{E} e^{\varepsilon f^2} < \infty$ *и* $\mathbb{E} f = 0$;

iv) *существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $c \geq 1$ *такие, что для всех* $x \geq 0$ *имеем* $\mathbb{P}[\,|f| > x\,] \leq c^{-\varepsilon x^2}$ *и* $\mathbb{E} f = 0$;

v) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{P}[\,|f| > x\,] = O\left(e^{-\varepsilon x^2}\right)$ *при* $x \to \infty$ *и* $\mathbb{E} f = 0$;

vi) *существуют* $a \geq 0$ *и* $b \geq 1$ *такие, что для всех* $t \geq 0$ *имеем* $\mathbb{E} e^{t|f|} \leq \leq b e^{t^2 a^2 / 2}$ *и* $\mathbb{E} f = 0$;

vii) *существуют* $a \geq 0$ *и* $b \geq 0$ *такие, что для всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеем* $\mathbb{E} e^{tf} \leq \leq b e^{t^2 a^2 / 2}$ *и* $\mathbb{E} f = 0$.

В самом деле, эквивалентность iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) очевидна, i) $\Leftrightarrow$ ii) следует из первого утверждения предложения 2.2. Эквивалентности ii) $\Leftrightarrow$ iii) и ii) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ vi) $\Leftrightarrow$ vii) имеются согласно лемме 2.2.

***Замечание* 2.4.** Эквивалентность i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ v) формулируется в [13, с. 108] (гл. VI, упр. 10), эквивалентность i) $\Leftrightarrow$ vi) отмечается здесь, по-видимому, впервые.

3. Примеры субгауссовских случайных величин. С помощью характеризационной теоремы 2.1 легко привести примеры субгауссовских случайных величин. Здесь мы укажем некоторые из них, попутно отмечая необходимые для дальнейшего дополнительные свойства.

***Пример* 3.1.** Центрированная гауссовская случайная величина g является строго субгауссовской, $\tau(g) = \left(\mathbb{E} g^2\right)^{1/2} = \vartheta_1(g) = \vartheta_2(g) = 1$.

***Пример* 3.2.** Симметричная бернуллиевская (радемахеровская) случайная величина ε. В этом случае $\mathbb{P}[\,\varepsilon = 1\,] = \mathbb{P}[\,\varepsilon = -1\,] = 1/2$ и

$$\mathbb{E} e^{t\varepsilon} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t \leq e^{t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ε — строго субгауссовская случайная величина и $\tau(\varepsilon) = \left(\mathbb{E}\varepsilon^2\right)^{1/2} = \vartheta_1(\varepsilon) = = \vartheta_2(\varepsilon) = 1$.

***Пример* 3.3.** Равномерно распределенная на интервале $[-1, 1]$ случайная величина f. В этом случае

$$\mathbb{E} f^{2n} = \frac{1}{2n+1}, \qquad \mathbb{E} e^{tf} = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \frac{\operatorname{sh} t}{t}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Прямой анализ показывает, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1/2} (2n+1)^{-1/2n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{\operatorname{sh} t}{t} \leq e^{t^2/6}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, f — строго субгауссовская случайная величина с $\tau(f) = = \vartheta_2(f) = \sqrt{1/3}$.

***Пример* 3.4.** Пусть f — случайная величина, $0 < a < \infty$, $\mathbb{P}[\,|f| \le a\,] = 1$, $\mathbb{E} f = 0$. Тогда f является субгауссовской и $\tau(f) \le a$. Субгауссовость очевидна в виду теоремы 2.1; оценка $\tau(f) \le a$ получена в [8] (в предположении симметричности f она получается легко: $\mathbb{E} e^{tf} \le \mathbb{E}\big((e^{tf} + e^{-tf})/2\big) \le \mathbb{E} e^{t^2 f^2/2} \le e^{t^2 a^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$).

Следующий пример показывает, что ограниченная центрированная (даже двухзначная) случайная величина может не быть строго субгауссовской.

***Пример* 3.5.** Пусть α, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$ и f_α — случайная величина с распределением $\mathbb{P}[\,f_\alpha = \beta\,] = \alpha$, $\mathbb{P}[\,f_\alpha = -\alpha\,] = \beta$. Имеем:

a) f_α — субгауссовская случайная величина и $\tau(f_\alpha) \le \max(\alpha, 1 - \alpha)$;

b) f_α — строго субгауссовская случайная величина $\Leftrightarrow \alpha = 1/2$.

В самом деле, утверждение a) следует из примера 3.4. Далее, очевидно, что при $\alpha = 1/2$ случайная величина f_α является строго субгауссовской. Обратно, пусть f_α — строго субгауссовская случайная величина. Тогда $\mathbb{E} f_\alpha^3 = \alpha\beta^3 - \beta\alpha^3$ и согласно предложению 2.1, b_5) $\alpha = 1/2$ и утверждение b) доказано.

***Пример* 3.6.** Пусть f_α — случайная величина с распределением

$$\mathbb{P}[\,f_\alpha = 1\,] = \mathbb{P}[\,f_\alpha = -1\,] = \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbb{P}[\,f_\alpha = 0\,] = 1 - \alpha,$$

где $0 < \alpha \le 1$. Справедливы следующие утверждения:

a) $\mathbb{E}|f_\alpha|^p = \alpha$ для всех $p > 0$;

b) $\mathbb{E} e^{tf_\alpha} = 1 + \alpha(\operatorname{ch} t - 1) = 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $t \in \mathbb{R}$;

c) $\sqrt{\alpha} \le \tau(f_\alpha) \le 1$;

d) $\alpha < \frac{1}{3} \Rightarrow \tau(f_\alpha) > \sqrt{\alpha}$, т. е. f_α не является строго субгауссовской случайной величиной;

e) $\alpha \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \tau(f_\alpha) = \sqrt{\alpha}$, т. е. f_α является строго субгауссовской случайной величиной;

f) $\alpha \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \vartheta_2(f_\alpha) = \sqrt{\alpha}$, т. е. $\vartheta_2(f_\alpha) = \|f_\alpha\|_{L_2}$;

g) если $\frac{1}{4} \le \alpha < \frac{1}{3}$, то $\sqrt{\alpha} = \vartheta_2(f_\alpha) < \tau(f_\alpha)$;

h) если $0 < \alpha \le \frac{1}{e}$, то $\left(2e\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-1} \le \vartheta_2^2(f_\alpha) \le \left(e\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-1}$;

i) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\tau(f_\alpha)}{\|f_\alpha\|_{L_2}} = \infty$.

В самом деле, утверждения a) и b) очевидны, утверждение c) следует из примера 3.5 и из предложения 2.1, b_4), утверждение d) — из предложения 2.1, b_5). Действительно, если f_α — строго субгауссовская случайная величина, то

$\alpha = \mathbb{E} f_\alpha^4 \le 3\big(\mathbb{E} f_\alpha^2\big)^2 = 3\alpha^2$, т. е. $\alpha \ge 1/3$. Докажем утверждение e). Легко видеть (например, по индукции), что $2^n n!/(2n)! \le (1/3)^{n-1}$. Следовательно, поскольку $\alpha \ge 1/3$, то $2^n n!/(2n)! \le \alpha^{n-1}$, т. е. $\alpha/(2n)! \le \alpha^n / 2^n n!$ для каждого натурального n. Последнее неравенство с учетом равенства b) дает

$$\mathbb{E} e^{tf_\alpha} \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{2^n n!} t^{2n} = e^{t^2\alpha/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т. е. $\tau(f_\alpha) \le \sqrt{\alpha}$. Для доказательства утверждения f) заметим, что по определению $\vartheta_2(f) = \sup_{n\ge 1}\big(1/\sqrt{n}\big)\alpha^{1/2n}$. Легко видеть, что для каждого натурального n из выполнения условия $\alpha \ge 1/4$ вытекает выполнение условия $\alpha \ge \alpha^{1/n}/n$, т. е. $\vartheta_2(f_\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Утверждение g) есть следствие утверждений f) и d). Как нетрудно проверить, при $0 < \alpha \le 1/e$ для каждого натурального n выполнены следующие неравенства: $(2e\ln(1/\alpha))^{-1} \le \sup_{n\ge 1}\big(\alpha^{1/n}/n\big) \le (e\ln(1/\alpha))^{-1}$, что доказывает справедливость утверждения h). Наконец, утверждение i) следует из утверждений a) и h) и из второго утверждения предложения 2.2.

***Замечание* 3.1.** Пример 3.6 по-своему примечателен: распределение f_α есть смесь $\big(\delta_{(-1)} + \delta_1\big)/2$ и δ_0. Оба эти распределения — строго субгауссовские, однако, согласно утверждению e) при $\alpha < 1/3$ их смесь не является таковой.

Для мотивации следующего примера приведем сначала одно утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть f_1 и f_2 — независимые субгауссовские случайные величины. Тогда*:

a) $\tau^2(f_1 + f_2) \le \tau^2(f_1) + \tau^2(f_2)$ [1];

b) $\tau^2(f_1) \le \tau^2(f_1 + f_2)$ [7];

c) *если f_1, f_2 — строго субгауссовские случайные величины, то $f_1 + f_2$ — строго субгауссовская случайная величина* [7].

Доказательство. Утверждение a) следует из равенства $\mathbb{E} e^{t(f_1+f_2)} = \mathbb{E} e^{tf_1}\, \mathbb{E} e^{tf_2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Далее, пусть $t \in \mathbb{R}$. Из выпуклости $x \mapsto e^{tx}$ и из $\mathbb{E} f_2 = 0$ следует (см. лемму 5.3.4 в [14])

$$\mathbb{E} e^{tf_1} \le \mathbb{E} e^{t(f_1+f_2)}.$$

Это неравенство, в силу произвольности t и предложения, 2.1 b_1), влечет утверждение b).

Утверждение c) следует из утверждения a), так как $\tau^2(f_1) + \tau^2(f_2) = \mathbb{E} f_1^2 + \mathbb{E} f_2^2 = \mathbb{E}(f_1 + f_2)^2$. Это равенство, утверждение a) и предложение 2.1, b_4) дают $\tau^2(f_1 + f_2) = \mathbb{E}(f_1 + f_2)^2$.

Следующий пример показывает, что предложения 3.1, a) и 3.1, c) не верны без предположения независимости, даже если f_1 и f_2 — стандартные гауссовские случайные величины.

***Пример* 3.7.** Пусть α, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$. Рассмотрим случайный вектор (g_1, g_2) в $\mathbb{R}^2$ с характеристической функцией

$$\mathbb{E}e^{i(t_1 g_1 + t_2 g_2)} = \alpha e^{-(t_1+t_2)^2/2} + \beta e^{-(t_1-t_2)^2/2}, \quad t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда:

a) $g_1,\ g_2$ — стандартные гауссовские случайные величины;

b) $\mathbb{E}g_1 g_2 = \alpha - \beta$; в частности, если $\alpha = 1/2$, то $\mathbb{E}g_1 g_2 = 0$;

c) $\zeta = g_1 + g_2$ — субгауссовская случайная величина и $\tau(\zeta) \le 2$;

d) $\zeta = g_1 + g_2$ не является строго субгауссовской.

В самом деле, утверждения a) и b) очевидны. Докажем утверждения c) и d). Для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\mathbb{E}e^{it\zeta} = \alpha e^{-2t^2} + \beta$. Отсюда получаем $\mathbb{E}\zeta^2 = 4\alpha$. Из неравенства

$$\alpha e^{2t^2} + \beta \le \alpha e^{2t^2} + \beta e^{2t^2} = e^{2t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

следует $\tau(\zeta) \le 2$, а из неравенства

$$\alpha e^{2t^2} + \beta = 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2t^2\right)^n}{n!} > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\alpha t^2\right)^n}{n!} = e^{2\alpha t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

вытекает $\tau(\zeta) > 2\sqrt{\alpha} = (\mathbb{E}\zeta^2)^{1/2}$. Следовательно, ζ не является строго субгауссовской.

***Замечание* 3.2.** То, что сумма двух строго субгауссовских случайных величин может не быть строго субгауссовской, было отмечено ранее в [7] (см. также [11, с. 26], пример 1.2.5).

4. Слабо субгауссовские случайные элементы. В дальнейшем X будет обозначать (конечномерное или бесконечномерное) действительное нормированное пространство, X^* — сопряженное к X банахово пространство. Значение линейного функционала $x^* \in X$ на элементе $x \in X$ будем обозначать через $\langle x^*, x \rangle$.

Как и прежде, будем считать, что фиксировано некоторое, достаточно богатое, основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Произвольное измеримое сепарабельнозначное отображение $\xi : \Omega \to X$ будем называть случайным элементом. Если $0 < p < \infty$, то будем говорить, что случайный элемент ξ в нормированном пространстве X:

имеет *сильный p-й порядок,* если $\mathbb{E}\|\xi\|^p < \infty$;

имеет *слабый p-й порядок,* если $\mathbb{E}\left|\left\langle x^*, \xi \right\rangle\right|^p < \infty$ для всех $x^* \in X$;

центрирован, если ξ имеет *слабый первый порядок* и $\mathbb{E}\langle x^*, \xi \rangle = 0$ для всех $x^* \in X^*$.

Будем говорить, что для случайного элемента ξ со слабым вторым порядком в нормированном пространстве X отображение $R : X^* \to X$ является:

ковариационным оператором, если

$$\left\langle Rx_1^*, x_2^* \right\rangle = \mathbb{E}\left\langle x_1^*, \xi \right\rangle \left\langle x_2^*, \xi \right\rangle - \mathbb{E}\left\langle x_1^*, \xi \right\rangle \mathbb{E}\left\langle x_2^*, \xi \right\rangle, \quad x_1^*,\ x_2^* \in X;$$

корреляционным оператором, если

$$\left\langle Rx_1^*, x_2^* \right\rangle = \mathbb{E}\left\langle x_1^*, \xi \right\rangle \left\langle x_2^*, \xi \right\rangle, \quad x_1^*,\ x_2^* \in X^*.$$

Пусть X — банахово пространство. Известно, что:

a) для каждого случайного элемента ξ слабо второго порядка в X существует ковариационный оператор $R_\xi : X^* \to X$ [14] (теорема 3.1.2);

b) каждый линейный симметричный положительный оператор $R : X^* \to X$ с сепарабельной областью значений является ковариационным оператором некоторого случайного элемента ξ слабо второго порядка в X [14] (теорема 3.2.2). В частности, если X — сепарабельное гильбертово пространство, то тождественный оператор $I : X^* \to X$ является ковариационным оператором [15, с. 110];

c) оператор $R : X^* \to X$ является ковариационным оператором некоторого случайного элемента ξ сильно второго порядка в X тогда и только тогда, когда для некоторой сильно 2-суммируемой последовательности (x_k) в X имеем

$$Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x^*, x_k \rangle x_k, \quad x^* \in X^*$$

[14] (предложение 3.2.3). В частности, если ξ — случайный элемент сильно второго порядка в X, то его ковариационный оператор $R_\xi : X^* \to X$ является ядерным (и, следовательно, компактным) оператором.

Покажем, что ковариационный оператор случайного элемента со слабым порядком r, $r > 2$, имеет свойство компактности. Это утверждение мы выведем из следующего предложения, которое осталось незамеченным в [14].

Предложение 4.1. *Пусть* X — *банахово пространство с сопряженным* X^*, B_{X^*} — *замкнутый единичный шар в* X^*, X^*_σ — *пространство* X^* *с топологией* $\sigma(X^*, X)$. *Пусть, далее,* $0 < p < r < \infty$, ξ — *случайный элемент в* X *со слабым порядком* r, $T_\xi : X^* \to L_r(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — *индуцированный оператор. Справедливы следующие утверждения*:

a) *множество* $\left\{ \left| \langle x^*, \xi \rangle \right|^p : x^* \in B_{X^*} \right\}$ *равномерно интегрируемо*;

b) T_ξ, *как оператор из* X^*_σ *в* L_p, *является секвенциально непрерывным*;

c) $T_\xi(B_{X^*})$ — *компактное множество в* L_p;

d) T_ξ, *как оператор* X^* *в* L_p, *является компактным.*

Доказательство. a) Согласно теореме о замкнутом графике оператор T_ξ ограничен и поэтому

$$\mathbb{E}\left(\left| \langle x^*, \xi \rangle \right|^p \right)^{r/p} = \mathbb{E}\left| \langle x^*, \xi \rangle \right|^r \le \| T_\xi \|^r < \infty, \quad x^* \in B_{X^*}.$$

b) Пусть $x_k^* \in X^*$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\langle x_k^*, x \rangle \to 0$ для всех $x \in X$. Нам нужно показать, что $T_\xi x_k^* \to 0$ в L_p, т. е. $\lim_k \mathbb{E}\left| \langle x_k^*, \xi \rangle \right|^p = 0$. По теореме Банаха – Штейнхауза имеем $\sup_k \| x_k^* \|^p < \infty$. Очевидно, $\left| \langle x_k^*, \xi(\omega) \rangle \right|^p \to 0$ для каждого $\omega \in \Omega$. Учитывая утверждение a), согласно теореме Витали о сходимости интегралов заключаем, что $\lim_k \mathbb{E}\left| \langle x_k^*, \xi \rangle \right|^p = 0$, и утверждение b) доказано.

c) Ввиду сепарабельнозначности ξ можем считать, что X сепарабельно. Как известно, B_{X^*} является метризуемым и компактным подмножеством в X^*_σ. Следовательно, с учетом утверждения b) получаем, что T_ξ, как отображение из $\left(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\right)$ в L_p, является непрерывным. Отсюда и из компактности $\left(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\right)$ следует утверждение c). Утверждение d) следует из утверждения c).

***Следствие* 4.1.** *Пусть X — банахово пространство и ξ — случайный элемент в X со слабым вторым порядком и ковариационным оператором $R_\xi : X^* \to X$. Если ξ имеет слабый порядок r при некотором r, $2 < r < \infty$, то R_ξ — компактный оператор.*

Доказательство. R_ξ можно представить в виде $R_\xi = T_\xi^* T_\xi$. В силу утверждения 4.1, d) T_ξ, как оператор из X^* в L_2, является компактным. Следовательно, компактен и R_ξ.

Возможные обобщения понятия субгауссовости для случайных векторов (элементов) в конечномерных и бесконечномерных нормированных пространствах рассмотрены в работах [8 – 10].

Определение 4.1. *Пусть X — (конечномерное или бесконечномерное) действительное нормированное пространство. Случайный элемент ξ в X называется*:

гауссовским, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются гауссовскими;

слабо субгауссовским, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются субгауссовскими;

строго субгауссовским, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются строго субгауссовскими;

F-субгауссовским, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются субгауссовскими и для некоторого $c \geq 0$ и всех $x^* \in X^*$ выполнено неравенство

$$\tau(\langle x^*, \xi \rangle) \leq c\left(\mathbb{E}\left|\left\langle x^*, \xi \right\rangle\right|^2\right)^{1/2};$$

γ-субгауссовским, если существует сепарабельнозначный центрированный гауссовский случайный элемент η в X такой, что для всех $x^* \in X^*$ выполнено неравенство

$$\mathbb{E}\exp\langle x^*, \xi \rangle \leq \mathbb{E}\exp\langle x^*, \eta \rangle.$$

Предложение 4.2. *Пусть X — банахово пространство, ξ — слабо субгауссовский случайный элемент в X, $T_\xi : X^* \to SG(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — индуцированный оператор. Справедливы следующие утверждения*:

a) *T_ξ — непрерывный линейный оператор из X^* в $SG(\Omega)$*;

b) $\tau_w(\xi) = \sup\limits_{x^* \in B_{X^*}} \tau\left(\left\langle x^*, \xi \right\rangle\right) < \infty$;

c) *ковариационный оператор R_ξ случайного элемента ξ является компактным и $\|R_\xi\| \leq \tau_w(\xi)$*;

d) *если $\dim(X) < \infty$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{\varepsilon\|\xi\|^2} < \infty$.*

Доказательство. Утверждение a) следует из теоремы о замкнутом графике, утверждение b) — из утверждения a). Первая часть утверждения c) следует из следствия 4.1, а вторая часть — из предложения 2.1, b_4). Утверждение d) следует стандартным путем из предложения 2.1, b_6).

Приведем следующий известный результат.

Теорема 4.1. *Пусть* ξ — *случайный элемент в нормированном пространстве* X. *Тогда*:

a) *если* ξ — *гауссовский случайный элемент, то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{E}e^{\varepsilon\|\xi\|^2} < \infty$ (*Ферник, Ландау и Шепп, Скороход, см.* [14], *следствие* 2, b) *предложения* 5.5.6);

b) *если* ξ — γ-*субгауссовский случайный элемент, то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{E}e^{\varepsilon\|\xi\|^2} < \infty$ ([9], *теорема* 3.4);

c) *если* $X = L_p$, $1 \le p < \infty$, *и* ξ — F-*субгауссовский случайный элемент в* X, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathbb{E}e^{\varepsilon\|\xi\|^2} < \infty$ ([9], *теорема* 4.3).

Исходя из этой теоремы и имея в виду предложение 4.2, d), естественно поставить вопрос: верен ли результат, аналогичный теореме 4.1, для слабо субгауссовских случайных элементов. Оказывается, что предложение 4.2, d) верно только в конечномерном случае. Для формулировки следующего результата введем обозначения:

$$\exp^{(m)}(x) = \exp\big(\exp^{(m-1)}(x)\big), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

и

$$\exp^{(1)}(x) = \exp(x) = e^x;$$

$$\ln^{(m)}(x) = \ln^{(1)}\big(\ln^{(m-1)}(x)\big), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

и

$$\ln^{(1)}(x) = \ln\big(\max(1, x)\big).$$

Ясно, что для каждого m функции $\exp^{(m)}$ и $\ln^{(m)}$ определены для всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.2 [16]. *В произвольном бесконечномерном нормированном пространстве* X *для любого натурального числа* m *существует симметричный счетнозначный слабо субгауссовский случайный элемент* ξ *в* X, *для которого*

$$\mathbb{E}\ln^{(m)}\|\xi\| = \infty.$$

Доказательство. Согласно лемме Дворецкого (см. [14], лемма 2.2.1), для каждого натурального j найдутся элементы $x_{j,1}, \ldots, x_{j,j}$ в X такие, что для всех действительных чисел $t_1, \ldots, t_j$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{j} t_k^2\right)^{1/2} \le \left\|\sum_{k=1}^{j} t_k x_{j,k}\right\| \le 2\left(\sum_{k=1}^{j} t_k^2\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Ясно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{j} \left|x^*(x_{j,k})\right|^2\right)^{1/2} = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{j} t_k x^*(x_{j,k})\right| : \sum_{k=1}^{j} t_k^2 \le 1\right\} \le$$

$$\le \|x^*\| \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{j} t_k x^*(x_{j,k})\right\| : \sum_{k=1}^{j} t_k^2 \le 1\right\} \le 2\|x^*\|, \quad x^* \in X^*. \tag{4.2}$$

Обозначим через p_0 целую часть числа $\exp^{(m+1)}(4)$ и пусть $p_k = p_0 + k$ для всех натуральных k. Очевидно, что числа p_k зависят также и от m. Легко видеть, что $\ln^{(m+2)}(p_k) > 1$ для каждого натурального k и m. Случайный элемент ξ построим по выбранным элементам $x_{j,k}$ следующим образом:

$$\mathbb{P}\Big[\,\xi = \pm\sqrt{\ln(p_k)}\,x_{j,k}\,\Big] = \frac{c}{2}\mu_j\,\mu_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где c — нормирующая константа и

$$\mu_k = \frac{1}{p_k \ln(p_k) \ln^{(2)}(p_k) \ldots \ln^{(m+1)}(p_k)\Big[\ln^{(m+2)}(p_k)\Big]^2}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Легко заметить, что ξ — симметричный счетнозначный случайный элемент, для которого $\mathbb{P}\Big[1 < \ln^{(m)}\|\xi\| < \infty\Big] = 1$. Для доказательства слабой субгауссовости случайного элемента ξ воспользуемся теоремой 2.1, согласно которой ξ является слабо субгауссовским случайным элементом тогда и только тогда, когда $\vartheta_2\big(\big\langle x^*, \xi \big\rangle\big) < \infty$. Отметим предварительно, что

$$[\ln(p_k)]^n \mu_k < \frac{[\ln(p_k)]^n}{p_k} \le \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n, k = 1, 2, \ldots,$$

и поэтому

$$\mathbb{E}\big\langle x^*, \xi \big\rangle^{2n} = c\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \sum_{k=1}^{j} \big\langle x^*, x_{j,k} \big\rangle^{2n} [\ln(p_k)]^n \mu_k \le$$

$$\le c\left(\frac{n}{e}\right)^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left[\sum_{k=1}^{j} \big\langle x^*, x_{j,k} \big\rangle^2\right]^n .$$

Теперь, применяя неравенство (4.2), получаем, что $\vartheta_2\big(\big\langle x^*, \xi \big\rangle\big) < \infty$ для каждого $x^* \in X^*$.

Остается показать, что $\mathbb{E}\ln^{(m)}\|\xi\| = \infty$. Это следует из левого неравенства в (4.1), согласно которому $\|x_{j,k}\| \ge 1$ для всех k и j, и из соотношения $\ln^{(m)}(\ln(x))^{1/2} \ge \ln\big(\ln^{(m)}(x)\big)^{1/2}$ для каждого натурального m и для всех $x \ge \exp^{(m+1)}(4)$, которое легко вывести из элементарного неравенства $\ln(\ln(x))^{1/2} \ge (\ln^{(2)}(x))^{1/2}$ для всех $x \ge e^{e^4} = \exp^{(2)}(4)$. В самом деле,

$$\mathbb{E}\ln^{(m)}\|\xi\| = c\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left(\sum_{k=1}^{j} \mu_k \ln^{(m)}\Big((\ln(p_k))^{1/2}\|x_{j,k}\|\Big)\right) \ge$$

$$\ge \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left(\sum_{k=1}^{j} \mu_k \ln^{(m+1)}(p_k)\right) = \infty,$$

что и требовалось доказать.

***Замечание* 4.1.** 1. Легко проверить, что для случайного элемента ξ, построенного в ходе доказательства теоремы 4.2, имеем $\mathbb{E}\ln^{(m+1)}\|\xi\| < \infty$.

2. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство с

ортонормированным базисом (e_k). Определим случайный элемент ξ в H соотношениями

$$\mathbb{P}[\,\xi = \pm p_k e_k\,] \;=\; \frac{c}{2}\mu_k, \quad k \;=\; 1, 2, \ldots,$$

где числа p_k, μ_k и c выбраны так, как при доказательстве теоремы 4.2. Тогда легко проверить, что ξ — слабо субгауссовский случайный элемент и

$$\mathbb{E}\ln^{(m+1)}\|\,\xi\,\| \;=\; \infty, \qquad \mathbb{E}\ln^{(m+2)}\|\,\xi\,\| \;<\; \infty.$$

3. Нетрудно показать, что в любом нормированном пространстве (даже на числовой оси) можно построить случайный элемент ξ, для которого $\mathbb{E}\ln^{(m)}\|\,\xi\,\| = \infty$ для любого m. Мы не знаем, справедлив ли следующий вариант теоремы 4.2: пусть X — произвольное бесконечномерное нормированное пространство. Тогда в X существует слабо субгауссовский случайный элемент ξ, для которого при всех натуральных m

$$\mathbb{E}\ln^{(m)}\|\,\xi\,\| \;=\; \infty.$$

***Замечание* 4.2.** Теорема 4.2 покрывает теорему 2.2.1 из [14], которая утверждает, что в любом бесконечномерном нормированном пространстве X существует счетнозначный случайный элемент, который имеет слабый порядок r для каждого $r > 0$ и не имеет сильного порядка p ни для какого $p > 0$.

Пусть X — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, $2 \le r < < \infty$. Введем по аналогии с [15] следующие обозначения:

$\mathbf{R}(X)$ — класс всех симметричных положительных сепарабельнозначных операторов $R: X^* \to X$;

$\mathbf{CR}(X)$ — подкласс $\mathbf{R}(X)$, состоящий из компактных операторов;

$\mathbf{R}_r(X)$ — подкласс $\mathbf{R}(X)$, состоящий из ковариационных операторов всех случайных элементов в X со слабым r-м порядком;

$\mathbf{R}_{w\,\mathrm{sub}}(X)$ — подкласс $\mathbf{R}(X)$, состоящий из ковариационных операторов всех сепарабельнозначных слабо субгауссовских случайных элементов в X;

$\mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$ — подкласс $\mathbf{R}(X)$, состоящий из ковариационных операторов всех гауссовских случайных элементов в X. Произвольный оператор $\mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$ будем называть также *гауссовской ковариацией*.

Известно, что $\mathbf{R}(X) = \mathbf{R}_2(X)$ [14] (теорема 3.2.2). Следствие 4.1 показывает, что если $2 < r < \infty$, то

$$\mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X) \subset \mathbf{R}_{w\,\mathrm{sub}}(X) \subset \mathbf{R}_r(X) \subset \mathbf{CR}(X).$$

Естественно возникают следующие вопросы: можно ли дать в подходящих терминах внутреннее описание классов $\mathbf{R}_r(X)$ при $r > 2$ и $\mathbf{R}_{w\,\mathrm{sub}}(X)$? Например, имеют ли место следующие равенства при всех $r > 2$:

$$\mathbf{R}_{w\,\mathrm{sub}}(X) \;=\; \mathbf{R}_r(X) \;= \mathbf{R}(X)?$$

Случайный элемент, рассмотренный в замечании 4.1 (2), имеет свойство

$$R_\xi \in \bigcap_{2<r<\infty} \mathbf{S}_r(H),$$

где $\mathbf{S}_r(H)$ при фиксированном r обозначает класс Шаттена (по поводу классов Шаттена см. [17]). Имея в виду этот факт, можно поставить вопрос: верны ли следующие равенства:

$$\mathbf{R}_r(H) = \mathbf{S}_r(H) \bigcap \mathbf{R}(H) \quad \text{для всех} \quad r > 2,$$

$$\mathbf{R}_{w\,\mathrm{sub}}(H) = \left(\bigcap_{2<r<\infty} \mathbf{S}_r(H) \right) \bigcap \mathbf{R}(H)?$$

Предложение 4.3. *Пусть* X *— банахово пространство,* ξ *—* γ*-субгауссовский случайный элемент в* X*. Тогда*:

a) ξ *— слабо субгауссовский случайный элемент*;

b) *существует* $S \in \mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$ *такой, что*

$$\left\langle R_\xi x^*, x^* \right\rangle \le \tau\big(\left\langle x^*, \xi \right\rangle\big) \le \left\langle S x^*, x^* \right\rangle, \quad x^* \in X^*;$$

c) $R_\xi \in \mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$.

Доказательство. По определению γ-субгауссовского случайного элемента существует центрированный гауссовский случайный элемент η в X такой, что

$$\mathbb{E}\exp\left\langle x^*, \xi \right\rangle \le \mathbb{E}\exp\left\langle x^*, \eta \right\rangle, \quad x^* \in X^*.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\exp\big(t\left\langle x^*, \xi \right\rangle\big) \le \exp\left(\frac{t^2\, \mathbb{E}\left\langle x^*, \eta \right\rangle^2}{2} \right) = \exp\left(\frac{t^2 \left\langle R_\eta x^*, x^* \right\rangle}{2} \right), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Очевидно, что утверждение a) вытекает из (4.3). Утверждение b) также следует из (4.3) (можем взять $S = R_\eta$). Докажем утверждение c). Согласно утверждению b) существует $S \in \mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$ такой, что $\left\langle R_\xi x^*, x^* \right\rangle \le \left\langle S x^*, x^* \right\rangle$ для всех $x^* \in X^*$. Из последнего соотношения вытекает $R_\xi \in \mathbf{R}_{\mathrm{gaus}}(X)$ ([14], следствие 2 предложения 6.3.4).

Предложение 4.4. *Пусть* X *— конечномерное банахово пространство и* ξ *— случайный элемент в* X*. Следующие утверждения эквивалентны*:

i) ξ *является слабо субгауссовским*;

ii) ξ *является* γ*-субгауссовским*;

iii) ξ *является* F*-субгауссовским.*

Доказательство. Импликация ii) $\Rightarrow$ i) следует из предложения 4.3. Импликация iii) $\Rightarrow$ i) очевидна. Покажем, что i) $\Rightarrow$ iii). Рассмотрим индуцированный оператор $T_\xi : X^* \to SG(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ввиду того, что $T_\xi(X^*)$ — конечномерное векторное пространство, в нем произвольные две нормы эквивалентны. В частности, эквивалентны нормы $\tau(\cdot)$ и $\|\cdot\|_{L_2}$. Следовательно, для некоторой константы $b > 0$ имеем

$$\tau\big(\left\langle x^*, \xi \right\rangle\big) \le b \left\| \left\langle x^*, \xi \right\rangle \right\|_{L_2} = b \left\langle R_\xi x^*, x^* \right\rangle^{1/2}, \quad x^* \in X^*,$$

где $R_\xi : X^* \to X$ — ковариационный оператор ξ, т. е. ξ является F-субгауссовским. Утверждение ii) следует из утверждения iii), так как в конечномерном пространстве произвольный ковариационный оператор является гауссовским.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты. Напомним следующее определение. Пусть X — нормированное пространство. Обозначим через

$l_2^{\text{weak}}(X)$ множество всех слабо 2-суммируемых последовательностей (x_k) в X, через $l_2^{\text{weak}}(X)$ векторное пространство. Кроме того, как легко видеть,

$$\|(x_k)\|_{2,w} = \sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x_k, x^*\right\rangle^2\right)^{1/2} < \infty \quad \text{для всех} \quad (x_k) \in l_2^{\text{weak}}(X),$$

и функционал $\|\cdot\|_{2,w}$ является нормой в $l_2^{\text{weak}}(X)$, а если X — банахово пространство, то $\left(l_2^{\text{weak}}(X), \|\cdot\|_{2,w}\right)$ также является банаховым пространством (см., например, [17]).

Следующий результат можно найти в [14] (теорема 5.4.4 и теорема 5.5.3 (б)).

Теорема 4.3. *Пусть X — произвольное банахово пространство, $(x_k) \in l_2^{\text{weak}}(X)$ и $R: X^* \to X$ — оператор, заданный равенством*

$$Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x^*, x_k\right\rangle x_k, \quad x^* \in X^*.$$

Если R — гауссовская ковариация и $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, то ряд $\sum_k x_k g_k$ сходится почти наверное в пространстве $L_2(\Omega, X)$.

Теперь докажем, что в бесконечномерном случае импликация i) $\Rightarrow$ ii) в предложении 4.4 неверна.

Теорема 4.4. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство. Справедливы следующие утверждения*:

a) *существует симметричный счетнозначный слабо субгауссовский случайный элемент ξ в X, для которого $R_\xi \notin \mathbf{R}_{\text{gaus}}(X)$;*

b) *существует симметричный счетнозначный слабо субгауссовский случайный элемент ξ в X, который не является γ-субгауссовским.*

Доказательство. a) Допустим противное. Рассмотрим случайный элемент ξ в X с распределением

$$\mathbb{P}\left[\xi = \pm\sqrt{\ln(k+1)}\,x_k\right] = \frac{c}{2k[\ln(k+1)]^2}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $(x_k) \in l_2^{\text{weak}}(X)$ и c — нормирующая константа. Очевидно, что ξ — симметричный счетнозначный случайный элемент.

Для доказательства слабой субгауссовости случайного элемента ξ воспользуемся неравенством $[\ln(k+1)]^n / k \le 2(n/e)^n$, которое справедливо для всех натуральных k и n. Имеем,

$$\mathbb{E}\left\langle x^*, \xi\right\rangle^{2n} = c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\ln(k+1)]^{n-2}}{k}\left\langle x^*, x_k\right\rangle^{2n} \le$$

$$\le 2c\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x^*, x_k\right\rangle^2\right)^n \le 2c\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x^*, x_k\right\rangle^2\right)^n <$$

$$< \|(x_k)\|_{2,w}^{2n}\left\|x^*\right\|^{2n} n^n < \infty.$$

Таким образом, $\vartheta_2(\langle x^*, \xi \rangle) < \infty$ для каждого $x^* \in X^*$ и, следовательно, согласно теореме 2.1 случайный элемент ξ является слабо субгауссовским. Легко видеть, что ковариационный оператор случайного элемента ξ можно представить в виде

$$R_\xi x^* = c \sum_k \frac{1}{k \ln(k+1)} \langle x^*, x_k \rangle x_k, \quad x^* \in X^*.$$

По предположению $R_\xi \in \mathbf{R}_{\text{gaus}}(X)$. Тогда согласно теореме 4.3 получаем

$$(x_k) \in l_2^{\text{weak}}(X) \Rightarrow \sum_k \frac{1}{\sqrt{k \ln(k+1)}} x_k g_k \in L_2(\Omega, X).$$

Из последнего соотношения согласно теореме о замкнутом графике следует существование константы $C > 0$ такой, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\sqrt{k \ln(k+1)}} x_k g_k \right\|_{L_2} \le C \| (x_1, x_2, \ldots, x_j) \|_{2,w} \tag{4.4}$$

для всех $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$.

Поскольку X бесконечномерно, согласно лемме Дворецкого для каждого натурального j существуют элементы $x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,j}$ в X, которые для всех действительных чисел $t_1, \ldots, t_j$ удовлетворяют соотношению (4.1). Для каждого фиксированного j в качестве совокупности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_j$ возьмем указанный выше набор элементов $x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,j}$. Из (4.1) и (4.4) следует, что для любого натурального j

$$\left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k \ln(k+1)} \right)^{1/2} \le 2C.$$

Получили противоречие, поскольку левая часть этого неравенства неограничена. Утверждение b) следует из утверждения a) и из предложения 4.3, c).

Заметим, что теорема 4.4, b) вытекает также из теорем 4.1, b) и 4.2.

Следующая теорема показывает, что если X — бесконечномерное банахово пространство, то импликация ii) $\Rightarrow$ iii) в предложении 4.4 также неверна.

Теорема 4.5. *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Тогда существует симметричный счетнозначный ограниченный γ-субгауссовский случайный элемент ξ, который не является F-субгауссовским.*

Доказательство. Пусть (x_k) — последовательность в X со следующими свойствами: $\sum_k \|x_k\| < \infty$ и для некоторой последовательности (x_n^*) в X^* имеет место равенство $\langle x_k^*, x_n \rangle = \delta_{n,k}$, $k, n = 1, 2, \ldots$ ($\delta_{n,k}$ — символ Кронекера). Известно, что такую последовательность можно найти в каждом бесконечномерном банаховом пространстве. Пусть (α_k) — произвольная последовательность строго положительных чисел, $\sum_k \alpha_k = 1$. Рассмотрим случайный элемент в X, который принимает значения $\pm x_k$ с вероятностями $\alpha_k / 2$, $k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что ξ — симметричный ограниченный случайный элемент в X и

$$\mathbb{E} |\langle x^*, \xi \rangle|^s = \sum_k \alpha_k |\langle x^*, x_k \rangle|^s \quad \text{для всех } s > 0 \text{ и } x^* \in X^*. \tag{4.5}$$

Покажем, что ξ является γ-субгауссовским. Легко видеть, что оператор $R : X^* \to X$, определяемый равенством

$$Rx^* = \sum_k \langle x^*, x_k \rangle x_k, \quad x^* \in X^*,$$

есть гауссовская ковариация. В самом деле, если g_k, $k = 1, 2, \ldots$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины, то ряд $\gamma = \sum_k x_k g_k$ почти наверное абсолютно сходится в X и $R_\gamma = R$. Пусть m — произвольное натуральное число. С учетом равенства (4.5) при каждом $x^* \in X^*$ имеем

$$\left(\mathbb{E}\left|\langle x^*, \xi \rangle\right|^{2m}\right)^{1/2m} = \left(\sum_k \alpha_k \left|\langle x^*, x_k \rangle\right|^{2m}\right)^{1/2m} \leq$$

$$\leq \left(\sum_k \alpha_k^{1/m} \langle x^*, x_k \rangle^2\right)^{1/2} \leq \langle Rx^*, x^* \rangle^{1/2},$$

откуда получаем (см. следствие 2.2, а))

$$\tau(\langle x^*, \xi \rangle) \leq \sqrt{\frac{e}{2}}\vartheta(\langle x^*, \xi \rangle) \leq \sqrt{\frac{e}{2}}\langle Rx^*, x^* \rangle^{1/2}.$$

Поскольку $\sqrt{e/2}R$ также есть гауссовская ковариация, из последнего равенства следует, что ξ является γ-субгауссовским. Остается показать, что ξ не является F-субгауссовским. С учетом следствия 2.1, а) и равенства (4.5) имеем

$$\frac{\tau(\langle x_n^*, \xi \rangle)}{\left\|\langle x_n^*, \xi \rangle\right\|_{L_2}} \geq \frac{1}{\beta_4}\frac{\left\|\langle x_n^*, \xi \rangle\right\|_{L_4}}{\left\|\langle x_n^*, \xi \rangle\right\|_{L_2}} = \frac{1}{\beta_4}\frac{\alpha_n^{1/4}}{\alpha_n^{1/2}} = \frac{1}{\beta_4}\frac{1}{\alpha_n^{1/2}}$$

для каждого натурального n. Поскольку $1/\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$, получаем, что ξ не является F-субгауссовским.

***Замечание* 4.3.** В [9] приводится пример неограниченного γ-субгауссовского случайного элемента в гильбертовом пространстве, который не является F-субгауссовским. Теорема 4.5 несколько усиливает пример 5.1 в [9] и ее доказательство.

Наконец, сформулируем без доказательства результат, который показывает, что для некоторых бесконечномерных банаховых пространств импликация iii) $\Rightarrow$ ii) в предложении 4.4 остается справедливой.

Теорема 4.6. *Пусть X — банахово пространство. Рассмотрим следующие утверждения*:

i) *каждый F-субгауссовский случайный элемент ξ в X является γ-субгауссовским*;

ii) *каждый строго субгауссовский случайный элемент ξ в X является γ-субгауссовским*;

iii) *X имеет конечный котип*;

iv) *для каждого F-субгауссовского случайного элемента ξ в X существует $\varepsilon > 0$ такой, что $\mathbb{E}e^{\varepsilon\|\xi\|^2} < \infty$.*

Тогда имеют места следующие утверждения:

а) i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii);

b) *если, дополнительно,* X *является* GL*-пространством* (*в частности, если* X — *банахова решетка*), *то* iii) $\Rightarrow$ i);

c) *если, дополнительно,* X *является* GL*-пространством* (*в частности, если* X — *банахова решетка*), *то* iii) $\Rightarrow$ iv).

***Замечание* 4.4.** 1. Импликация i) $\Rightarrow$ ii) в утверждении a) теоремы 4.6 очевидна. Импликация ii) $\Rightarrow$ iii) в том же утверждении фактически доказана в [9] (пример 5.2).

2. Доказательство утверждения b) теоремы 4.6 будет опубликовано позднее. Определения и свойства LG-пространств и пространств конечного котипа можно найти, например, в [18].

3. Утверждение c) теоремы 4.6 вытекает из утверждения b) этой же теоремы и из теоремы 4.1, b). Заметим, что теорема 4.1, c) является частным случаем утверждения c) теоремы 4.6. Нам неизвестно, справедлива ли импликация iv) $\Rightarrow$ iii) теоремы 4.6.

1. *Kahane J. P.* Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatories // Stud. math. – 1960. – **19**, № 1. – P. 1–25.
2. *Paley R. E. A. C., Zygmund A.* On some series of functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1932. – **26**, № 4. – P. 337–357; 458–474. – **28**, № 3. – P. 190–205.
3. *Jain N. C., Marcus M. B.* Central limit theorems for $C(S)$-valued random variables // J. Function. Anal. – 1975. – **19**, № 3. – P. 216–231.
4. *Pisier G.* Les inéqualités de Khintchine – Kahane d'aprés C. Borell // Sémin. Géometrié Espaces Banach, 1977–1978. Ecole Polytechnique. – Paris, 1978. – Exp. 7. – P. 1–14.
5. *Pisier G.* Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues // Sémin. Géométrie Espaces Banach, 1977–1978. Ecole Polytechnique. – Paris, 1978. – Exp. 17–18. – P. 1–33.
6. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin; New York: Springer, 1991.
7. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О субгауссовских случайных величинах // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 723–730.
8. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки распределения максимума негауссовского случайного поля // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, № 3. – С. 723–730.
9. *Fukuda R.* Exponential integrability of sub-Gaussian vectors // Probab. Theory. Relat. Fields. – 1990. – **85**, № 4. – P. 505–521.
10. *Antonini R. G.* Subgaussian random variables in Hilbert spaces // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1997. – **98**. – P. 89–99.
11. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВiМС, 1998.
12. *Ergemlidze Z., Shangua A., Tarieladze V.* Sample behavior and laws of large numbers for Gaussian random elements // Georg. Math. J. – 2003. – **10**, № 4. – P. 637–676.
13. *Kahane J. P.* Some random series of functions. – Lexington: D. C. Heath and Co., 1968.
14. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985.
15. *Vakhania N.* Probability distributions on linear spaces. – New York: North Holland, 1981.
16. *Vakhania N.* Subgaussian random vectors in normed spaces // Bull. Georg. Acad. Sci. – 2001. – **163**, № 1. – P. 8–11.
17. *Пич А.* Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982.
18. *Diestel J., Jarchow H., Tonge A.* Absolutely summing operators. – Cambridge Univ. Press, 1995.

Получено 17.06.2005