УДК 517.5

Ю. М. Дюкарев (Харьк. нац. ун-т)

ВЫРОЖДЕННАЯ ЗАДАЧА НЕВАНЛИННЫ – ПИКА

The general solution of the Nevalinna – Pick degenerate problem is determined in terms of fractional–linear transformations. A resolvent matrix of the problem is obtained in the form of J-extendable matrix of a completed rank.

Загальний розв'язок виродженої задачі Неванлінни – Піка описано у термінах дробово-лінійних перетворень. Резольвентну матрицю задачі одержано у формі J-розтяжної матриці повного рангу.

1. Введение. В статье [1] предложен метод решения матричной задачи Неванлинны – Пика, основанный на теории J-растягивающих аналитических матриц-функций. Эта теория была построена в работе [2]. В статьях [3, 4] указанный метод распространен и на другие интерполяционные задачи анализа.

Дискретные интерполяционные задачи в статьях [1, 4] рассматривались, в основном, в невырожденном случае. На примере задачи Шура в статье [5] впервые был подробно исследован вырожденный случай в теории дискретных интерполяционных задач. В статьях [6, 7] результаты [5] были обобщены и распространены на другие интерполяционные задачи.

В настоящей статье решена вырожденная задача Неванлинны – Пика. При этом использованы некоторые результаты из статьи [5]. Но здесь предложена существенная модификация подхода к вырожденным интерполяционным задачам. А именно, в статьях [5 – 7] для описания всех решений вырожденных интерполяционных задач был введен и исследован новый объект – резольвентная матрица, которая является J-растягивающей матрицей-функцией *неполного ранга*. В данной статье показано, как можно описывать все решения вырожденных интерполяционных задач с помощью хорошо известного в теории невырожденных интерполяционных задач объекта — резольвентной матрицы, которая является J-растягивающей матрицей-функцией *полного ранга*. Таким образом, в теории вырожденных интерполяционных задач можно не использовать J-растягивающие матрицы-функции неполного ранга. Это и является основным результатом данной статьи.

Во многих случаях результаты относительно вырожденной интерполяции становятся более прозрачными, если их формулировать на языке теории операторов. Поэтому будем использовать только операторный язык. Введем основные обозначения и определения.

Пусть даны два числа $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ и символ E обозначает некоторое m-мерное комплексное евклидово пространство. Символы $\{E\}$, $\{E\}_H$, $\{E\}_{\geq}$, $\{E\}_{>}$ обозначают соответственно множество линейных операторов в E, множество эрмитовых операторов в E, множество эрмитовых неотрицательных операторов в E и множество строго положительных операторов в E. Символом $\{E, G\}$ обозначим множество линейных операторов, действующих из пространства E в пространство G. Тождественный и нулевой операторы, действующие в некотором пространстве G, обозначим символами I_G и 0_G. Нулевой оператор, действующий из пространства G_1 в пространство G_2, обозначим символом $0_{G_1G_2}$. Пусть операторы $A, B \in \{G\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соответственно $A > B$) означает, что $A - B \in \{G\}_{\geq}$ (соответственно $A - B \in \{G\}_{>}$). Символом $\mathbb{C}_+$ будем обозначать верхнюю полуплоскость в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 1. *Операторная функция* (*о. ф.*) $w : \mathbb{C}_+ \to \{E\}$ *называется неванлинновской, если она голоморфна в* $\mathbb{C}_+$ *и* $\{w(z) - w^*(z)\}/2i \geq 0_E \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$.

Класс всех таких о. ф. обозначим символом $\mathcal{R}$.

В задаче Неванлинны – Пика задана последовательность попарно различных комплексных чисел (узлов интерполяции) $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}_+$ и последовательность операторов (интерполируемых значений) $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \{E\}$. Требуется описать множество о. ф. $w : \mathbb{C}_+ \to \{E\}$ таких, что

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad w \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

Множество всех решений интерполяционной задачи (1) обозначим через $\mathcal{F}$, множество узлов интерполяции — символом $\mathcal{Z}$, а множество комплексно-сопряженных точек — символом $\overline{\mathcal{Z}}$.

Рассмотрим ортогональную сумму

$$G = \underbrace{E \oplus E \oplus \ldots \oplus E}_{n \text{ слагаемых}}.$$

В G естественным образом определена структура евклидова пространства.

С помощью естественных матричных обозначений введем операторы

$$T = \operatorname{diag}\{z_1^{-1} I_E, \ldots, z_n^{-1} I_E\} \in \{G\}, \qquad K = T^{-1} \left\{ \frac{w_i - \overline{w}_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n} T^{-1*} \in \{G\},$$
$$v = \operatorname{col}\{I_E, \ldots, I_E\} \in \{E, G\}, \qquad u = \operatorname{col}\{w_1, \ldots, w_n\} \in \{E, G\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что введенные операторы удовлетворяют следующему *Основному Тождеству* (*ОТ*)

$$TK - KT^* = vu^* - uv^*. \tag{3}$$

В работах [1, 4] показано, что $w \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда w удовлетворяет *Основному Матричному Неравенству* (*ОМН*) *В. П. Потапова*

$$\left[\begin{array}{c|c} K & R_T(z)\{vw(z) - u\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{G \oplus E}, \qquad z \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathcal{Z}. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем $R_T(z) = (I - zT)^{-1}$.

Определение 2. *Усеченная задача Неванлинны – Пика* (1) *называется вполне неопределенной, если* $K > 0_G$.

С каждой вполне неопределенной обобщенной интерполяционной задачей свяжем ее резольвентную матрицу

$$U(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_E + zv^* R_{T^*}(z) K^{-1} u & -zv^* R_{T^*}(z) K^{-1} v \\ \hline zu^* R_{T^*}(z) K^{-1} u & I_E - zu^* R_{T^*}(z) K^{-1} v \end{array}\right]. \tag{5}$$

Здесь $R_{T^*}(z) = (I_E - zT^*)^{-1}$. Ясно, что U голоморфна в $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathcal{Z}}$ и $U : \mathbb{C} \backslash \overline{\mathcal{Z}} \to E \oplus E$.

В пространстве $E \oplus E$ введем оператор

$$J = \begin{bmatrix} 0_E & -iI_E \\ iI_E & 0_E \end{bmatrix} \in \{E \oplus E\}.$$

С помощью непосредственных вычислений можно убедиться в том, что J-форма о. ф. U имеет вид

$$J - U(z)JU^*(\lambda) = i(z - \overline{\lambda})\begin{bmatrix} v^* \\ u^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K^{-1}R^*_{T^*}(\lambda)[v, u], \qquad z, \lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{Z}}. \tag{6}$$

Умножим последнее равенство справа на J и подставим в него $\bar{z}$ вместо λ. Учитывая равенство $J^2 = I_{E\oplus E}$, приходим к принципу симметрии

$$U^{-1}(z) = JU^*(\bar{z})J, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{Z \cup \overline{\mathcal{Z}}\}.$$

Подставим в (6) $\bar{z}$ вместо z и λ и затем умножим (6) слева и справа на J. Из принципа симметрии и очевидного равенства $R^*_{T^*}(\bar{z}) = R_T(z)$ следует

$$J - U^{-1*}(z)JU^{-1}(z) = i(\bar{z} - z)J\begin{bmatrix} v^* \\ u^* \end{bmatrix} R^*_T(z)K^{-1}R_T(z)[v, u]J. \tag{7}$$

Определение 3. *Пусть о. ф.* $p(z)$, $q(z)$ *мероморфны в* $\mathbb{C}_+$ *и принимают значения в* $\{E\}$. *Пара* $\operatorname{col}[p(z)\,q(z)]$ *называется неванлинновской, если для нее существует дискретное в* $\mathbb{C}_+$ *множество точек* $\mathcal{D}_{pq}$ *такое, что*:

1) $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0_E \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+\setminus\mathcal{D}_{pq}$;

2) $[p^*(z), q^*(z)]J\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0_E \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+\setminus\mathcal{D}_{pq}$.

Пары $\operatorname{col}[p_1(z)\,q_1(z)]$ и $\operatorname{col}[p_2(z)\,q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая о. ф. $Q(z)$, принимающая значения в $\{E\}$, такая, что $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$, $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности неванлинновских пар обозначим через $\mathcal{R}_\infty$.

В работах [1, 4] доказано, что ОМН (4) во вполне неопределенном случае эквивалентно факторизованному ОМН В. П. Потапова

$$[I_E w^*(z)]\frac{U^{-1*}(z)JU^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)}\begin{bmatrix} I_E \\ w(z) \end{bmatrix} \geq 0_E, \qquad z \in \mathbb{C}_+\setminus\mathcal{Z}. \tag{8}$$

Множество $\mathcal{F}$ всех решений задачи Неванлинны – Пика можно описать и в терминах дробно-линейных преобразований (см. [1, 4]), а именно, формула

$$w(z) = \{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\}\{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)\}^{-1} \tag{9}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}_\infty$. Коэффициенты α, β, γ, δ определены в (5).

Символом $\mathcal{S}$ обозначим класс голоморфных о. ф. $\theta : \mathbb{C}_+ \to \{E\}$ таких, что

$$\theta^*(z)\theta(z) \leq I_E \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

О. ф. из класса $\mathcal{S}$ называются шуровскими. Как известно (см., например, [8]), между множеством $\mathcal{R}_\infty$ и множеством $\mathcal{S}$ существует биективное соответствие.

Отображение из $\mathcal{R}_\infty$ в $\mathcal{S}$ задается формулой

$$\theta(z) = [p(z) + iq(z)][p(z) - iq(z)]^{-1},$$

а обратное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{R}_\infty$ — формулами

$$p(z) = [I_E + \theta(z)]Q(z), \qquad q(z) = i[I_E - \theta(z)]Q(z).$$

Здесь $Q : \mathbb{C}_+ \to \{E\}$ — произвольная о. ф., мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C}_+$.

Отсюда и из (9) следует, что формула

$$w(z) = \{[\gamma(z) + i\delta(z)] + [\gamma(z) - i\delta(z)]\theta(z)\}\{[\alpha(z) + i\beta(z)] + \\ + [\alpha(z) - i\beta(z)]\theta(z)\}^{-1} \tag{10}$$

устанавливает биективное соответствие между $w \in \mathcal{F}$ и $\theta \in \mathcal{S}$. Коэффициенты α, β, γ, δ определены в (5).

2. Вырожденная задача Неванлинны – Пика.

Определение 4. *Подпространство* $\tilde{G} \subset G$ *называется подпространством типа* $\mathcal{K}$ *для пары операторов* $K, T \in \{E\}$, *если*:

1) *подпространство* $\tilde{G}$ *инвариантно относительно* T^*;
2) *пространство* G *представимо в виде прямой суммы*

$$G = \tilde{G} \dotplus \ker K. \tag{11}$$

По аналогии с [5] убеждаемся в том, что для определенных формулами (2) операторов T и K существует подпространство $\tilde{G}$ типа $\mathcal{K}$.

Пусть $\tilde{G}$ — подпространство типа $\mathcal{K}$, а $\hat{G}$ — его ортогональное дополнение. Рассмотрим ортогональное разложение пространства G

$$G = \tilde{G} \oplus \hat{G}. \tag{12}$$

Пусть символы $\tilde{P}$ и $\hat{P}$ обозначают операторы ортогонального проектирования на подпространства $\tilde{G}$ и $\hat{G}$ соответственно.

По определению подпространство $\tilde{G}$ инвариантно относительно оператора T^*. Следовательно, $T^*\tilde{P} = \tilde{P}T^*\tilde{P}$. Отсюда следует

$$\tilde{P}T = \tilde{P}T\tilde{P}. \tag{13}$$

Теорема 1. *В соответствии с ортогональным разложением* (12) *имеют место следующие матричные представления операторов*:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & 0_{\hat{G}} \end{bmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} 0_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ D & \hat{T} \end{bmatrix},$$

$$R_T(z) = \begin{bmatrix} \tilde{R}(z) & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ \hat{R}(z)D\tilde{R}(z) & \hat{R}(z) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\tilde{R}(z) = (I_{\tilde{G}} - z\tilde{T})^{-1}, \quad \hat{R}(z) = (I_{\hat{G}} - z\hat{T})^{-1},$$

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K} & Y \\ Y^* & \hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ Y^*K^{-1} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & 0_{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & \tilde{K}^{-1}Y \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Блочные представления для операторов $\tilde{P}$, $\hat{P}$, u и v очевидны. Представление для оператора T следует из (13). Отсюда следует представление для $R_T(z)$.

Осталось доказать представление для оператора K. Ясно, что $\tilde{K} > 0_{\tilde{G}}$. Поэтому можно рассмотреть факторизацию

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K} & Y \\ Y^* & \hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ Y^* K^{-1} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & \hat{K} - Y^* \tilde{K}^{-1} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & \tilde{K}^{-1} Y \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из определения подпространства типа $\mathcal{K}$ следует $\hat{K} - Y^* \tilde{K}^{-1} Y = 0_{\hat{G}}$.

Теорема 1 доказана.

Подставляя в ОТ (1) блочные представления операторов (14), получаем

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}\tilde{T}^* - \tilde{T}\tilde{K} & -\tilde{T}Y + \tilde{K}D^* + Y\hat{T}^* \\ \hline Y^*\tilde{T}^* - D\tilde{K} - \hat{T}Y^* & Y^*D^* + Y^*\tilde{K}^{-1}Y\hat{T}^* - DY - \hat{T}Y^*\tilde{K}^{-1}Y \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{u}\tilde{v}^* - \tilde{v}\tilde{u}^* & \tilde{u}\hat{v}^* - \tilde{v}\hat{u}^* \\ \hline \hat{u}\tilde{v}^* - \hat{v}\tilde{u}^* & \hat{u}\hat{v}^* - \hat{v}\hat{u}^* \end{array}\right]. \tag{15}$$

Теорема 2. *При введенных обозначениях и сделанных предположениях ОМН* (4) *эквивалентно неравенству* $(\forall z \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathcal{Z})$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K} & \tilde{R}(z)\{\tilde{v}w(z) - \tilde{u}\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\tilde{G}\oplus E} \tag{16}$$

и равенству

$$\Phi(z)w(z) = \Psi(z). \tag{17}$$

Здесь

$$\Phi(z) = -Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{v} + z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{v} + \hat{R}(z)\hat{v}, \tag{18}$$

$$\Psi(z) = -Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{u} + z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{u} + \hat{R}(z)\hat{u}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть выполнено ОМН (4). Подставляя представления операторов (14) в (4), получаем

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ Y^*\tilde{K}^{-1} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & 0_{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{G}} & \tilde{K}^{-1}Y \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & I_{\hat{G}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{R}(z) & 0_{\hat{G}\tilde{G}} \\ \hat{R}(z)D\tilde{R}(z) & \hat{R}(z) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \hat{v} \end{bmatrix} w(z) - \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \right\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{G\oplus E}.$$

Умножая это неравенство слева и справа на операторы

$$\left[\begin{array}{cc|c} I_{\tilde{G}} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} & 0_{E\tilde{G}} \\ -Y^*\tilde{K}^{-1} & I_{\hat{G}} & 0_{E\hat{G}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & I_E \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} I_{\tilde{G}} & -\tilde{K}^{-1}Y & 0_{E\tilde{G}} \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & I_{\hat{G}} & 0_{E\hat{G}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & I_E \end{array}\right],$$

имеем

$$\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{K} & 0_{\hat{G}\tilde{G}} & \tilde{R}(z)[\tilde{v}w(z) - \tilde{u}] \\ 0_{\tilde{G}\hat{G}} & 0_{\hat{G}} & \Phi(z)w(z) - \Psi(z) \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{G\oplus E}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) следуют (16) и (17).

Наоборот, пусть теперь выполнены (16) и (17). Тогда выполняется и неравенство (20). Обращая приведенные только что результаты, получаем ОМН (4).
Теорема 2 доказана.

Введем операторы $A, B : E \to \hat{G}$:

$$A = (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) + i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v}), \quad B = -(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) + i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v}). \tag{21}$$

Лемма 1. *Операторы* A *и* B *удовлетворяют равенству*

$$AA^* = BB^*. \tag{22}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&AA^* - BB^* = \\
&= \left[(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) + i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})\right]\left[(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^*\right] - \\
&- \left[-(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) + i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})\right]\left[-(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^*\right] = \\
&= (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^* + \\
&+ i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* + (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^* - \\
&- (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^* + \\
&+ i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^* = \\
&= 2i\left[(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})^* - (-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u})(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})^*\right] = \\
&= 2i[-Y^*\tilde{K}^{-1}(\tilde{u}\tilde{v}^* - \tilde{v}\tilde{u}^*)\tilde{K}^{-1}Y + Y^*\tilde{K}^{-1}(\tilde{u}\hat{v}^* - \tilde{v}\hat{u}^*) + \\
&+ (\hat{u}\tilde{v}^* - \hat{v}\tilde{u}^*)\tilde{K}^{-1}Y - (\hat{u}\hat{v}^* - \hat{v}\hat{u}^*)] = \\
&= 2i[-Y^*\tilde{K}^{-1}(\tilde{K}\tilde{T}^* - \tilde{T}\tilde{K})\tilde{K}^{-1}Y + Y^*\tilde{K}^{-1}(-\tilde{T}Y + \tilde{K}D^* + Y\hat{T}^*) + \\
&+ (Y^*\tilde{T}^* - D\tilde{K} - \hat{T}Y^*)\tilde{K}^{-1}Y - (Y^*D^* + Y^*\tilde{K}^{-1}Y\hat{T}^* - DY - \hat{T}Y^*\tilde{K}^{-1}Y)] = \\
&= 2i[-Y^*\tilde{T}^*\tilde{K}^{-1}Y + Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{T}Y - Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{T}Y + Y^*D^* + Y^*\tilde{K}^{-1}Y\hat{T}^* + \\
&+ Y^*\tilde{T}^*\tilde{K}^{-1}Y - DY - \hat{T}Y^*\tilde{K}^{-1}Y - Y^*D^* - Y^*\tilde{K}^{-1}Y\hat{T}^* + DY + \hat{T}Y^*\tilde{K}^{-1}Y)] = 0_{\hat{G}}.
\end{aligned}$$

В этой цепочке пятое равенство следует из (15).
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть операторы* $A, B : E \to \hat{G}$ *заданы формулами* (21).

Тогда для сопряженных операторов $A^*,\ B^* : \hat{G} \to E$ *выполняется равенство*

$$\dim \operatorname{im} A^* = \dim \operatorname{im} B^*. \tag{23}$$

Здесь $\operatorname{im} A^*$ *и* $\operatorname{im} B^*$ *— образы пространства* $\hat{G}$ *в пространстве* E *при отображениях* A^* *и* B^* *соответственно.*

Доказательство. Из формулы (22) следует

$$\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} B.$$

Далее имеем

$$\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = \dim E,$$

$$\dim \operatorname{im} B + \dim \ker B = \dim E.$$

Из трех последних равенств имеем $\dim\ker A = \dim\ker B$. Отсюда следует (23).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Существует унитарный оператор* $U: E \to E$ *такой, что*

$$UA^* = B^*. \tag{24}$$

Доказательство. Сначала определим оператор U на подпространстве $\operatorname{im} A^* \subset E$ с помощью формулы (24). Из лемм 1 и 2 следует, что оператор U: $\operatorname{im} A^* \to \operatorname{im} B^*$ и является унитарным. Пусть подпространства $\operatorname{im} A^{*\perp} \subset E$ и $\operatorname{im} B^{*\perp} \subset E$ являются ортогональными дополнениями к подпространствам $\operatorname{im} A^*$ и $\operatorname{im} B^*$ соответственно. На этих подпространствах оператор U определяется как произвольный унитарный оператор, отображающий $\operatorname{im} A^{*\perp}$ на $\operatorname{im} A^{*\perp}$. По линейности продолжим оператор U на все пространство E. Получим унитарный оператор, который удовлетворяет условию (24).

Лемма 3 доказана.

Для описания множества $\mathcal{F}$ нужно описать все решения ОМН (4). Согласно теореме 2 достаточно описать все решения ОМН (16), которые удовлетворяют равенству (17). Поскольку оператор $\tilde{K}$ строго положительный, решение СМН (16) осуществляется по схеме решения вполне неопределенных задач. С этой целью введем резольвентную матрицу

$$\tilde{U}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_E + z\tilde{v}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{u} & -z\tilde{v}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{v} \\ \hline z\tilde{u}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{u} & I_E - z\tilde{u}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{v} \end{array}\right]. \tag{25}$$

Следующая теорема дает описание множества $\mathcal{F}$, т. е. множества всех решений ОМН (4).

Теорема 3. *Формула*

$$w(z) = \{[\tilde{\gamma}(z) + i\tilde{\delta}(z)] + [\tilde{\gamma}(z) - i\tilde{\delta}(z)]\theta(z)\}\{[\tilde{\alpha}(z) + i\tilde{\beta}(z)] +$$
$$+ [\tilde{\alpha}(z) - i\tilde{\beta}(z)]\theta(z)\}^{-1} \tag{26}$$

устанавливает биективное соответствие между решениями ОМН (4) $w \in \mathcal{F}$ *и шуровскими о. ф.* $\theta \in \mathcal{S}$, *которые удовлетворяют условию*

$$A\theta(z) = B \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть сначала о. ф. $w(z) \in \mathcal{F}$, т. е. является решением ОМН (4). Покажем, что о. ф. $w(z)$ представима в виде дробно-линейного преобразования (26) над шуровской о. ф. $\theta(z)$, удовлетворяющей условию (27).

Согласно теореме 2 о. ф. $w(z)$ удовлетворяет ОМН (16). Из (15) вытекает тождество

$$\tilde{K}\tilde{T}^* - \tilde{T}\tilde{K} = \tilde{u}\tilde{v}^* - \tilde{v}\tilde{u}^*.$$

Из этого тождества, ОМН (16) и строгой положительности оператора $\tilde{K}$ следует (см. введение), что о. ф. $w(z)$ представима в виде (26) с некоторой шуровской о. ф. $\theta(z) \in \mathcal{S}$. Покажем, что эта шуровская о. ф. $\theta(z)$ удовлетворяет условию (27). Согласно теореме 2 о. ф. $w(z)$ удовлетворяет равенству (17), которое можно записать в виде

$$\Phi(z)\{[\tilde{\gamma}(z)+i\tilde{\delta}(z)]+[\tilde{\gamma}(z)-i\tilde{\delta}(z)]\theta(z)\} =$$
$$= \Psi(z)\{[\tilde{\alpha}(z)+i\tilde{\beta}(z)]+[\tilde{\alpha}(z)-i\tilde{\beta}(z)]\theta(z)\},$$

или, что то же самое,

$$\{\Phi(z)[\tilde{\gamma}(z)-i\tilde{\delta}(z)]-\Psi(z)[\tilde{\alpha}(z)-i\tilde{\beta}(z)]\}\theta(z) =$$
$$= -\Phi(z)[\tilde{\gamma}(z)+i\tilde{\delta}(z)]+\Psi(z)[\tilde{\alpha}(z)+i\tilde{\beta}(z)]. \tag{28}$$

Преобразуем правую часть равенства (28):

$$\Psi(z)[\tilde{\alpha}(z)+i\tilde{\beta}(z)]-\Phi(z)[\tilde{\gamma}(z)+i\tilde{\delta}(z)] =$$
$$= \Psi(z)\tilde{\alpha}(z)-\Phi(z)\tilde{\gamma}(z)+i\{\Psi(z)\tilde{\beta}(z)-\Phi(z)\tilde{\delta}(z)\} =$$
$$= \{[-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{u}+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{u}+\hat{R}(z)\hat{u}][I_E+z\tilde{v}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{u}]-$$
$$-[-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{v}+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{v}+\hat{R}(z)\hat{v}][z\tilde{u}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{u}]\}+$$
$$+i\{[-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{u}+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{u}+\hat{R}(z)\hat{u}][-z\tilde{v}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{v}]-$$
$$-[-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{v}+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{v}+\hat{R}(z)\hat{v}][I_E-z\tilde{u}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\tilde{v}]\} =$$
$$= \{-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)+zY^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)(\tilde{v}\tilde{u}^*-\tilde{u}\tilde{v}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z^2\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)(\tilde{u}\tilde{v}^*-\tilde{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+z\hat{R}(z)(\hat{u}\tilde{v}^*-\hat{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\}\tilde{u}+\hat{R}(z)\hat{u}-$$
$$-i\{-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)+zY^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)(\tilde{v}\tilde{u}^*-\tilde{u}\tilde{v}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z^2\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)(\tilde{u}\tilde{v}^*-\tilde{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+z\hat{R}(z)(\hat{u}\tilde{v}^*-\hat{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}\}\tilde{v}-i\hat{R}(z)\hat{v}. \tag{29}$$

Заметим, что оба выражения в фигурных скобках в (29) совпадают. Преобразуем одно из этих выражений:

$$-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)+zY^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)(\tilde{v}\tilde{u}^*-\tilde{u}\tilde{v}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z^2\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)(\tilde{u}\tilde{v}^*-\tilde{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+z\hat{R}(z)(\hat{u}\tilde{v}^*-\hat{v}\tilde{u}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} = -Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)+$$
$$+z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)-zY^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{K}\tilde{T}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+zY^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)\tilde{T}\tilde{K}\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z^2\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{K}\tilde{T}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}-z^2\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)\tilde{T}\tilde{K}\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z\hat{R}(z)Y^*\tilde{T}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}-z\hat{R}(z)D\tilde{K}\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}-z\hat{R}(z)\hat{T}Y^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} =$$
$$= z\hat{R}(z)D\tilde{R}(z)[\tilde{K}(I_{\tilde{G}}-z\tilde{T}^*)+z\tilde{K}\tilde{T}^*-z\tilde{T}\tilde{K}-(I_{\tilde{G}}-z\tilde{T})\tilde{K}]\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{R}(z)[-\tilde{K}(I_{\tilde{G}}-z\tilde{T}^*)-z\tilde{K}\tilde{T}^*+z\tilde{T}\tilde{K}]\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+$$
$$+z\hat{R}(z)Y^*\tilde{T}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}-z\hat{R}(z)\hat{T}Y^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} =$$
$$= -Y^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}+z\hat{R}(z)Y^*\tilde{T}^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1}-z\hat{R}(z)\hat{T}Y^*\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} =$$
$$= \hat{R}(z)[-(I_{\hat{G}}-z\hat{T})Y^*+zY^*\tilde{T}^*-z\hat{T}Y^*]\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} =$$
$$= -\hat{R}(z)Y^*(I_{\tilde{G}}-z\tilde{T}^*)\tilde{R}^*(\bar{z})\tilde{K}^{-1} = -\hat{R}(z)Y^*\tilde{K}^{-1}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует

$$\Psi(z)[\tilde{\alpha}(z)+i\tilde{\beta}(z)]-\Phi(z)[\tilde{\gamma}(z)+i\tilde{\delta}(z)] =$$
$$= (-\hat{R}(z)Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u}+\hat{R}(z)\hat{u})-i(-\hat{R}(z)Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v}+\hat{R}(z)\hat{v}). \tag{31}$$

Аналогичным образом преобразовывается коэффициент при $\theta(z)$ в левой части (28). В результате получим

$$\Phi(z)[\tilde{\gamma}(z) - i\tilde{\delta}(z)] - \Psi(z)[\tilde{\alpha}(z) - i\tilde{\beta}(z)] =$$

$$= -(-\hat{R}(z)Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{R}(z)\hat{u}) - i(-\hat{R}(z)Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{R}(z)\hat{v}). \qquad (32)$$

Подставим (31) и (32) в (28). После сокращения на неособенную мероморфную о. ф. $\hat{R}(z)$ будем иметь

$$\left\{-(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})\right\}\theta(z) = \left\{(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{u} + \hat{u}) - i(-Y^*\tilde{K}^{-1}\tilde{v} + \hat{v})\right\}.$$

Отсюда следует (27).

Покажем теперь, что дробно-линейное преобразование (26), примененное к шуровской о. ф. $\theta(z)$, удовлетворяющей условию (27), приводит к о. ф. $w(z) \in \mathcal{F}$.

Прежде всего отметим, что множество шуровских о. ф., удовлетворяющих условию (27), не пусто. Достаточно рассмотреть о. ф. $\theta(z) \equiv U^*$, где U — унитарный оператор из леммы 3.

Пусть теперь о. ф. $w(z)$ представлена в виде (26) с шуровской о. ф. $\theta(z)$, удовлетворяющей условию (27). Отсюда следует (см. введение), что $w(z)$ удовлетворяет ОМН (16). Обращая предыдущие рассуждения, получаем, что из (27) следует (17). Согласно теореме 2 $w(z) \in \mathcal{F}$.

Теорема 3 доказана.

Определенная формулой (25) резольвентная матрица $\tilde{U}$ является о. ф. полного ранга (см. [4]). Таким образом, формула (26) задает описание множества решений вырожденной задачи Неванлинны – Пика с помощью резольвентной матрицы полного ранга. Ранее в аналогичных ситуациях приходилось вводить и исследовать резольвентные матрицы неполного ранга (см. [5 – 7]).

Из теоремы 3 следует, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$, так как не пусто множество шуровских о. ф. $\theta(z)$, которые удовлетворяют условию (27). Приведем более прозрачное описание множества шуровских о. ф. $\theta(z)$, которые удовлетворяют условию (27).

Пусть $\hat{E} = \operatorname{im} B^*$ и $\tilde{E} = E \ominus \hat{E}$. Тогда

$$E = \hat{E} \oplus \tilde{E}. \qquad (33)$$

Теорема 4. *Пусть U — унитарный оператор, удовлетворяющий условию* (24).

Для того чтобы шуровская о. ф. $\theta(z)$ удовлетворяла условию (27), *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида* (*блочное представление понимаем в соответствии с* (33))

$$\theta(z) = U^* \begin{bmatrix} I_{\hat{E}} & 0_{\tilde{E}\hat{E}} \\ 0_{\hat{E}\tilde{E}} & \tilde{\theta}(z) \end{bmatrix} \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+. \qquad (34)$$

Здесь $\tilde{\theta} : \mathbb{C}_+ \to \tilde{E}$ — шуровская о. ф.

Доказательство. Пусть сначала $\theta(z)$ удовлетворяет условию (27) и U — унитарный оператор, построенный в лемме 3. По формуле (24) и из (27) имеем

$$UA^* = B^*, \qquad \theta^*(z)A^* = B^* \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому

$$U\big|_{\operatorname{im} A^*} = \theta^*(z)\big|_{\operatorname{im} A^*} \qquad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что подпространство $\operatorname{im} B^* = \hat{E}$ инвариантно относительно оператора $\theta^*(z)U^*$ и

$$\theta^*(z)U^*|_{\hat{E}} = I_{\hat{E}}.$$

Таким образом,

$$\theta^*(z)U^* = \begin{bmatrix} I_{\hat{E}} & \theta_{12}^*(z) \\ 0_{\hat{E}\tilde{E}} & \tilde{\theta}^*(z) \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Оператор $\theta^*(z)U^*$ является сжимающим для любого $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому $\theta_{12}^*(z) = 0_{\tilde{E}\hat{E}}$, а о. ф. $\tilde{\theta}(z)$ является шуровской. Отсюда следует представление (34).

Наоборот, пусть шуровская о. ф. $\theta(z)$ допускает представление (34) с унитарным оператором U, удовлетворяющим условию (24). Покажем, что она удовлетворяет условию (27). Действительно, условие (34) можно переписать в виде

$$\theta^*(z)U^* = \begin{bmatrix} I_{\hat{E}} & 0_{\tilde{E}\hat{E}} \\ 0_{\hat{E}\tilde{E}} & \tilde{\theta}^*(z) \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда следует, что подпространство $\hat{E}$ инвариантно относительно оператора $\theta^*(z)U^*$ и $\theta^*(z)U^*|_{\hat{E}} = I_{\hat{E}}$. Теперь имеем

$$\theta^*(z)A^* = \theta^*(z)U^*UA^* = \theta^*(z)U^*B^* = \{\theta^*(z)U^*\}|_{\hat{E}}B^* = I_{\hat{E}}B^* = B^*.$$

Теорема 4 доказана.

1. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны – Пика // Докл. АН АрмССР. – 1974. – **59**, вып. 1. – С. 17 – 22.
2. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1995. – **4**. – С. 125 – 236.
3. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Интегральное представление эрмитово положительных функций. – Харьков, 1981. – 140 с. – Деп. ВИНИТИ, № 298-81.
4. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 3. – С. 455 – 497.
5. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1984. – **42**. – С. 46 – 57.
6. *Bolotnikov V.* On degenerate Hamburger moment problem and extensions of nonnegative Hankel blok matrices // Integr. Equat. Oper. Theory. – 1996. – **25**, № 3. – P. 253 – 276.
7. *Bolotnikov V., Dym H.* On degenerate interpolation, entropy and extremal problems for Schur functions // Ibid. – 1998. – **28**, № 2. – P. 275 – 292.
8. *Дюкарев Ю. М.* Принцип максимума для стилтьесовских пар аналитических матриц-функций // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2002. – № 542. – С. 35 – 41.

Получено 02.03.2004