УДК 519.21

В. С. Королюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

СТОХАСТИЧНІ СИСТЕМИ З УСЕРЕДНЕННЯМ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

We suggest a system approach in the asymptotic analysis of stochastic systems in the series scheme with averaging and diffusion approximation. Stochastic systems are determined by Markov processes with locally independent increments in the Euclidean space with random switchings that are described by jump Markov and semi-Markov processes.

We use the asymptotic analysis of Markov and semi-Markov random evolutions. We construct the diffusion approximation by using the asymptotic decomposition of generating operators and solutions of problems of singular perturbation for reducible-inverse operators.

Запропоновано системний підхід в асимптотичному аналізі стохастичних систем у схемі серій з усередненням та дифузійною апроксимацією. Стохастичні системи задаються марковськими процесами з локально незалежними приростами в евклідовому просторі з випадковими перемиканнями, що описуються стрибковими марковськими та напівмарковськими процесами.

Використовується асимптотичний аналіз марковських та напівмарковських випадкових еволюцій. Дифузійна апроксимація будується з використанням асимптотичного розкладу породжуючих операторів та розв'язків проблем сингулярного збурення для звідно-обернених операторів.

1. Марковські стохастичні системи. ***1.1. Процеси з локально незалежними приростами (ПЛНП)*** в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$, задаються породжуючим оператором (генератором) у банаховому просторі $\mathfrak{B}\left(R^d\right)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(u)$, $u \in R^d$, з супремум-нормою $\|\varphi\| := \sup_{u \in R^d} |\varphi(u)|$ виразом

$$\mathbf{L}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv). \tag{1}$$

Ядро інтенсивностей величини стрибків $\Gamma(u, dv)$ є позитивною обмеженою мірою з $q(u) := \Gamma\left(U, R^d\right) \in \mathfrak{B}\left(R^d\right)$. Вектор-функція $C(u) = \left(C_k(u),\ k = \overline{1, d}\right)$ визначає детерміновану складову $\rho(t)$, $t \geq 0$, еволюційної системи, що є розв'язком еволюційного рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)), \quad \rho(0) = u \in R^d.$$

Перший доданок у виразі (1) означає скалярний добуток

$$C(u)\varphi'(u) := \sum_{k=1}^{d} C_k(u) \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k}.$$

Стохастичний процес $\eta(t)$, $t \geq 0$, що визначається генератором (1) на малому проміжку часу Δ, можна уявляти у вигляді суми [1]

$$\Delta\eta(t) := \eta(t+\Delta) - \eta(t) = \Delta\rho(t) + \Delta\nu(t),$$

де $\nu(t)$, $t \geq 0$, є марковським стрибковим процесом з генератором

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(u) = \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv).$$

***Зауваження* 1** [1]. Марковський процес $\nu(t)$, $t \geq 0$, відіграє роль математичної моделі стохастичних систем (СС) у багатьох прикладних галузях теорії випадкових процесів [2, 3].

***Приклад* 1.** Система постачання енергії [4].

Система складається з n однакових приладів, які працюють незалежно один від одного. Кожний прилад може бути в одному з двох станів: 1 — потребує енергії, 0 — відновлює свої функції. Час перебування в кожному стані — показникова випадкова величина з інтенсивністю μ у стані 1 та λ у стані 0. Марковський процес $\nu(t)$, $t \geq 0$, визначає число приладів, що знаходяться у стані 1 в момент часу $t \geq 0$. Очевидно, що процес $\nu(t)$, $t \geq 0$, є процесом народження та загибелі [5] з інтенсивностями переходів $\lambda_n(k) = (n-k)\lambda$ з k-го в $(k+1)$-й стан і $\mu_n(k) = k\mu$ з k-го в $(k-1)$-й стан. $E = \{0, 1, \ldots, n\}$ — множина станів процесу $\nu(t)$, $t \geq 0$.

Розглянемо процес $\nu_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \to \infty$. СС постачання енергії у схемі усереднення розглядається при такому нормуванні:

$$\nu^\varepsilon(t) = \varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Марковський процес $\nu^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, набуває значень у фазовому просторі станів $E_\varepsilon = \{\varepsilon k : 0 \leq k \leq n\}$ та задається генератором

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon)\lambda(u) + \varphi(u-\varepsilon)\mu(u) - \gamma(u)\varphi(u)], \quad u \in E_\varepsilon.$$

Тут, за означенням,

$$\lambda(u) := (1-u)\lambda, \quad \mu(u) := u\mu,$$

$$\gamma(u) := \lambda(u) + \mu(u) = \lambda + u(\mu - \lambda).$$

Використовуючи формулу Тейлора для двічі неперервно диференційовної тест-функції $\varphi(u)$, переконуємось, що генератор має асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \theta^\varepsilon \varphi(u),$$

де

$$C(u) = \lambda(u) - \mu(u) = \lambda - u(\lambda + \mu),$$

а другий доданок є знехтуючим членом:

$$\left|\theta^\varepsilon(u)\varphi(u)\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^2(\mathbb{R}).$$

Маючи асимптотичне зображення генератора, можна зробити висновок (див. [6], теорема 2.1.1), що має місце схема усереднення

$$\varepsilon\nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \rho(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\rho(t)$, $t \geq 0$, визначається розв'язком еволюційного рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)), \qquad \rho(0) = \rho_0.$$

Враховуючи вираз швидкості $C(u)$, можна записати розв'язок рівняння у явному вигляді і переконатися в тому, що

$$\rho(t) \to \rho = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad t \to \infty.$$

Тут константа є розв'язком рівняння $C(\rho) = 0$.

З урахуванням поведінки СС постачання енергії у схемі усереднення істотно виникає проблема вивчення флюктуацій процесу відносно точки рівноваги ρ:

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \rho,$$

або відносно усередненої еволюції

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \rho(t).$$

Зрозуміло, що такі флюктуації з незалежним нормуванням можна описати дифузійними процесами. Саме така проблема і розглядається в наступних підпунктах.

1.2. Схема усереднення. СС у схемі серій з усередненням задається нормованим ПЛНП $\nu^\varepsilon(t) := \varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, генератором

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \Gamma_\varepsilon(u, dv).$$

Основною умовою у схемі усереднення є асимптотичне зображення середнього значення величини стрибків

$$C_\varepsilon(u) := \int_{R^d} v \mathbf{\Gamma}_\varepsilon(u, dv) = C(u) + \theta^\varepsilon(u)$$

зі знехтуючим членом

$$\left\| \theta^\varepsilon(u) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Додатковою умовою є існування глобального розв'язку еволюційного рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)), \quad \rho(0) = u. \tag{2}$$

Тоді має місце слабка збіжність (див., наприклад, [3])

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \rho(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

при умові збіжності початкових даних

$$\varepsilon \nu_\varepsilon(0) \Rightarrow u, \quad \varepsilon \to 0.$$

1.3. СС із рівновагою. Рівновагою СС у схемі усереднення є сталий розв'язок ρ рівняння $C(\rho) = 0$.

СС із рівновагою у схемі дифузійної апроксимації задається нормованим та центрованим процесом

$$\zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \varepsilon^{-1} \rho, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Тут $\nu_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, є марковським процесом з генератором

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon \varphi(u) = \int_{R^d} [\varphi(u + v) - \varphi(u)] \Gamma_\varepsilon(u, dv). \tag{4}$$

Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_\varepsilon(u, dv) = \Gamma(u, dv) + \varepsilon\Gamma_1(u, dv). \tag{5}$$

Очевидно, що процес (3) є також марковським. Неважко переконатися в тому, що його генератор має вигляд

$$\mathbf{L}_\zeta^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \Gamma_\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dv). \tag{6}$$

Формула (6) є ключовою в асимптотичному аналізі СС із рівновагою у схемі дифузійної апроксимації.

Основною умовою є асимптотичне зображення перших двох моментів величини стрибків:

$$b_\varepsilon(u, \rho) := \int_{R^d} v \Gamma_\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dv) = b(\rho) + \varepsilon b(u, \rho) + \varepsilon \theta_1^\varepsilon(u, \rho), \tag{7}$$

$$B_\varepsilon(u, \rho) := \int_{R^d} v v^* \Gamma_\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dv) = B(\rho) + \theta_2^\varepsilon(u, \rho) \tag{8}$$

зі знехтуючими членами

$$\left\| \theta_i^\varepsilon(u, \rho) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 1 [3]. *При умові балансу*

$$b(\rho) = C(\rho) \tag{9}$$

та збіжності початкових даних

$$\zeta^\varepsilon(0) \Rightarrow \zeta^0, \quad \varepsilon \to 0,$$

має місце слабка збіжність

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \varepsilon^{-1}\rho \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, *визначається генератором*

$$\mathbf{L}^0 \varphi(u) = b(u, \rho)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[B(\rho)\varphi''(u)].$$

Тут, за означенням,

$$\operatorname{Tr}[B(\rho)\varphi''(u)] := \sum_{k,r=1}^{d} b_{kr}(\rho) \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u_k \partial u_r}.$$

***Зауваження* 2.** Граничний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, є дійсно дифузійним, якщо коваріаційна матриця дифузії $B(\rho) := [b_{kr}(\rho)] \neq 0$.

Висновок 1. При додатковій умові існування обмеженої похідної $C'(\rho)$ граничний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, є процесом Орнштейна – Уленбека [5] з параметром зсуву

$$b(u, \rho) = b_1(\rho) + u b'(\rho),$$

$$b_1(\rho) = \int_{R^d} v \Gamma_1(\rho, dv).$$

***1.3.1. Алгоритм дифузійної апроксимації (АДА) в теоремі* 1** будується з використанням асимптотичного зображення генератора (6) марковського процесу (3) у формі

$$\mathbf{L}_\zeta^\varepsilon \varphi(u) = \mathbf{L}^0 \varphi(u) + \theta_{\mathbf{L}}^\varepsilon(\rho)\varphi(u)$$

зі знехтуючим членом

$$\left\| \theta_{\mathbf{L}}^\varepsilon(\rho)\varphi(u) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in C^3\left(R^d\right).$$

Тоді слабка збіжність (10) забезпечується теоремою Скорохода [6].

1.4. СС з еволюційним усередненням. Схема дифузійної апроксимації СС з еволюційним усередненням розглядається для нормованого та центрованого процесу

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \varepsilon^{-1}\rho(t), \quad t \ge 0.$$

Марковський процес $\nu_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, задається генератором (4), (5). Еволюція $\rho(t)$, $t \ge 0$, визначається розв'язком рівняння (2). Крім того, передбачається, що має місце слабка збіжність (схема усереднення) [3], тобто

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \rho(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Основна умова така сама, як і в попередній схемі дифузійної апроксимації з рівновагою, тобто мають місце асимптотичні зображення перших двох моментів величин стрибків (7), (8).

Теорема 2. *При умові балансу* (9) *та збіжності початкових значень має місце слабка збіжність*

$$\varepsilon \nu_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \varepsilon^{-1}\rho(t) \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \ge 0$, *визначається генератором*

$$\mathbf{L}_t^0 \varphi(u) = b(u, \rho(t))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[\, B(\rho(t))\varphi''(u)]. \tag{11}$$

Зауваження **3.** Зображення (11) генератора граничного дифузійного процесу $\zeta^0(t)$, $t \ge 0$, означає, що двокомпонентний марковський процес $\zeta^0(t)$, $\rho(t)$, $t \ge 0$, є однорідним у часі і визначається розв'язком системи стохастичних рівнянь

$$d\zeta^0(t) = b\left(\zeta^0(t), \rho(t)\right)dt + \sigma(\rho(t))\,dw(t), \tag{12}$$

$$d\rho(t) = C(\rho(t))\,dt.$$

Коваріаційна матриця $\sigma(\rho)$ визначається співвідношенням

$$\sigma(\rho)\sigma^*(\rho) = B(\rho).$$

Зауваження **4.** При додатковій умові існування обмеженої похідної $C'(\rho)$ коефіцієнт зсуву має вигляд

$$b(u, \rho) = b_1(\rho) + uC'(\rho).$$

1.4.1. АДА в теоремі **2** будується з використанням асимптотичного зображення генератора двокомпонентного марковського процесу $\zeta^0(t)$, $\rho(t)$, $t \ge 0$:

$$\mathbf{L}_\zeta^\varepsilon \varphi(u, \rho) = \varepsilon^{-2} \int_{R^2} [\varphi(u + \varepsilon v, \rho) - \varphi(u, \rho)]\Gamma_\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dv) -$$

$$- \varepsilon^{-1} C(\rho)\varphi_u'(u, \rho) + C(\rho)\varphi_\rho'(u, \rho),$$

а саме, на тест-функціях $\varphi(u,\rho) \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right)$ має місце асимптотичне зображення

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}_{\zeta}\varphi(u,\rho) = \mathbf{L}^{0}_{\rho}\varphi(u,\rho) + \theta^{\varepsilon}_{\rho}\varphi(u,\rho)$$

зі знехтуючим членом $\left\|\theta^{\varepsilon}_{\rho}\varphi\right\| \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\varphi \in C^3\left(R^d\right)$. Тут генератор двокомпонентного марковського процесу $\zeta^0(t)$, $\rho(t)$, $t \ge 0$, має вигляд

$$\mathbf{L}^{0}_{\rho}\varphi(u,\rho) = b(u,\rho)\varphi'_u(u,\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[B(\rho)\varphi''_u(u,\rho)] + C(\rho)\varphi'_{\rho}(u,\rho).$$

Отже, двокомпонентний марковський процес $\zeta^0(t)$, $\rho(t)$, $t \ge 0$, визначається розв'язком системи (12), а генератор граничного дифузійного процесу $\zeta^0(t)$, $t \ge 0$, задається виразом (11). Слабка збіжність у теоремі 2 забезпечується теоремою Скорохода [6].

1.5. СС у схемі фазового усереднення. СС у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ задається розв'язком еволюційного рівняння в евклідовому просторі R^d, $d \ge 1$:

$$\frac{dU^{\varepsilon}(t)}{dt} = C_{\varepsilon}\left(U^{\varepsilon}(t); \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right). \tag{13}$$

Вектор-функція швидкостей має вигляд

$$C_{\varepsilon}(u;x) = C(u;x) + \varepsilon C_1(u;x). \tag{14}$$

Марковський процес перемикань $\kappa(t)$, $t \ge 0$, у стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_{R^d} P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{15}$$

Схема фазового усереднення означає, що для СС

$$\frac{dU_{\varepsilon}(t)}{dt} = C_{\varepsilon}\left(U_{\varepsilon}(t); \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \tag{16}$$

мають місце умови слабкої збіжності

$$U_{\varepsilon}(t) \Rightarrow V(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Гранична еволюція $V(t)$, $t \ge 0$, визначається розв'язком усередненого еволюційного рівняння

$$\frac{dV(t)}{dt} = C(V(t)),$$

$$C(v) = \int_E \pi(dx)C(v;x).$$

Тут $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, — стаціонарний розподіл рівномірного ергодичного марковського процесу $\kappa(t)$, $t \ge 0$.

Схема дифузійної апроксимації СС (13), (14) розглядається для центрованого та нормованого процесу

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\left[U^{\varepsilon}(t) - V(t)\right], \quad t \ge 0.$$

Основною умовою є асимптотичне зображення функції швидкостей

$$C(v+\varepsilon u; x) = C(v; x) + \varepsilon u C'_v(v; x) + \varepsilon \theta_0^\varepsilon(u, v; x), \tag{18}$$

$$C_1(v+\varepsilon u; x) = C_1(v; x) + \theta_1^\varepsilon(u, v; x)$$

зі знехтуючими членами

$$\left\| \theta_i^\varepsilon(v; x) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 0, 1.$$

Теорема 3 [9]. *В умовах фазового усереднення* (16), (17) *має місце слабка збіжність*

$$\varepsilon^{-1}\left[U^\varepsilon(t) - V(t)\right] \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \ge 0$, *визначається генератором*

$$\mathbf{L}_t^0 \varphi(u) = b_0(u, V(t))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\,C_0(V(t))\varphi''(u)].$$

Тут

$$b(u, v) = C_1(v) + u C'(v) + b_0(v), \tag{19}$$

$$b_0(v) = \int_E \pi(dx) b_0(v; x), \qquad b_0(v; x) = \hat{C}(v; x) R_0 \hat{C}'_v(v; x),$$

$$C_1(v) = \int_E \pi(dx) C_1(v; x), \qquad \hat{C}(v; x) := C(v; x) - C(v), \tag{20}$$

$$C_0(v) = \int_E \pi(dx) C_0(v; x), \qquad C_0(v; x) := \hat{C}(v; x) R_0 \hat{C}^*(v; x).$$

Висновок 2. Двокомпонентний марковський процес $\zeta^0(t)$, $V(t)$, $t \ge 0$, визначається генератором

$$\mathbf{L}^0 \varphi(u, v) = b(u, v)\varphi'_u(u, v) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\,C_0(v)\varphi''_u(u, v)] + C(v)\varphi'_v(u, v). \tag{21}$$

Зауваження 2 та 3 до теореми 1 також мають місце.

Тут коваріаційна матриця $\sigma(v)$ визначається співвідношенням

$$\sigma(v)\sigma^*(v) = C_0(v).$$

1.5.1. АДА в теоремі 3 будується з використанням асимптотичного розкладу породжуючого оператора трикомпонентного марковського процесу $\zeta^\varepsilon(t)$, $V(t)$, $\kappa_t^\varepsilon := \kappa\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}\right)$, $t \ge 0$:

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u, v, x) = \left[\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{C}_\varepsilon(x) + \mathbf{C}\right]\varphi(u, v, x).$$

Тут Q є генератором (15) марковського процесу $\kappa(t)$, $t \ge 0$; оператори

$$\mathbf{C}_\varepsilon(x)\varphi(u) = [\mathbf{C}_\varepsilon(v+\varepsilon u; x) - C(v)]\varphi'(u)$$

та

$$\mathbf{C}\varphi(v) = C(v)\varphi'(v).$$

Враховуючи основну умову (18), маємо асимптотичне зображення

$$\mathbf{L}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} Q_1(x) + Q_2(x) + \theta_l^{\varepsilon}(x)$$

на тест-функціях $\varphi(u, v) \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right)$, де

$$Q_1(x)\varphi(u) = \hat{C}(v; x)\varphi'(u), \qquad \hat{C}(v; x) := C(v; x) - C(v),$$

$$Q_2(x)\varphi(u, v) = b(u, v; x)\varphi'_u(u, v) + C(v)\varphi'_v(u, v) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[C_0(v)\varphi''_u(u, v)\right],$$

$$b(u, v; x) = C_1(v; x) + u C'_v(v; x);$$

знехтуючий член

$$\left\| \theta_l^{\varepsilon}(x)\varphi \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u, v) \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right).$$

Тепер використовується розв'язок проблеми сингулярного збурення [3] для зрізаного оператора

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon} := \varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} Q_1(x) + Q_2(x).$$

Граничний оператор $\mathbf{L}^0$ двокомпонентного процесу $\zeta_0(t)$, $V(t)$, $t \geq 0$, визначається формулою [3]

$$\mathbf{L}^0 \Pi = \Pi Q_2(x) \Pi + \Pi Q_1(x) R_0 Q_1(x) \Pi. \tag{22}$$

Тут Π — проектор у банаховому просторі $\mathcal{B}(E)$, що визначається стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, марковського процесу $\kappa(t)$, $t \geq 0$, з генератором (15):

$$\Pi\varphi(x) = \hat{\varphi}\mathbf{1}(x), \qquad \hat{\varphi} := \int_E \pi(dx)\varphi(x), \quad \mathbf{1}(x) \equiv 1, \quad x \in E.$$

Потенціальний оператор (потенціал) R_0 є звідно-оберненим оператором до генератора Q і визначається рівністю (див. [3])

$$Q R_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Обчислення за формулою (22) дають вираз (21) генератора $\mathbf{L}^0$ з урахуванням (19), (20).

Слабка збіжність в теоремі 3 обґрунтовується на підставі асимптотичного зображення (див. [3])

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u, v, x) = \mathbf{L}^0\varphi(u, v) + \theta_l^{\varepsilon}(x)\varphi(u, v)$$

на збурених тест-функціях

$$\varphi^{\varepsilon}(u, v, x) = \varphi(u, v) + \varepsilon\varphi_1(u, v, x) + \varepsilon^2\varphi_2(u, v, x)$$

зі знехтуючим членом

$$\left\| \theta_l^{\varepsilon}(x)\varphi \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right),$$

та застосування модельної граничної теореми [3].

1.6. СС у схемі фазового укрупнення. СС задається розв'язком еволюційного рівняння в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$:

$$\frac{dU_{\varepsilon}(t)}{dt} = C\left(U_{\varepsilon}(t); \kappa^{\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right). \tag{23}$$

На відміну від пп. 1.5 марковський процес перемикань $\kappa^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі станів $(E, \mathcal{E})$ залежить від малого параметра серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ і задається генератором

$$Q^{\varepsilon}\varphi(x) = q(x)\int_E P^{\varepsilon}(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Стохастичне ядро має вигляд

$$P^{\varepsilon}(x, B) = P(x, B) + \varepsilon^2 P_1(x, B), \qquad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ узгоджене з розщепленням фазового простору станів

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, \qquad E_k \cap E_{k'} = \varnothing, \quad k \neq k',$$

таким чином:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k. \end{cases}$$

Основною умовою фазового укрупнення є рівномірна ергодичність опорного марковського процесу $\kappa^0(t)$, $t \geq 0$, з генератором

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

та стаціонарними розподілами

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx), \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$\rho_k(B) = \int_{E_k} \rho_k(dx)P(x, B), \quad \rho_k(E_k) = 1.$$

Відомо [3], що при додатковій умові

$$p_k = \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E \setminus E_k) > 0, \quad 1 \leq k \leq N,$$

має місце слабка збіжність

$$\hat{\kappa}^{\varepsilon}(t) := v\left(\kappa^2\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) \Rightarrow \hat{\kappa}(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Тут $v(x) = k$, $x \in E_k$, — функція укрупнення. Граничний марковський процес $\hat{\kappa}(t)$, $t \geq 0$, визначається породжуючою матрицею на укрупненому просторі станів $\hat{E} = \{1, 2, \ldots, N\}$

$$\hat{Q} = \left[\hat{q}_{kr}; k, r \in \hat{E}\right],$$

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k \hat{p}_{kr}, \quad k \neq r, \quad \hat{q}_k = q_k p_r, \tag{25}$$

$$\hat{q}_{kr} = \frac{p_{kr}}{p_k}, \qquad p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E_r).$$

Схема фазового усереднення для СС (22) означає, що має місце слабка збіжність

$$U_{\varepsilon}(t) \Rightarrow \hat{V}(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Гранична система $\hat{V}(t),\ t \geq 0,$ визначається розв'язком еволюційного рівняння з марковськими перемиканнями

$$\frac{d\hat{V}(t)}{dt} = \hat{C}\left(\hat{V}(t); \hat{\kappa}(t)\right).$$

Усереднена швидкість визначається співвідношенням

$$\hat{C}(u;k) = \int_{E_k} \pi_k(dx)\, C(u;x), \quad 1 \leq k \leq N.$$

Флюктуації СС у схемі фазового усереднення розглядаються для стохастичної системи

$$\frac{dV^{\varepsilon}(t)}{dt} = C_{\varepsilon}\left(V^{\varepsilon}(t);\ \kappa^{\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right),$$

$$C_{\varepsilon}(u;x) = C(u;x) + \varepsilon C_1(u;x)$$

з прискореним перемиканням. Функція швидкостей $C(u;x)$ має похідну по u, рівномірно обмежену по x. Відхилення визначаються розв'язком стохастичної еволюції

$$\frac{d\hat{V}^{\varepsilon}(t)}{dt} = \hat{C}\left(\hat{V}^{\varepsilon}(t); \hat{\kappa}^{\varepsilon}(t)\right).$$

Флюктуації задаються виразом

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\left[U^{\varepsilon}(t) - \hat{V}^{\varepsilon}(t)\right], \quad t \geq 0.$$

Теорема 4 [10]. *В умовах фазового укрупнення* (24), (25) *має місце слабка збіжність*

$$\varepsilon^{-2}\left[U^{\varepsilon}(t) - \hat{V}^{\varepsilon}(t)\right] \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t),\ t \geq 0,$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}_t^0 \varphi(u) = b_0\left(u, \hat{V}(t); \hat{\kappa}(t)\right)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[B^0\left(\hat{V}(t); \hat{\kappa}(t)\right)\varphi''(u)\right]. \qquad (26)$$

Тут

$$b^0(u,v;k) = C_1(v;k) + u C_v'(v;k) + C^0(v;k),$$

$$C^0(v;k) = \int_{E_k} \pi_k(dx)\, \tilde{C}(v;x) R_0\, \tilde{C}_v'(v;k),$$

$$B^0(u,v;k) = \int_{E_k} \pi_k(dx)\, \tilde{C}(v;x) R_0\, \tilde{C}(v;x),$$

$$\tilde{C}(v;x) := C(v;x) - \hat{C}(v;k).$$

1.6.1. Алгоритм дифузійної апроксимації. В теоремі 4 граничний оператор (26) будується з використанням асимптотичного розкладу породжуючого оператора трикомпонентного марковського процесу $\zeta^{\varepsilon}(t),\ V^{\varepsilon}(t),\ \kappa_t^{\varepsilon} := \kappa^{\varepsilon}\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}\right),\ t \geq 0$:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u,v,x) = \left[\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{C}_{\varepsilon}(x) + \hat{\mathbf{C}} + Q_1\right]\varphi(u,v,x).$$

Тут Q є генератором опорного рівномірного ергодичного марковського процесу $\kappa^0(t)$, $t \geq 0$:

$$\mathbf{C}_\varepsilon(x)\varphi(u) = \left[C_\varepsilon(v+\varepsilon u; x) - \tilde{C}(v;k)\right]\varphi'(u),$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\varphi(v) = \tilde{C}(v;k)\varphi'(v),$$

$$Q_1\varphi(x) = q(x)\int_{E_k} P_1(x,dy)\varphi(y).$$

З урахуванням умов теореми 4 будується розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}\tilde{\mathbf{C}}(x) + Q_2(x) + Q_1,$$

що дає можливість обчислити граничний оператор $\mathbf{L}^0$ трикомпонентного процесу $\zeta^0(t)$, $V(t)$, $\hat{\kappa}(t)$, $t \geq 0$, у вигляді

$$\mathbf{L}^0\varphi(u,v,k) = b^0(u,v;k)\varphi'_u(u,v,k) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[B^0(u,v;k)\varphi''_u(u,v,k)\right] +$$

$$+ \hat{\mathbf{C}}(v;k)\varphi'_v(u,v;k) + \hat{Q}\varphi(u,v;k).$$

Слабка збіжність у теоремі 4 обґрунтовується за такою ж схемою, що і в теоремі 3.

2. Напівмарковські стохастичні системи. ***2.1. Схема усереднення.*** СС у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ задається розв'язком еволюційного рівняння в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$:

$$\frac{dU_\varepsilon(t)}{dt} = C\left(U_\varepsilon(t); \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right). \tag{27}$$

Вектор-функція $C(u;x) = \left(C_k(u;x), k = \overline{1,d}\right)$, $u \in R^d$, $x \in E$, задовольняє умови існування глобального розв'язку систем

$$\frac{dU_x(t)}{dt} = C(U_x(t);x), \qquad U_x(0) = u \in R^d, \quad x \in E.$$

Процес, що перемикає швидкості $\kappa(t)$, $t \geq 0$, є напівмарковським у стандартному фазовому просторі станів $(E, \mathcal{E})$ і задається напівмарковським ядром [3]

$$Q(x,B,t) = P(x,B)G_x(t), \qquad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

яке визначає ймовірності переходу процесу марковського відновлення (ПМВ) κ_n, τ_n, $n \geq 0$:

$$Q(x,B,t) = \mathrm{P}\left\{\kappa_{n+1} \in B,\ \theta_{n+1} \leq t \mid \kappa_n = x\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\kappa_{n+1} \in B \mid \kappa_n = x\right\}\mathrm{P}\left\{\theta_{n+1} \leq t \mid \kappa_n = x\right\}.$$

Стохастичне ядро

$$P(x,B) = \mathrm{P}\left\{\kappa_{n+1} \in B \mid \kappa_n = x\right\}$$

задає перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $\kappa_n = \kappa(\tau_n)$, $n \geq 0$; функції розподілу

$$G_x(t) = \mathrm{P}\{\theta_{n+1} \le t \mid \kappa_n = x\} = \mathrm{P}\{\theta_x \le t\}, \quad x \in E,$$

задають розподіли часів перебування θ_x у станах $x \in E$. Моменти марковського відновлення задовольняють співвідношення

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \quad n \ge 0, \quad \tau_0 = 0.$$

Схема фазового укрупнення СС (27) означає слабку збіжність в умовах рівномірної ергодичності напівмарковського процесу $\kappa(t)$, $t \ge 0$:

$$U_\varepsilon(t) \Rightarrow V(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{28}$$

Гранична детермінована еволюція $V(t)$, $t \ge 0$, визначається, як і в схемі усереднення з марковськими перемиканнями (див. п. 1.5), розв'язком усередненого еволюційного рівняння

$$\frac{dV(t)}{dt} = C(V(t)), \tag{29}$$

$$C(v) = \int_E \pi(dx) C(v; x).$$

Тут $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, — стаціонарний розподіл напівмарковського процесу $\kappa(t)$, $t \ge 0$, що задовольняє співвідношення

$$\pi(dx) = \frac{\rho(dx) m(x)}{m},$$

$$m(x) = \mathrm{E}\theta_x = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt, \qquad \overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t),$$

$$m = \int_E \rho(dx) m(x),$$

$\rho(B)$, $B \in \mathcal{E}$, є стаціонарним розподілом ВЛМ κ_n, $n \ge 0$, що визначається співвідношенням

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B), \qquad \rho(E) = 1.$$

2.2. Дифузійна апроксимація з рівновагою. СС із напівмарковськими перемиканнями у схемі дифузійної апроксимації з рівновагою розглядається для центрованого та нормованого процесу

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\left[U^\varepsilon(t) - \rho\right], \quad t \ge 0.$$

Тут СС $U^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, визначається розв'язком еволюційного рівняння

$$\frac{dU^\varepsilon(t)}{dt} = C^\varepsilon\left(U^\varepsilon(t); \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)$$

із прискореним перемиканням $O(\varepsilon^2)$.

Вектор-функція швидкостей

$$C^\varepsilon(u; x) = \varepsilon^{-1} C(u; x) + C_1(u; x).$$

Рівноважна стала ρ визначається єдиним розв'язком рівняння

$$C(\rho) = 0,$$

в якому $C(u)$, $u \in R^d$, є усередненою швидкістю для системи (29).

Основною умовою у схемі дифузійної апроксимації з рівновагою є асимптотичне зображення швидкостей (пор. з (18))

$$C(\rho + \varepsilon u; x) = C(\rho; x) + \varepsilon u C'_\rho(\rho; x) + \varepsilon \theta_0^\varepsilon(u, \rho; x),$$

$$C_1(\rho + \varepsilon u; x) = C_1(\rho) + \theta_1^\varepsilon(u, \rho; x)$$

зі знехтуючими членами

$$\left\| \theta_1^\varepsilon(u, \rho; x) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 0, 1.$$

Теорема 5 [9]. *В умовах ергодичного фазового усереднення* (24) *та при додаткових умовах дифузійної апроксимації СС із напівмарковськими перемиканнями має місце слабка збіжність*

$$\varepsilon^{-1}\left[U^\varepsilon(t) - \rho\right] \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, *визначається генератором*

$$\mathbf{L}^0 \varphi(u) = b(u, \rho)\varphi'(u) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}[B(\rho)\varphi''(u)],$$

параметр зсуву

$$b(u, \rho) = C_1(\rho) + u C'(\rho) + b_0(\rho),$$

$$b_0(\rho) = \int_E \pi(dx) b_0(\rho; x), \qquad b_0(\rho; x) = C(\rho; x) R_0 C'_\rho(\rho; x),$$

$$C_1(\rho) = \int_E \pi(dx) C_1(\rho; x),$$

коваріаційна матриця

$$B(\rho) = B_0(\rho) + B_1(\rho),$$

$$B_i(\rho) = \int_E \pi(dx) B_i(\rho; x), \quad i = 0, 1,$$

$$B_0(\rho; x) = C(\rho; x) R_0 C(\rho; x),$$

$$B_1(\rho; x) = \mu(x) C(\rho; x) C^*(\rho; x),$$

$$\mu(x) := \frac{m_2(x) - 2m^2(x)}{m(x)},$$

$$m_2(x) := \mathrm{E}\theta_x^2 = \int_0^\infty t^2 G_x(dt).$$

Висновок 3. Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, є процесом Орнштейна – Уленбека, параметри якого залежать від точки рівноваги ρ.

***Зауваження* 5.** У випадку напівмарковських перемикань з'являються додаткові члени в параметрах граничного процесу. Зокрема, коваріаційна матриця має доданок $B_1(\rho)$, що залежить від характеристики розподілів $\mu(x) :=$ $:= \dfrac{m_2(x) - 2m^2(x)}{m(x)}$. Відомо, що $\mu(x) = 0$ для показникового розподілу. Водночас для розподілів з $\mu(x) < 0$ матриця $B_1(\rho)$ не є додатно визначеною. Питання про те, чи буде коваріаційна матриця $B(\rho) = B_0(\rho) + B_1(\rho)$ додатно визначеною, залишається відкритим.

2.2.1. АДА в теоремі 5. Використовується асимптотичний аналіз розширеного компенсуючого оператора ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon = \zeta^\varepsilon\left(\tau_n^\varepsilon\right), \quad \kappa_n = \kappa(\tau_n), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n, \quad n \geq 0. \tag{30}$$

***Означення* 1** [7]. *Розширений компенсуючий оператор ПМВ* (30) *задається на тест-функціях* $\varphi(u, x)$, $u \in R^d$, $u \in E$, *співвідношенням*

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u, x) = \varepsilon^{-2}q(x)\mathrm{E}\left[\varphi\left(\zeta_{n+1}^\varepsilon, \kappa_{n+1}\right) - \varphi(u, x) \,\middle|\, \zeta_n^\varepsilon = u, \ \kappa_n = x\right], \tag{31}$$

де, за означенням, $q(x) := \dfrac{1}{m(x)}$, $m(x) := \mathrm{E}\theta_x = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\,dt$.

Отже, $\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u, x) = 0$, якщо $q(x) = 0$. Нескінченність виключається умовою $m(x) \geq m > 0$, $x \in E$.

Висновок 4. Розширений компенсуючий оператор (31) має аналітичне зображення

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u, x) = \varepsilon^{-2}q(x)[\mathbf{G}_\varepsilon(x)\mathbf{P} - I]\varphi(u, x), \tag{32}$$

$$\mathbf{G}_\varepsilon(x) = \int_0^\infty G_x(dt)\mathbf{C}_{\varepsilon^2 t}^\varepsilon(\rho, x),$$

сім'я напівгруп $\mathbf{C}_t^\varepsilon(\rho, x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, визначається генераторами

$$\mathbf{C}^\varepsilon(\rho, x)\varphi(u) = C^\varepsilon(\rho + \varepsilon u; x)\varphi'(u),$$

оператор перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}\varphi(x) = \int_E P(x, dy)\varphi(y), \quad x \in E.$$

***Зауваження* 6.** Розширений компенсуючий оператор (32) на тест-функціях $\varphi(u, \cdot) \in C^1\left(R^d\right)$ має зображення

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1^\varepsilon(\rho, x). \tag{33}$$

Тут

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є генератором „супроводжуючого” марковського процесу $\kappa^0(t)$, $t \geq 0$, з інтенсивностями показникових розподілів $q(x) = \dfrac{1}{m(x)}$.

Оператор збурення має вигляд

$$\mathbf{Q}_1(\rho, x)\varphi(u) = \mathbf{C}_\varepsilon(\rho, x)\mathbf{G}_\varepsilon^{(1)}(\rho, x)Q_0\varphi(u),$$

$$Q_0\varphi(x) := q(x)\int_E P(x, dy)\varphi(y),$$

$$\mathbf{G}_\varepsilon^{(1)}(\rho, x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\mathbf{C}_{\varepsilon^2 t}^\varepsilon(\rho, x)\,dt.$$

Розклад (33) будується з використанням алгебраїчної тотожності

$$gp - 1 = p - 1 + (g - 1)p$$

та рівняння для напівгруп

$$d\mathbf{C}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}_t\,dt.$$

Завершується перетворення інтегруванням частинами. При цьому використовується умова Крамера для функцій розподілу

$$\sup_{x \in E} \int_0^\infty e^{ht} G_x(dt) \le H < +\infty.$$

Аналогічні перетворення приводять до такого асимптотичного розкладу розширеного компенсуючого оператора (33) на тест-функціях $\varphi(u, \cdot) \in C^3\big(R^d\big)$:

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(\rho, x)\mathbf{P} + \mathbf{Q}_2(\rho, x)\mathbf{P} + \theta_e^\varepsilon(\rho, x). \tag{34}$$

Тут

$$\mathbf{Q}_1(\rho, x)\varphi(u) = C(\rho; x)\varphi'(u),$$

$$\mathbf{Q}_2(\rho, x)\varphi(u) = \big[b(u, \rho; x) + b_0(\rho; x)\big]\varphi'(u) + B(\rho; x)\varphi''(u),$$

знехтуючий член

$$\big\|\theta_e^\varepsilon(\rho, x)\varphi(u)\big\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3\big(R^d\big).$$

Тепер можна застосувати розв'язок проблеми сингулярного збурення до зрізаного оператора

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(\rho, x)P + \mathbf{Q}_2(\rho, x)P.$$

Згідно з лемою 3.2 роботи [3] граничний оператор $\mathbf{L}^0$ у розкладі

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u, x) = \mathbf{L}^\varepsilon\big[\varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u, x) + \varepsilon^2\varphi_2(u, x)\big] = \mathbf{L}^0\varphi(u) + \theta_l^\varepsilon\varphi(u) \tag{35}$$

зі знехтуючим членом θ_l^ε визначається формулою

$$\mathbf{L}^0\Pi = \Pi\mathbf{Q}_2(\rho, x)\Pi + \Pi\mathbf{Q}_1(\rho, x)\mathbf{P}R_0\mathbf{Q}_1(\rho, x)\mathbf{P}\Pi, \tag{36}$$

де Π — проектор у банаховому просторі $\mathcal{B}(X)$, що визначається стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, напівмарковського процесу $\kappa(t)$, $t \ge 0$, або, що те ж саме, супроводжуючого марковського процесу $\kappa^0(t)$, $t \ge 0$.

Обчислення за формулою (34) приводять до виразу для граничного оператора $\mathbf{L}^0$, даного в теоремі 5.

Обґрунтування слабкої збіжності в теоремі 5 значно складніше, ніж для СС з марковськими перемиканнями. Разом з тим залишається стандартна схема з використанням асимптотичного зображення (34), (35) та мартингальної характеризації розширеного ПМВ (30). Використовується також критерій компактності Струка – Варадана (див. [8]).

2.3. АДА з еволюційним усередненням. СС з еволюційним усередненням розглядається для центрованого та нормованого процесу

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\big[U^\varepsilon(t) - V(t)\big], \quad t \ge 0,$$

з розв'язком $U^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, еволюційного рівняння

$$\frac{dU^\varepsilon(t)}{dt} = C^\varepsilon\left(U^\varepsilon(t); \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)$$

з прискореним перемиканням $O(\varepsilon^2)$. Усереднена еволюція $V(t)$, $t \ge 0$, визначається розв'язком рівняння

$$\frac{dV(t)}{dt} = C(V(t)).$$

Основна умова у схемі дифузійної апроксимації з еволюційним усередненням є такою ж, як і в пп. 2.2, а саме, мають місце асимптотичні розклади

$$C(v + \varepsilon u; x) = C(v; x) + \varepsilon u C'_v(v; x) + \varepsilon \theta_0^\varepsilon(u, v; x),$$

$$C_1(v + \varepsilon u; x) = C_1(v; x) + \theta_1^\varepsilon(u, v; x)$$

зі знехтуючими членами

$$\left\| \theta_i^\varepsilon(u, v; x) \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 6 [13]. *В умовах ергодичного фазового усереднення* (28), (29) *та при додаткових умовах дифузійної апроксимації СС із напівмарковськими перемиканнями має місце слабка збіжність*

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\left[U^\varepsilon(t) - V(t)\right] \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{37}$$

Граничний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, *визначається генератором*

$$\mathbf{L}_t^0 \varphi(u) = b(u, V(t))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[B(V(t))\varphi''(u)],$$

параметр зсуву

$$b(u, v) = C_1(v) + uC'(v) + b_0(v),$$

$$b_0(v) = \int_E \pi(dx) b_0(v; x), \qquad b_0(v; x) = \tilde{C}(v; x) R_0 \tilde{C}'_v(v; x),$$

$$\tilde{C}(v; x) = C(v; x) - C(v),$$

коваріаційна матриця

$$B(v) = B_0(v) + B_1(v),$$

$$B_i(v) = \int_E \pi(dx) B_i(v; x), \quad i = 0, 1,$$

$$B_0(v; x) = \tilde{C}(v; x) R_0 \tilde{C}(v; x),$$

$$B_1(v; x) = \mu(x) C(v; x) C^*(v; x),$$

$$\mu(x) := \frac{m_2(x) - 2m^2(x)}{m(x)}.$$

Висновок 5. Двокомпонентний процес $\zeta^0(t)$, $V(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором

$$\mathbf{L}^0 \varphi(u, v) = b(u, v)\varphi'_u(u, v) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[B(v)\varphi''_u(u, v)\right] + C(v)\varphi'_v(u, v).$$

Отже, граничний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, визначається розв'язком СС

$$d\zeta^0(t) = b\left(\zeta^0(t), V(t)\right)dt + \sigma(V(t))dw(t),$$

$$dV(t) = C(V(t))dt.$$

Зауваження 5 до теореми 5 залишається справедливим і для теореми 6.

2.3.1. АДА в теоремі 6. Як і в пп. 2.2, використовується асимптотичний аналіз розширеного компенсуючого оператора ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon = \zeta^\varepsilon\left(\tau_n^\varepsilon\right), \quad V_n^\varepsilon = V\left(\tau_n^\varepsilon\right), \quad \kappa_n = \kappa(\tau_n), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n, \quad n \geq 0.$$

Твердження 1. *Розширений компенсуючий оператор задається на тест-функціях* $\varphi(u, v, x)$, $u, v \in R^d$, $x \in E$, *співвідношеннями*

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u, v, x) = \varepsilon^{-2}q(x)\left[\mathbf{G}_\varepsilon(v, x)\mathbf{P} - I\right]\varphi(u, v, x), \tag{38}$$

де

$$\mathbf{G}_\varepsilon(v, x) = \int_0^\infty G_x(dt)\mathbf{C}^\varepsilon_{\varepsilon^2 t}(v, x)\overline{\mathbf{C}}_t^\varepsilon\,\mathbf{C}_t.$$

Сім'я напівгруп $\mathbf{C}_t^\varepsilon(v, x)$, $t \geq 0$, $v \in R^d$, $x \in E$, *визначається генераторами*

$$\mathbf{C}^\varepsilon(v, x)\varphi(u) = C_\varepsilon(v + \varepsilon u; x)\varphi'(u).$$

Напівгрупа $\mathbf{C}_t$, $t \geq 0$, *визначається генератором* $\mathbf{C}\varphi(v) = C(v)\varphi'(v)$, *а напівгрупа* $\overline{\mathbf{C}}_t^\varepsilon$, $t \geq 0$, *— генератором*

$$\mathbf{C}^\varepsilon(v)\varphi(u) = -\varepsilon^{-1}C(v)\varphi'(v).$$

Твердження 1 справджується обчисленням умовного сподівання

$$\mathrm{E}\left[\varphi\left(\zeta_{n+1}^\varepsilon, V_{n+1}^\varepsilon, \kappa_{n+1}\right) \middle| \zeta_n^\varepsilon = u,\ V_n^\varepsilon = v,\ \kappa_n = x\right]$$

з урахуванням співвідношень

$$\zeta_{n+1}^\varepsilon = \zeta_n^\varepsilon + \zeta^\varepsilon\left(\theta_{n+1}^\varepsilon\right), \quad \theta_{n+1}^\varepsilon := \varepsilon^2\theta_{n+1},$$

а також (див. (33), (34))

$$U_n^\varepsilon = V_n^\varepsilon + \varepsilon\zeta_n^\varepsilon = v + \varepsilon u.$$

Отже, маємо

$$\mathrm{E}\left[\varphi\left(\zeta_{n+1}^\varepsilon, V_{n+1}^\varepsilon, \kappa_{n+1}\right) \middle| u_n^\varepsilon = v + \varepsilon u,\ V_n^\varepsilon = v,\ \kappa_n = x\right] =$$

$$= \int_0^\infty G_x(dt)\mathbf{C}^\varepsilon_{\varepsilon^2 t}(v, x)\overline{\mathbf{C}}^\varepsilon_{\varepsilon^2 t}\,\mathbf{C}_t(v)\varphi(u, v, x).$$

Аналогічно зауваженню 6 отримуємо такий висновок.

Висновок 6. Розширений компенсуючий оператор (38) на тест-функціях $\varphi(u, v, \cdot) \in \left(R^d \times R^d\right)$ має вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}_1^\varepsilon(v, x). \tag{39}$$

Збурюючий оператор

$$\mathbf{Q}_1^\varepsilon(v, x)\varphi(u) = \int_0^\infty G_x(dt)\left[\mathbf{C}^\varepsilon_{\varepsilon^2 t}(v, x)\overline{\mathbf{C}}_t^\varepsilon(v)\mathbf{C}P - I\right].$$

Далі використовується алгебраїчна тотожність

$$abc - 1 = (a-1) + (b-1) + (c-1) + (a-1)(b-1) +$$
$$+ (a-1)(c-1) + (b-1)(c-1) + (a-1)(b-1)(c-1),$$

а також рівняння для напівгруп та інтегрування частинами. В результаті детальних обчислень прийдемо до асимптотичного розкладу розширеного компенсуючого оператора (39) у такій формі (див. (34)).

Висновок 7. Розширений компенсуючий оператор (38) на тест-функціях $\varphi(u, v, \cdot) \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right)$ має асимптотичне зображення

$$\mathbf{L}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(v, x)P + \mathbf{Q}_2(v, x)P + \theta_l^{\varepsilon}(v, x).$$

Тут

$$\mathbf{Q}_1(v, x)\varphi(u) = \tilde{C}(v; x)\varphi'(u),$$

$$\mathbf{Q}_2(v, x)\varphi(u) = \left[b(u, v; x) + b_0(v; x)\right]\varphi'(u) + B(v; x)\varphi''(u),$$

знехтуючий член

$$\left\|\theta_l^{\varepsilon}(v, x)\varphi(u, v)\right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in C^{3,2}\left(R^d \times R^d\right).$$

Завершується побудова граничного оператора $\mathbf{L}^0$ в теоремі 6 обчисленням розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(v, x)P + \mathbf{Q}_2(v, x)P$$

з використанням формули (36).

Обґрунтування слабкої збіжності в теоремі 6 реалізується за такою ж схемою, що і в теоремі 5.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. *Анисимов В. В., Лебедев Е. А.* Стохастичні ланцюги обслуговування. Марковські моделі: Навч. пос. – Київ: Либідь, 1992.
3. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer, 1999.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984.
5. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В. С. Королюка. – Киев: Наук. думка, 1978.
6. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
7. *Свириденко М. Н.* Мартингальный подход в предельных теоремах для полумарковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1986. – С. 540 – 545.
8. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. – Springer, 1979.
9. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Diffusion approximation for evolutionary systems with equilibrium in asymptotic split phase space // Theory Probab. and Math. Statist. – 2004. – **69**.
10. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Average and diffusion approximation for evolutionary systems in asymptotic split phase space // Ann. Appl. Probab. – 2004. – **14**(1). – P. 489 – 516.
11. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – CRC Press, 1995.
12. *Skorokhod A. V., Hoppensteadt F. C., Salehi Habib.* Random perturbation methods with applications in science and engineering. – Springer, 2002. – 490 p.
13. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Diffusion approximation with equilibrium of evolutionary systems switched by semi-Markov processes // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1253 – 1260.

Одержано 17.06.2005