УДК 519.21

В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Т. В. Каданкова (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА ИЗ ИНТЕРВАЛА И ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕСКОКА ГРАНИЦЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ И СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

For a homogeneous process with independent increments, we obtain integral transforms of the joint distribution of the moment of the first exit from a fixed interval and the value of the overshoot through the boundary at the moment of exit. We also obtain integral transforms of the joint distribution of supremum, infimum, and the value of the process.

Для однорідного процесу з незалежними проростами отримано інтегральні перетворення сумісного розподілу моменту першого виходу процесу з інтервалу і величини перестрибу процесу через границю в момент виходу, сумісного розподілу supremum'a, infimum'a і значення процесу.

Введение. В настоящей статье приведено решение ключевой двухграничной задачи для однородных процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий.

Найденные аналитические выражения для интегральных преобразований совместных распределений двухграничных функционалов процесса приведены в терминах интегральных преобразований совместных распределений однограничных функционалов процесса, которые были получены в 60-х годах прошлого столетия в работах Б. А. Рогозина, Е. А. Печерского, А. А. Боровкова, В. М. Золотарева и других.

Для составления интегральных уравнений использованы прямые вероятностные методы, основанные на формуле полной вероятности и свойстве строгой марковости процесса. При решении выведенных линейных интегральных уравнений применен классический метод последовательных итераций. Приведены примеры применения полученных результатов для полунепрерывного процесса, процесса Винера, целочисленных случайных блужданий.

1. Двухграничные задачи для процессов. Пусть $\xi(t) \in R$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями [1] и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2} p^2 \sigma^2 - \alpha p + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2} \right) \Pi(dx), \quad \operatorname{Re} p = 0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что выборочные траектории процесса непрерывны справа и $\xi(0) = 0$. Отметим, что процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, является строго марковским [2].

В процессе решения двухграничных задач для процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, нам понадобятся интегральные преобразования совместных распределений некоторых однограничных функционалов процесса. Пусть

$$\xi^+(t) = \sup_{u \leq t} \xi(u), \qquad \xi^-(t) = \inf_{u \leq t} \xi(u)$$

и ν_s — не зависимая от процесса, показательно распределенная с параметром $s > 0$ случайная величина: $\mathrm{P}[\nu_s > t] = \exp\{-st\}$.

При решении граничных задач для процессов с независимыми приращениями важное значение имеет факторизационное тождество Спицера – Рогозина

$$\mathrm{E}\exp\{-p\xi(\nu_s)\} = \frac{s}{s-k(p)} = \mathrm{E}\exp\left\{-p\xi^+(\nu_s)\right\} \mathrm{E}\exp\left\{-p\xi^-(\nu_s)\right\}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

где

$$\mathrm{E}\exp\left\{-p\xi^{\pm}(\nu_s)\right\} = \exp\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{t}e^{-st}\,\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)}-1;\ \pm\xi(t)>0\right]dt\right\}, \quad \pm\mathrm{Re}\,p \geq 0.$$

Для $x, y > 0$ введем случайные величины:

$$\tau^x = \inf\{t\colon \xi(t) \geq x\}, \qquad T^x = \xi(\tau^x) - x,$$
$$\tau_y = \inf\{t\colon \xi(t) \leq -y\}, \qquad T_y = -\xi(\tau_y) - y$$

— соответственно момент и величина первого пересечения процессом верхнего x и нижнего $-y$ уровней.

Лемма 1. *Пусть* $\xi(t) \in R$, $t \geq 0$, *— однородный процесс с независимыми приращениями. Тогда для интегральных преобразований совместных распределений* $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_y, T_y\}$, $\{\xi(\nu_s), \xi^{\pm}(\nu_s)\}$ *при* $s > 0$ *выполняются равенства*

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x}\exp\left\{-pT^x\right\}\right] = \left(\mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\right)^{-1}\mathrm{E}\left[e^{-p\left(\xi^+(\nu_s)-x\right)};\ \xi^+(\nu_s)\geq x\right], \quad \mathrm{Re}\,p\geq 0,$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y}\exp\left\{-pT_y\right\}\right] = \left(\mathrm{E}e^{p\xi^-(\nu_s)}\right)^{-1}\mathrm{E}\left[e^{p\left(\xi^-(\nu_s)+y\right)};\ -\xi^-(\nu_s)\geq y\right], \quad \mathrm{Re}\,p\geq 0,$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s)<x\right] = \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\mathrm{E}\left[e^{-p\xi^+(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s)<x\right], \quad \mathrm{Re}\,p\leq 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^-(\nu_s)>-x\right] = \mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\mathrm{E}\left[e^{-p\xi^-(\nu_s)};\ \xi^-(\nu_s)>-x\right], \quad \mathrm{Re}\,p\geq 0.$$

Доказательство. Интегральные преобразования совместных распределений этих граничных функционалов известны [3] как для случайных блужданий, так и для однородных процессов с независимыми приращениями. Приведем краткий вывод равенств (2), основанный на использовании факторизационного тождества Спицера – Рогозина и простых вероятностных рассуждениях. Согласно формуле полной вероятности и свойству строгой марковости процесса, справедливо равенство

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(\nu_s)} = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s)<x\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x}e^{-p\xi(\tau^x)}\right]\mathrm{E}e^{-p\xi(\nu_s)}, \quad \mathrm{Re}\,p=0. \tag{3}$$

Это равенство отражает тот факт, что приращения процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, на интервале $[0, \nu_s]$ происходят либо на траекториях, которые не пересекают уровень x (первое слагаемое в правой части равенства), либо на траекториях, которые пересекают уровень x с последующими приращениями процесса на показательно распределенном интервале $[0, \nu_s]$ (второе слагаемое правой части равенства). Приведем также следующее пояснение. Согласно формуле полной вероятности, справедливо равенство

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(t)} = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \tau^x>t\right] + \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \tau^x\leq t\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^+(t)<x\right] + \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p\theta_{\tau^x}\xi(t-\tau^x)};\ \tau^x\leq t\right], \quad \mathrm{Re}\,p=0, \tag{4}$$

где θ_t — оператор сдвига [2]. Поскольку τ^x — марковский момент, приращения процесса $\theta_{\tau^x}\xi(t-\tau^x)$ не зависят от сигма-алгебры $\mathfrak{F}_{\tau^x}$, порожденной событиями $\{\xi(u)<v\}\cap\{\tau^x>u\}$ при всевозможных u, v. Поэтому

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p\theta_{\tau^x}\xi(t-\tau^x)};\ \tau^x \le t\right] = \int_0^t \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(u)};\ \tau^x \in du\right]\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t-u)}\right].$$

Подставляя найденное выражение в (4), находим

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(t)} = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^+(t) < x\right] + \int_0^t \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(u)};\ \tau^x \in du\right]\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t-u)}\right].$$

Умножая обе части этого равенства на плотность se^{-st} случайной величины ν_s и выполняя интегрирование по всем $t \ge 0$, получаем равенство (3).

Используя тождество Спицера – Рогозина, перепишем равенство (3) в следующем виде:

$$\left(\mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\right)^{-1}\mathrm{E}\left[e^{-p(\xi(\nu_s)-x)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right] - \mathrm{E}\left[e^{-p\left(\xi^+(\nu_s)-x\right)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-p\left(\xi^+(\nu_s)-x\right)};\ \xi^+(\nu_s) \ge x\right] - \mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\,\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x}\exp\left\{-pT^x\right\}\right], \quad \operatorname{Re} p = 0.$$

Левая часть этого равенства содержит ограниченную функцию, аналитическую в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, непрерывную, включая границу $\operatorname{Re} p = 0$. Этим равенством она продолжается до функции, аналитической в правой полуплоскости, оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, согласно теореме Лиувилля, она тождественно равна константе $C(s)$, которая в данном случае легко вычисляется: $C(s) = 0$.

Мы провели стандартные факторизационные рассуждения [4], в результате которых из этого равенства получим две формулы для интегральных преобразований распределения $\{\tau^x,\ T^x\}$ и совместного распределения $\{\xi(\nu_s),$ $\xi^+(\nu_s)\}$:

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x}\exp\left\{-pT^x\right\}\right] = \left(\mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\right)^{-1}\mathrm{E}\left[e^{-p\left(\xi^+(\nu_s)-x\right)};\ \xi^+(\nu_s) \ge x\right], \quad \operatorname{Re} p \ge 0,$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right] = \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\,\mathrm{E}\left[e^{-p\xi^+(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right], \quad \operatorname{Re} p \le 0.$$

Применяя для процесса $-\xi(t),\ t \ge 0,$ первую из этих формул, получаем второе равенство леммы; применяя для процесса $-\xi(t),\ t \ge 0,$ вторую из формул, получаем четвертое равенство леммы.

1.1. Выход процесса из интервала. Первая задача, которую мы рассмотрим, — определение интегрального преобразования совместного распределения момента первого выхода процесса из интервала и величины перескока процесса через границу интервала в момент первого выхода. Пусть $B > 0$ фиксировано, $x \in (0, B),\ y = B - x,\ \xi(0) = 0,$ и введем случайную величину

$$\chi = \inf\{t > 0\colon \xi(t) \notin (-y, x)\}$$

— момент первого выхода процесса из интервала $(-y, x)$. Случайная величина χ является марковским моментом [2] и $\mathrm{P}[\chi < \infty] = 1$. Выход процесса из интервала может произойти либо через верхнюю границу x, либо через нижнюю $-y$. Введем события:

$A^x = \{\xi(\chi) \ge x\}$ — выход процесса из интервала произошел через верхнюю границу;

$A_y = \{\xi(\chi) \le -y\}$ — выход процесса из интервала произошел через нижнюю границу.

Определим случайную величину

$$X = (\xi(\chi) - x)\mathrm{I}_{A^x} + (-\xi(x) - y)\mathrm{I}_{A_y} \in R_+, \qquad \mathrm{P}\left[A^x + A_y\right] = 1,$$

— величину перескока процесса через границу в момент первого выхода из интервала, где $\mathrm{I}_A = \mathrm{I}_A(\omega)$ — индикатор события A.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t) \in R,\ t \geq 0,$ — *однородный процесс с независимыми приращениями,* $B > 0$ *фиксировано,* $x \in (0, B),\ y = B - x,\ \xi(0) = 0,$ *и*

$$\chi = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) \notin (-y, x)\}, \qquad X = (\xi(\chi) - x)\mathrm{I}_{A^x} + (-\xi(\chi) - y)\mathrm{I}_{A_y}$$

— *соответственно момент первого выхода процесса из интервала* $(-y, x)$ *и величина перескока процесса через границу в момент первого выхода. Тогда для преобразований Лапласа совместного распределения случайных величин* $\{\chi, X\}$ *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in du,\ A^x\right] &= f_+^s(x, du) + \int_0^\infty f_+^s(x, dv)\mathbf{K}_+^s(v, du), \\ \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in du,\ A_y\right] &= f_-^s(y, du) + \int_0^\infty f_-^s(y, dv)\mathbf{K}_-^s(v, du), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$f_+^s(x, du) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du\right] - \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y};\ T_y \in dv\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}};\ T^{v+B} \in du\right],$$

$$f_-^s(y, du) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y};\ T_y \in du\right] - \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in dv\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\ T_{v+B} \in du\right],$$

$\mathbf{K}_\pm^s(v, du) = \sum_{n=1}^\infty K_\pm^{(n)}(v, du, s),\quad v \geq 0,$ — *ряд Неймана из последовательных итераций,*

$$K_\pm^{(1)}(v, du, s) = K_\pm(v, du, s),$$

$$K_\pm^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty K_\pm^{(n)}(v, dl, s) K_\pm(l, du, s), \quad n \in \mathbf{N},$$

— *последовательные итерации ядер* $K_\pm(v, du, s)$, *которые определены равенствами*

$$K_+(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\ T_{v+B} \in dl\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{l+B}};\ T^{l+B} \in du\right],$$

$$K_-(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}};\ T^{v+B} \in dl\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{l+B}};\ T_{l+B} \in du\right].$$

Доказательство. Для функций $\mathrm{E}\left[e^{-s\chi}; X \in du,\ A^x\right]$, $\mathrm{E}\left[e^{-s\chi}; X \in du,\ A_y\right]$, согласно формуле полной вероятности, однородности процесса по пространству и свойству строгой марковости процесса, справедлива следующая система уравнений:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du\right] = \\
= \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du, A^x\right] + \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in dv, A_y\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}};\, T^{v+B} \in du\right], \\
. \\
\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y};\, T_y \in du\right] = \\
= \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du, A_y\right] + \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in dv, A^x\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\, T_{v+B} \in du\right].
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Первое уравнение данной системы отражает то обстоятельство, что первое пересечение верхнего уровня x процессом $\xi(t)$, $t \geq 0$ (левая часть уравнения), происходит на траекториях, которые либо не пересекают нижний уровень $-y$ (первое слагаемое в правой части уравнения), либо на траекториях, которые пересекают нижний уровень $-y$ и затем впервые пересекают верхний уровень x (второе слагаемое в правой части уравнения). Приведем также следующее краткое пояснение. Очевидно, что

$$
\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du,\ \tau^x < \tau_y\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du, A^x\right],
$$

$$
\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y};\, T_y \in du,\ \tau_y < \tau^x\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du, A_y\right].
$$

Тогда, согласно формуле полной вероятности, справедлива цепочка равенств

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du,\ \tau^x < \tau_y\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du, \tau_y < \tau^x\right] = \\
= \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du,\ A^x\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s\chi} e^{-s\tau^{B+X}};\, T^{B+X} \in du,\ A_y\right].
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Поскольку χ — марковский момент, случайные величины τ^{B+X}, T^{B+X} не зависят от сигма-алгебры $\mathfrak{F}_\chi$, порожденной событиями $\{\xi(u) < v\} \cap \{\chi > u\}$ при всевозможных u, v. Поэтому

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\left[e^{-s\chi} e^{-s\tau^{B+X}};\, T^{B+X} \in du,\ A_y\right] = \\
= \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in dv,\ A_y\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}};\, T^{v+B} \in du\right].
\end{gathered}
$$

Подставляя правую часть этого равенства в (7), получаем первое равенство системы (6). Справедливость второго равенства системы устанавливается аналогично.

Перейдем к решению системы линейных интегральных уравнений (6). Она аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя в первое уравнение выражение для $\mathrm{E}[e^{-s\chi}; X \in du,\ A_y]$ из второго уравнения, имеем

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du,\ A^x\right] = f_+^s(x, du) + \\
+ \int_{l=0}^\infty \int_{v=0}^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in dv,\ A^x\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\, T_{v+B} \in dl\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{l+B}};\, T^{l+B} \in du\right],
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где

$$f_+^s(x, du) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du\right] - \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_y};\ T_y \in dv\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}};\ T^{v+B} \in du\right].$$

Изменяя во втором слагаемом правой части (8) порядок интегрирования, получаем линейное интегральное уравнение относительно функции $\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in du,\ A^x\right]$:

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in du,\ A^x\right] = f_+^s(x, du) + \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A^x\right] K_+(v, du, s). \qquad (9)$$

Для ядра этого уравнения $K_+(v, du, s)$ для всех $v, u \in \mathrm{R}_+$, $s > s_0 > 0$ справедлива оценка

$$K_+(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\ T_{v+B} \in dl\right]\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{l+B}};\ T^{l+B} \in du\right] \le$$

$$\le \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\ T_{v+B} \in dl\right]\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^{l+B}\right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^B\right\}\int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{v+B}};\ T_{v+B} \in dl\right] \le$$

$$\le \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^B\right\}\mathrm{E}\exp\{-s\tau_B\} \le \lambda < 1, \quad s > s_0 > 0,$$

где

$$\lambda = \mathrm{E}\exp\left\{-s_0\tau^B\right\}\mathrm{E}\exp\{-s_0\tau_B\} < 1, \quad s_0 > 0.$$

Эта цепочка неравенств приведена в [2] при решении задачи о совместном распределении supremum'a, infimum'a и значении однородного процесса с независимыми приращениями. При выводе этой цепочки мы воспользовались также неравенством $\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^{v+B}\right\} \le \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^B\right\}$, $v \ge 0$, которое следует из соотношений

$$\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^{v+B}\right\} = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B > v\right] + \int_0^v \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B \in du\right]\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^{v-u}\right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B > v\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B \le v\right] = \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^B\right\}.$$

Естественно, что выполняется и неравенство $\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau_{v+B}\right\} \le \mathrm{E}\exp\{-s\tau_B\}$, $v \ge 0$. И если

$$K_+^{(1)}(v, du, s) = K_+(v, du, s),$$

$$K_+^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, dl, s)\, K_+(l, du, s), \quad n \in \mathbf{N},$$

— последовательность n-х итераций ядра $K_+(v, du, s)$, то по индукции устанавливаем, что для всех $v, u \in \mathrm{R}_+$, $s > s_0 > 0$ справедлива оценка $K_+^{(n)}(v, du, s) < \lambda^n$, $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, ряд

$$\mathbf{K}_+^s(v, du) = \sum_{n=1}^\infty K_+^{(n)}(v, du, s) < \lambda(1-\lambda)^{-1},$$

состоящий из последовательных итераций ядра $K_+(v, du, s)$, сходится равномерно по $v, u \in \mathrm{R}_+$, $s > s_0 > 0$. Применяя для решения линейного интегрального уравнения (9) метод последовательных итераций [5], находим первое из равенств (5). Справедливость второго из равенств (5) устанавливается аналогично.

1.2. Выход из интервала полунепрерывного процесса. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — полунепрерывный снизу однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2} p^2 \sigma^2 - \alpha p + \int_0^\infty \left(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2} \right) \Pi(dx), \quad \mathrm{Re}\, p \geq 0. \tag{10}$$

Мы исключаем из рассмотрения монотонные неубывающие процессы. Тогда нижний уровень достигается процессом непрерывным образом, и для интегральных преобразований распределений нижних граничных функционалов τ_x, $\xi^-(\nu_s)$ справедливы формулы

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_x}; \, T_x \in du\right] = e^{-xc(s)} \delta(u)\, du, \qquad \mathrm{E}\exp\left\{-p\xi^-(\nu_s)\right\} = \frac{c(s)}{c(s) - p}, \quad \mathrm{Re}\, p \leq 0,$$

где $c(s) > 0$ — единственный корень в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$ уравнения $k(p) - s = 0$, $s > 0$, а $\delta(u)$ — обобщенная дельта-функция. Используя факторизационное тождество Спицера – Рогозина и первое из равенств (2), находим интегральное преобразование совместного распределения $\{ \tau^x, \xi(\tau^x) \}$ момента первого пересечения верхнего уровня x процессом $\xi(t)$ и значения процесса в момент первого пересечения:

$$\int_0^\infty e^{-px} \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^x - \lambda \xi(\tau^x)\right\} dx = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p + \lambda - c(s)}{k(p+\lambda) - s} \frac{k(\lambda) - s}{\lambda - c(s)} \right). \tag{11}$$

Пусть $B > 0$ фиксировано, $x \in (0, B)$, $y = B - x$, $\xi(0) = 0$ и

$$\chi = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) \notin (-y, x)\} \quad \text{и} \quad X = (\xi(\chi) - x)\mathrm{I}_{A^x} + (-\xi(\chi) - y)\mathrm{I}_{A_y}$$

— соответственно момент первого выхода процесса из интервала $(-y, x)$ и величина перескока процесса через границу в момент первого выхода, где $A^x = \{\xi(\chi) \geq x\}$, $A_y = \{\xi(\chi) = -y\}$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\xi(t) \in R$, $t \geq 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями, полунепрерывный снизу,* $s > 0$. *Тогда*:

1) *для интегральных преобразований совместных распределений случайных величин* $\{\chi, X\}$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi}; \, A_y\right] = e^{-yc(s)} \frac{1 - G_x^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))},$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi}; \, X \in du, \, A^x\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x}; \, T^x \in du\right] - \mathrm{E}\left[e^{-s\chi}; \, A_y\right] \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B}; \, T^B \in du\right], \tag{12}$$

где

$$G_x^s(\lambda) = \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^x - \lambda\xi(\tau^x)\right\}, \quad x > 0,$$

и интегральное преобразование этой функции определено равенством (11);

2) *для интегральных преобразований моментов выхода из интервала справедливы резольвентные представления*

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, A_y\right] = \frac{R_x(s)}{R_B(s)},$$
$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, A^x\right] = 1 - \frac{R_x(s)}{R_B(s)} - s\,\frac{R_x(s)}{R_B(s)}\int_0^B R_u(s)\,du + s\int_0^x R_u(s)\,du, \tag{13}$$

где [6]

$$R_x(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xp}\,\frac{1}{k(p)-s}\,dp, \quad \gamma > c(s), \tag{14}$$

— *резольвента полунепрерывного процесса с независимыми приращениями.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что интегральные преобразования распределений моментов выхода из интервала для полунепрерывного процесса впервые были получены в работах D. J. Emery [7] и Е. А. Печерского [8]. Равенства (13) были получены резольвентными методами в работах В. М. Шуренкова, В. Н. Супруна [9, 10]. Для процесса Пуассона с положительными скачками и отрицательным течением равенства (13) приведены в [11]. Равенства (12), в которых содержится и распределение величины перескока процесса через верхнюю границу в момент выхода из интервала через верхнюю границу, были получены в статьях [12, 13] после решения уравнений (6) для случая полунепрерывного процесса. Именно это обстоятельство (наличие распределения величины перескока) позволило решить ряд двухграничных задач для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями [12 – 14].

Получим формулы (12), исходя из равенств теоремы, которые для полунепрерывного процесса существенно упрощаются. В этом случае функция $f_-^s(y, du)$ и последовательные итерации $K_-^{(n)}(v, du, s)$, $n \in \mathbf{N}$, легко вычисляются:

$$f_-^s(y, du) = e^{-yc(s)}\left(1 - G_x^s(c(s))\right)\delta(u)\,du,$$
$$K_-^{(n)}(v, du, s) = e^{vc(s)}\,G_{v+B}^s(c(s))\left(G_B^s(c(s))\right)^{n-1}\delta(u)\,du, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ряд Неймана, состоящий из последовательных итераций ядра $K_-(v, du, s)$, образует геометрическую прогрессию, и его сумма равна

$$\mathbf{K}_-^s(v, du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_-^{(n)}(v, du, s) = e^{vc(s)}\,\frac{G_{v+B}^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))}\,\delta(u)\,du.$$

Подставляя выражения для функций $f_-^s(y, du)$, $\mathbf{K}_-^s(v, du)$ во вторую формулу теоремы, находим

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\, X \in du,\, A_y\right] = e^{-yc(s)}\,\frac{1 - G_x^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))}\,\delta(u)\,du. \tag{15}$$

После интегрирования (15) по всем $u \in R_+$ получим первое из равенств (12). Функция $f_+^s(x, du)$ и последовательные итерации $K_+^{(n)}(v, du, s)$ в случае полунепрерывного процесса также легко вычисляются:

$$f_+^s(x, du) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\, T^x \in du\right] - e^{-yc(s)}\,\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\, T^B \in du\right],$$
$$K_+^{(n)}(v, du, s) = e^{-c(s)(v+B)}\left(G_B^s(c(s))\right)^{n-1}\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\, T^B \in du\right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ряд Неймана, состоящий из последовательных итераций ядра $K_+(v, du, s)$, образует геометрическую прогрессию, и его сумма равна

$$\mathrm{K}_+^s(v, du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_+^{(n)}(v, du, s) = \frac{e^{-c(s)(v+B)}}{1 - G_B^s(c(s))} \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B \in du\right].$$

Подставляя выражения для функций $f_+^s(x, du)$, $\mathbf{K}_+^s(v, du)$ в первую формулу теоремы, находим второе из равенств (12):

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in du,\ A^x\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du\right] - e^{-yc(s)} \frac{1 - G_x^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))} \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^B};\ T^B \in du\right]. \tag{16}$$

Интегрируя равенства (15), (16) по всем $u \in R_+$, имеем

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ A_y\right] = e^{-yc(s)} \frac{1 - G_x^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))},$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ A^x\right] = \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^x\right\} - e^{-yc(s)} \frac{1 - G_x^s(c(s))}{1 - G_B^s(c(s))} \mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^B\right\}.$$

Используя определение резольвенты (14), интегральное преобразование совместного распределения $\{\tau^x, T^x\}$ (11), находим резольвентные представления для функций $G_x^s(c(s))$, $\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^x\right\}$:

$$G_x^s(c(s)) = 1 - k'(c(s))e^{-xc(s)} R_x(s),$$

$$\mathrm{E}\exp\left\{-s\tau^x\right\} = 1 - \frac{s}{c(s)} R_x(s) + s\int_0^x R_u(s)\,du,$$

где $k'(c(s)) = \dfrac{d}{dp} k(p)\Big|_{p=c(s)}$. Подставляя эти резольвентные выражения в предыдущие равенства, получаем равенства (13).

1.3. Выход из интервала симметричного процесса Винера. Пусть $w(t) \in R$, $t \geq 0$, — симметричный процесс Винера с кумулянтой $k(p) = \dfrac{1}{2}p^2$. В этом случае

$$\mathrm{P}\left[T^x = T_x = 0\right] = 1, \quad \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du\right] = e^{-x\sqrt{2s}}\delta(u)\,du = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_x};\ T_x \in du\right]$$

и формулы теоремы принимают особенно простой вид.

Следствие 2. *Пусть* $w(t) \in R$, $t \geq 0$, — *симметричный процесс Винера,* $x \in (0, B)$, $y = B - y$, $w(0) = 0$ *и*

$$\chi = \inf\{t > 0\colon w(t) \notin (-y, x)\}, \qquad A^x = \{w(\chi) = x\}, \qquad A_y = \{w(\chi) = -y\}$$

— *момент первого выхода симметричного процесса Винера из интервала* $(-y, x)$ *и события, на которых этот выход происходит. Тогда*:

1) *для преобразований Лапласа случайной величины* χ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ A^x\right] = \frac{\mathrm{sh}\left(y\sqrt{2s}\right)}{\mathrm{sh}\left(B\sqrt{2s}\right)}, \qquad \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ A_y\right] = \frac{\mathrm{sh}\left(x\sqrt{2s}\right)}{\mathrm{sh}\left(B\sqrt{2s}\right)},$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\chi}\right] = \frac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\sqrt{2s}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{B}{2}\sqrt{2s}\right)}; \tag{17}$$

2) *для распределений случайной величины* χ *справедливы формулы*

$$\mathrm{P}\big[\chi > t;\ A^x\big] = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{k\pi}{B}\right)^2\right)\sin\left(\frac{x}{B}k\pi\right),$$

$$\mathrm{P}\big[\chi > t;\ A_y\big] = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{k\pi}{B}\right)^2\right)\sin\left(\frac{y}{B}k\pi\right), \tag{18}$$

$$\mathrm{P}[\chi > t] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{(2k+1)\pi}{B}\right)^2\right)\cos\left(\frac{x-y}{2B}(2k+1)\pi\right);$$

3) *для вычисления моментов случайной величины* χ *имеет место формула*

$$\mathrm{E}\chi^n = \frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{B}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x-y}{B}\right)^{2k}\binom{2n}{2k}\mathbf{E}_{n-k}, \quad n\in\mathbf{N}, \tag{19}$$

и, в частности, при $x = y = \dfrac{B}{2}$

$$\mathrm{E}\chi^n = \frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{B}{2}\right)^{2n}\mathbf{E}_n, \quad n\in\mathbf{N},$$

где $\mathbf{E}_1 = 1$, $\mathbf{E}_2 = 5, \ldots$ — *числа Эйлера.*

Доказательство. В случае симметричного процесса Винера

$$K_{\pm}(v, du, s) = e^{-v\sqrt{2s}}\,e^{-2B\sqrt{2s}}\,\delta(u)\,du,$$

$$\mathbf{K}^s_{\pm}(v, du) = e^{-v\sqrt{2s}}\,\frac{e^{-2B\sqrt{2s}}}{1-e^{-2B\sqrt{2s}}}\,\delta(u)\,du.$$

Подставляя эти выражения в равенства (5), получаем равенства (17). Формулы (17) приведены в монографии К. Ито, Г. Маккина [15]. Для определения функций

$$\mathrm{E}\big[e^{-s\chi};\ A^x\big] = \mathrm{E}\big[e^{-s\chi};\ \tau^x < \tau_y\big], \qquad \mathrm{E}\big[e^{-s\chi};\ A_y\big] = \mathrm{E}\big[e^{-s\chi};\ \tau_y < \tau^x\big]$$

в [15] приведена система уравнений, аналогичная системе (6), записанной для случая симметричного процесса Винера. Далее,

$$\mathrm{P}\big[\chi < t;\ A^x\big] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\,\frac{1}{s}\,\frac{e^{y\sqrt{2s}} - e^{-y\sqrt{2s}}}{e^{B\sqrt{2s}} - e^{-B\sqrt{2s}}}\,ds, \quad \gamma > 0.$$

Используя при вычислении этого контурного интеграла то обстоятельство, что подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $s_k = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k\pi}{B}\right)^2$, $k\in\mathbf{N}\bigcup 0$, и выбирая подходящий контур интегрирования [16], получаем первое из равенств (18). Остальные два равенства из (18) являются следствием первого. Отметим, что распределения (18) являются предельными для соответствующих распределений процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий. Кроме того, формулы (18) являются полными асимптотическими разложениями для вероятностей, содержащихся в их левых частях. Формула (19) следует из разложения в ряд функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sech} x = (\operatorname{ch} x)^{-1}$.

Замечание 1. В качестве побочного следствия приведем формулу для вычисления рядов $(x, y > 0,\ x + y = B)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} \cos\left(\frac{x-y}{2B}(2k+1)\pi\right) =$$

$$= \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{x-y}{B}\right)^{2k} \frac{\mathbf{E}_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

которая следует из формулы (19) и третьего из равенств (18). В частности, при $x = y$ из этой формулы получим известные из анализа ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} \frac{1}{(2n)!} \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{E}_0 = 1, \quad n \in \mathbf{N} \cup 0.$$

1.4. Supremum, infimum и значение процесса. Пусть $\xi(t) \in R$, $t \ge 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (1). Применим теорему 1 для определения функции

$$Q^s(p) = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \chi > \nu_s\right] = \int_{-y}^{x} e^{-up} \mathrm{P}\left[-y < \xi^-(\nu_s),\ \xi(\nu_s) \in du,\ \xi^+(\nu_s) < x\right].$$

Совместное распределение $\{\xi^-(\nu_s),\ \xi(\nu_s),\ \xi^+(\nu_s)\}$ было получено в монографии И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [2] в терминах распределений $\xi(t)$, $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_y, T_y\}$. Для составления уравнений использовались вероятностно-комбинаторные рассуждения, основанные на формуле включения и исключения. Для решения интегральных уравнений был применен метод последовательных итераций. Мы полагаем, что это была первая двухграничная задача, решенная для однородного процесса с независимыми приращениями.

В следующей лемме мы приведем выражение для интегрального преобразования совместного распределения $\{\xi^-(\nu_s),\ \xi(\nu_s),\ \xi^+(\nu_s)\}$ в терминах распределения $\{\chi, X\}$ и распределения $\{\{\xi(\nu_s),\ \xi^{\pm}(t)\}$, определенного равенством (2).

Лемма 2. *Пусть* $\xi(t) \in R$, $t \ge 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями. Тогда для интегрального преобразования* $Q^s(p)$ *совместного распределения* $\{\xi^-(\nu_s),\ \xi(\nu_s),\ \xi^+(\nu_s)\}$ *справедливы следующие равенства:*

$$Q^s(p) = U^x(s,p) - e^{yp} \int_0^{\infty} e^{vp} \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A_y\right] U^{v+B}(s,p), \quad \operatorname{Re} p \le 0,$$

$$Q^s(p) = U_y(s,p) - e^{-xp} \int_0^{\infty} e^{-vp} \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A^x\right] U_{v+B}(s,p), \quad \operatorname{Re} p \ge 0, \tag{20}$$

где

$$U^x(s,p) = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right] =$$

$$= \mathrm{E} e^{-p\xi^-(\nu_s)} \mathrm{E}\left[e^{-p\xi^+(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right], \quad \operatorname{Re} p \le 0,$$

$$U_y(s,p) = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^-(\nu_s) > -y\right] =$$

$$= \mathrm{E} e^{-p\xi^+(\nu_s)} \mathrm{E}\left[e^{-p\xi^-(\nu_s)};\ \xi^-(\nu_s) > -y\right], \quad \operatorname{Re} p \ge 0.$$

В частности,

$$\mathrm{P}[\chi > \nu_s] = \mathrm{P}\left[\xi^+(\nu_s) < x\right] - \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A_y\right]\mathrm{P}\left[\xi^+(\nu_s) < v + B\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\xi^-(\nu_s) > -y\right] - \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A^x\right]\mathrm{P}\left[\xi^-(\nu_s) > -(v + B)\right]. \qquad (21)$$

Доказательство. Установим справедливость первой из формул (20). Согласно формуле полной вероятности, однородности процесса по пространству и свойству строгой марковости процесса, имеет место уравнение

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right] = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \chi > \nu_s\right] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-s\chi};\ X \in dv,\ A_y\right] e^{(v+y)p}\,\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < v + B\right], \quad \operatorname{Re} p \le 0. \qquad (22)$$

Это уравнение отражает то обстоятельство, что приращения процесса $\xi(t)$ на траекториях, которые не пересекают уровень x на интервале $[0, \nu_s]$, происходят либо на траекториях процесса, которые не пересекают и уровень $-y$ (первое слагаемое в правой части этого равенства), либо на траекториях процесса, которые пересекают уровень $-y$ с дальнейшими приращениями на траекториях, которые не пересекают уровень x на интервале $[0, \nu_s]$ (второе слагаемое в правой части этого равенства).

Кроме этого замечания приведем следующие пояснения. Ясно, что событие $\{\xi^+(t) < x\}$ эквивалентно событию $\{\tau^x > t\}$. Тогда, согласно формуле полной вероятности, справедливы равенства

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^+(t) < x\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^+(t) < x,\ \tau_y > t\right] + \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \tau^x > t,\ \tau_y \le t\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^-(t) > -y,\ \xi^+(t) < x\right] +$$

$$+ \mathrm{E}\left[e^{p(y+X)} e^{-p\theta_\chi \xi(t-\chi)};\ \chi \le t,\ \tau^{B+X} > t - \chi,\ A_y\right],$$

где θ_t — оператор сдвига. Поскольку χ — марковский момент, приращения процесса $\theta_\chi \xi(t-\chi)$ и τ^{B+X} не зависят от сигма-алгебры $\mathfrak{F}_\chi$, и поэтому

$$\mathrm{E}\left[e^{p(y+X)} e^{-p\theta_\chi \xi(t-\chi)};\ \chi \le t,\ \tau^{B+X} > t - \chi,\ A_y\right] =$$

$$= e^{py} \int_0^t \int_0^\infty e^{pv}\,\mathrm{P}\left[\chi \in du,\ X \in dv,\ A_y\right]\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t-u)};\ \tau^{v+B} > t - u\right].$$

Подставляя правую часть этой формулы в предыдущее равенство, находим

$$\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^+(t) < x\right] = \mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t)};\ \xi^-(t) > -y,\ \xi^+(t) < x\right] +$$

$$+ e^{py} \int_0^t \int_0^\infty e^{pv}\,\mathrm{P}\left[\chi \in du,\ X \in dv,\ A_y\right]\mathrm{E}\left[e^{-p\xi(t-u)};\ \xi^+(t-u) < v + B\right].$$

Умножая это равенство на плотность se^{-st} случайной величины ν_s и выполняя интегрирование по всем $t \ge 0$, получаем равенство (22). Из равенства (22) следует первая из формул (20). Справедливость второй из формул (20) устанавливается аналогично. Равенство (21) следует из равенств (20) при $p = 0$.

1.5. Supretum, infitum и значение полунепрерывного процесса. Если

$\xi(t)$, $t \ge 0$, — полунепрерывный снизу однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (10), то равенства леммы упрощаются. В этом случае

$$Q^s(p) = U^x(s, p) - e^{yp} \frac{R_x(s)}{R_B(s)} U^B(s, p), \tag{23}$$

где

$$U^x(s, p) = \frac{c(s)}{c(s) - p} \mathrm{E}\left[e^{-s\xi^+(\nu_s)};\ \xi^+(\nu_s) < x\right], \quad \mathrm{Re}\, p \le 0.$$

Равенство (23) получено в работе [14] из уравнения (22), которое было приведено в этой статье для случая полунепрерывного снизу процесса с независимыми приращениями. Далее, в указанной работе было получено резольвентное представление

$$\mathrm{P}\left[-y < \inf_{u \le \nu_s} \xi(u),\ \xi(\nu_s) \in (\alpha, \beta),\ \sup_{u \le \nu_s} \xi(u) < x\right] =$$

$$= s\frac{R_x(s)}{R_B(s)} \int_\alpha^\beta R_{y+u}(s)\,du - s \int_{\max\{0,\alpha\}}^{\max\{0,\beta\}} R_u(s)\,du, \quad -y < \alpha < \beta < x,$$

для совместного распределения $\{\xi^-(\nu_s),\ \xi(\nu_s),\ \xi^+(\nu_s)\}$, где $R_x(s)$ — резольвента полунепрерывного процесса.

1.6. Supremum, infimum и значение симметричного процесса Винера. Для симметричного процесса Винера $w(t) \in R$, $t \ge 0$, с кумулянтой $k(p) = \frac{1}{2}\sigma^2 p^2$ в [14] было получено совместное распределение $\{\xi^-(t),\ \xi(t),\ \xi^+(t)\}$ в следующем виде:

$$\mathrm{P}\left[-y < \inf_{u \le t} w(u),\ w(t) \in (\alpha, \beta),\ \sup_{u \le t} w(u) < x\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{\pi\nu\sigma}{B}\right)^2\right) \sin\left(\frac{x}{B}\pi\nu\right) \sin\left(\frac{2x - \alpha - \beta}{2B}\pi\nu\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2B}\pi\nu\right).$$

Это распределение является предельным для распределений однородных процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий при соответствующей нормировке пространства и времени. Такая предельная теорема была доказана в [14] для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями. Отметим, что правая часть этого равенства является полным асимптотическим разложением для вероятности, содержащейся в левой части равенства. Для этого распределения известна также формула

$$\mathrm{P}\left[-y \le \inf_{u \le t} w(u),\ w(t) \in (\alpha, \beta),\ \sup_{u \le t} w(u) \le x\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(u - 2k(x+y))^2/2t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(u - 2x - 2k(x+y))^2/2t} \right) du,$$

полученная П. Леви в 1948 году [17].

2. Двухграничные задачи для случайных блужданий. Важным примером однородных процессов с независимыми приращениями являются случайные блуждания.

Пусть $\xi \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$ — целочисленная случайная величина, $\{\xi,\ \xi_i\}$, $i \in \mathbf{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — случайное блуждание: $\xi(0) = 0$, $\xi(n) =$

$= \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbf{N}$, порожденное случайной величиной ξ. Обозначим

$$\xi^+(n) = \sup_{m \le n} \xi(m), \qquad \xi^-(n) = \inf_{m \le n} \xi(m), \quad m, n \in \mathbf{N} \cup 0.$$

Справедливо факторизационное тождество Спицера [18]

$$\mathrm{E} z^{\xi(\nu_t)} = \frac{1-t}{1-t\mathrm{E} z^{\xi}} = \mathrm{E} z^{\xi^+(\nu_t)} \mathrm{E} z^{\xi^-(\nu_t)}, \quad |z| = 1,$$

где ν_t на протяжении второго пункта — не зависимая от блуждания, геометрически распределенная с параметром $t \in (0, 1)$ случайная величина: $\mathrm{P}[\nu_t = n] = (1-t)t^n$, $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{E} z^{\xi^{\pm}(\nu_t)} = \exp\left\{ \sum_{n>0} \frac{t^n}{n} \mathrm{E}\left[z^{\xi(n)} - 1;\ \pm\xi(n) > 0 \right] \right\}, \quad t \in (0,1), \quad \pm|z| \le \pm 1.$$

Для $k, r \in \mathbf{N} \cup 0$ введем случайные величины

$$\tau^k = \inf\{n\colon \xi(n) > k\}, \quad T^k = \xi(\tau^k) - k,$$
$$\tau_r = \inf\{n\colon \xi(n) < -r\}, \quad T_r = -\xi(\tau_r) - r$$

— соответственно момент и величина первого перескока случайным блужданием верхнего k и нижнего $-r$ уровней. Отметим, что моменты достижения множеств случайным блужданием являются марковскими [18], и приведем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *целочисленное случайное блуждание. Тогда для производящих функций совместных распределений* $\{\tau^k, T^k\}$, $\{\tau_r, T_r\}$, $\{\xi(\nu_t), \xi^{\pm}(\nu_t)\}$ *при* $t \in (0, 1)$ *выполняются равенства*

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[t^{\tau^k} z^{T^k} \right] &= \left(\mathrm{E} z^{\xi^+(\nu_t)} \right)^{-1} \mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)-k};\ \xi^+(\nu_t) > k \right], \quad |z| \le 1, \\
\mathrm{E}\left[t^{\tau_r} z^{T_r} \right] &= \left(\mathrm{E} z^{-\xi^-(\nu_t)} \right)^{-1} \mathrm{E}\left[z^{\left(-\xi^-(\nu_t)-r\right)};\ -\xi^-(\nu_t) > r \right], \quad |z| \le 1, \\
\mathrm{E}\left[z^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k \right] &= \mathrm{E} z^{\xi^-(\nu_t)} \mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k \right], \quad |z| \ge 1, \\
\mathrm{E}\left[z^{\xi(\nu_t)};\ \xi^-(\nu_t) \ge -k \right] &= \mathrm{E} z^{\xi^+(\nu_t)} \mathrm{E}\left[z^{\xi^-(\nu_t)};\ \xi^-(\nu_t) \ge -k \right], \quad |z| \le 1.
\end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Согласно формуле полной вероятности и строгой марковости случайного блуждания, для всех $k \in \mathbf{N} \cup 0$ справедливо уравнение

$$\mathrm{E} z^{\xi(\nu_t)} = \mathrm{E}\left[z^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k \right] + \mathrm{E}\left[t^{\tau^k} z^{\xi(\tau^k)} \right] \mathrm{E} z^{\xi(\nu_t)}, \quad |z| = 1.$$

Это уравнение отражает то обстоятельство, что приращение блуждания на интервале $[0, \nu_t]$ происходит на траекториях, которые либо не пересекают верхний уровень k (первое слагаемое в правой части уравнения), либо на траекториях, которые пересекают уровень k с последующими приращениями на интервале $[0, \nu_t]$ (второе слагаемое в правой части уравнения). Использовав факторизационное тождество Спицера, представим это уравнение в виде

$$\mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)-k};\ \xi^+(\nu_t) > k \right] - \mathrm{E}\left[t^{\tau^k} z^{T^k} \right] \mathrm{E} z^{\xi^+(\nu_t)} =$$
$$= \mathrm{E}\left[z^{\xi(\nu_t)-k};\ \xi^+(\nu_t) \le k \right] \left(\mathrm{E} z^{\xi^-(\nu_t)} \right)^{-1} - \mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)-k};\ \xi^+(\nu_t) \le k \right], \quad |z| = 1.$$

Левая часть этого равенства содержит ограниченную функцию, аналитическую внутри единичного круга $|z|<1$ и непрерывную, включая границу круга. Этим равенством она аналитически продолжается во внешность круга, оставаясь при этом ограниченной и непрерывной. Следовательно, согласно теореме Лиувилля, она тождественно равна константе $C(t)$ во всей плоскости. Полагая в выражении, содержащемся в левой части этого равенства, $z=0$, находим $C(t)=0$.

Мы провели стандартные факторизационные рассуждения [4], в результате которых из этого равенства получим две формулы для производящей функции совместного распределения $\{\tau^k, T^k\}$ и производящей функции совместного распределения $\{\xi(\nu_t), \xi^+(\nu_t)\}$:

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau^k} z^{T^k}\right] = \left(\mathrm{E} z^{\xi^+(\nu_t)}\right)^{-1} \mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)-k};\ \xi^+(\nu_t)>k\right], \quad |z|\le 1,$$

$$\mathrm{E}\left[z^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t)\le k\right] = \mathrm{E} z^{\xi^-(\nu_t)}\, \mathrm{E}\left[z^{\xi^+(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t)\le k\right], \quad |z|\ge 1.$$

Применяя к случайному блужданию $-\xi(n)$, $n\in\mathbf{N}\cup 0$, первую из этих формул, получаем второе равенство леммы. Применяя к случайному блужданию $-\xi(n)$, $n\in\mathbf{N}\cup 0$, вторую из этих формул, получаем четвертое равенство леммы.

2.1. Выход из интервала случайного блуждания. Пусть $B\in\mathbf{N}\cup 0$, $k\in\overline{0,B}$, $r=B-k$ и определим случайную величину

$$\chi = \inf\{n>0\colon \xi(n)\notin[-r,k]\}$$

— момент первого выхода случайного блуждания из множества $\{-r,-r+1,\ldots,k\}$. Введем события:

$A^k=\{\xi(\chi)>k\}$ — первый выход из интервала $[-r,k]$ случайного блуждания произошел через верхнюю границу k,

$A_r=\{\xi(\chi)<-r\}$ — первый выход из интервала $[-r,k]$ случайного блуждания произошел через нижнюю границу $-r$.

Определим случайную величину

$$X = (\xi(\chi)-k)\mathrm{I}_{A^k} + (-\xi(\chi)-r)\mathrm{I}_{A_r}\in\mathbf{N}, \qquad \mathrm{P}\left[A^k+A_r\right] = 1,$$

— величину перескока блуждания через границу в момент первого выхода из интервала.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(n)\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}\cup 0$, — *целочисленное случайное блуждание. Тогда для производящих функций совместных распределений случайных величин* $\{\chi, X\}$ *для* $m\in\mathbf{N}$, $t\in(0,1)$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ X=m,\ A^k\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau^k};\ T^k=i\right]\mathbf{H}_+^t(i,m) - \\ - \sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau_r};\ T_r=l\right]\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau^{l+B}};\ T^{l+B}=i\right]\mathbf{H}_+^t(i,m),$$

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ X=m,\ A_r\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau_r};\ T_r=i\right]\mathbf{H}_-^t(i,m) - \\ - \sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau^k};\ T^k=l\right]\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[t^{\tau_{l+B}};\ T_{l+B}=i\right]\mathbf{H}_-^t(i,m), \qquad (25)$$

где

$$\mathbf{H}_{\pm}^{t}(i, m) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{\pm}^{(n)}(i, m, t), \quad i, m \in \mathbf{N},$$

— *дискретный аналог ряда Неймана из последовательных итераций,*

$$H_{\pm}^{(0)}(i, m, t) = \delta_{im}, \qquad H_{\pm}^{(n)}(i, m, t) = \sum_{l=1}^{\infty} H_{\pm}^{(n-1)}(i, l, t) H_{\pm}(l, m, t), \quad n \in \mathbf{N}, \tag{26}$$

— *последовательные итерации дискретных ядер* $H_{\pm}(i, m, t)$, *которые определены равенствами*

$$H_{+}(i, m, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = l\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{l+B}}; T^{l+B} = m\right], \quad i, m \in \mathbf{N},$$

$$H_{-}(i, m, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}}; T^{i+B} = l\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau_{l+B}}; T_{l+B} = m\right], \quad i, m \in \mathbf{N}, \tag{27}$$

а δ_{im} — *символ Кронекера.*

Доказательство. Для функций $\mathrm{E}[t^{\chi}; X = m, A^k]$, $\mathrm{E}[t^{\chi}; X = m, A_r]$, $m \in \mathbf{N}$, согласно формуле полной вероятности, однородности блуждания по пространству и свойству строгой марковости случайного блуждания, справедлива система уравнений

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau^k}; T^k = m\right] = \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = m, A^k\right] + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = i, A_r\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}}; T^{i+B} = m\right],$$

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau_r}; T_r = m\right] = \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = m, A_r\right] + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = i, A^k\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = m\right]. \tag{28}$$

Первое уравнение данной системы отражает то обстоятельство, что первое пересечение верхнего уровня k случайным блужданием осуществляется на траекториях блуждания, которые либо не пересекают нижний уровень $-r$, либо на траекториях, которые пересекают нижний уровень $-r$ с последующим первым пересечением верхнего уровня k. Аналогично составлено и второе уравнение системы.

Перейдем к решению системы уравнений (28). Эта система уравнений аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя в первое уравнение выражение для производящей функции $\mathrm{E}[t^{\chi}; X = m, A_r]$ из второго уравнения, получаем

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = m, A^k\right] = \mathrm{E}\left[t^{\tau^k}; T^k = m\right] - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_r}; T_r = i\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}}; T^{i+B} = m\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = i, A^k\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = l\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{l+B}}; T^{l+B} = m\right], \quad m \in \mathbf{N}.$$

Изменяя в третьем слагаемом правой части уравнения порядок суммирования, имеем

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = m, A^k\right] = \mathrm{E}\left[t^{\tau^k}; T^k = m\right] - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_r}; T_r = i\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}}; T^{i+B} = m\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\chi}; X = i, A^k\right] H_{+}(i, m, t), \quad m \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Это уравнение относительно функции $\mathrm{E}[t^{\chi}; X = m, A^k]$, $m \in \mathbf{N}$, является дискретным аналогом линейного интегрального уравнения (9). Для дискретного ядра уравнения $H_+(i, m, t)$ для всех $i, m \in \mathbf{N}$, $t \in (0, t_0)$ справедлива оценка

$$H_+(i, m, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = l\right] \mathrm{E}\left[t^{\tau^{l+B}}; T^{l+B} = m\right] \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = l\right] \mathrm{E}t^{\tau^{l+B}} \le \mathrm{E}t^{\tau^B} \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[t^{\tau_{i+B}}; T_{i+B} = l\right] \le$$

$$\le \mathrm{E}t^{\tau^B} \mathrm{E}t^{\tau_B} \le \lambda < 1,$$

где

$$\lambda = \mathrm{E}t_0^{\tau^B} \mathrm{E}t_0^{\tau_B} < 1, \quad t_0 \in (0, 1).$$

При выводе этой цепочки неравенств мы воспользовались неравенствами $\mathrm{E}t^{\tau^{i+B}} \le \mathrm{E}t^{\tau^B}$, $\mathrm{E}t^{\tau_{i+B}} \le \mathrm{E}t^{\tau_B}$, $i \in \mathbf{N}$, которые следуют из равенства

$$\mathrm{E}t^{\tau^{i+B}} = \mathrm{E}\left[t^{\tau^B}; T^B > i\right] + \sum_{l=1}^{i} \mathrm{E}\left[t^{\tau^B}; T^B = l\right] \mathrm{E}t^{\tau^{i-l}}, \quad i \in \mathbf{N}, \quad t \in (0, 1).$$

И если

$$H_+^{(0)}(i, m, t) = \delta_{im}, \qquad H_+^{(n)}(i, m, t) = \sum_{l=1}^{\infty} H_+^{(n-1)}(i, l, t) H_+(l, m, t), \quad n \in \mathbf{N},$$

— последовательность n-х итераций ядра $H_+(i, m, t)$, то по индукции устанавливаем, что для всех $i, m \in \mathbf{N}$, $t \in (0, t_0)$ справедлива оценка $H_+^{(n)}(i, m, t) < \lambda^n$, $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, ряд, состоящий из последовательных итераций

$$\mathbf{H}_+^t(i, m) = \sum_{n=0}^{\infty} K_+^{(n)}(i, m, t) < (1 - \lambda)^{-1},$$

сходится равномерно по $i, m \in \mathbf{N}$, $t \in (0, t_0)$. Применяя для решения уравнения (29) метод последовательных итераций [5], получаем первое из равенств (25). Справедливость второго равенства устанавливается аналогично.

2.2. Выход из интервала блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой. Пусть $\eta \in \mathbf{N} \cup 0$ — неотрицательная целочисленная случайная величина, $\mathrm{P}[\eta = 0]\,\mathrm{P}[\eta > 1] > 0$, а $\gamma \in \mathbf{N}$ — положительная целочисленная случайная величина, геометрически распределенная с параметром λ: $\mathrm{P}[\gamma = k] = (1 - \lambda)\lambda^{k-1}$, $k \in \mathbf{N}$, $0 \le \lambda < 1$. Введем случайную величину

$$\xi = \eta - \gamma \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{E}\theta^{\xi} = \frac{1}{\theta} \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda/\theta} \mathrm{E}\theta^{\eta}, \quad |\theta| = 1.$$

Определим случайное блуждание $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, порожденное случайной величиной ξ: $\xi(0) = 0$, $\xi(n) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbf{N}$, где $\{\xi, \xi_i\}$, $i \in \mathbf{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Это блуждание будем называть случайным блужданием с геометрически распределенной отрицательной компонентой. В частности, если положить параметр $\lambda = 0$, то

$$\mathrm{P}[\gamma = 1] = 1, \quad \xi = \eta - 1, \qquad \mathrm{E}\theta^{\xi} = \frac{1}{\theta}\mathrm{E}\theta^{\eta}, \quad |\theta| = 1,$$

и $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — полунепрерывное снизу блуждание.

Для производящих функций совместных распределений однограничных функционалов $\{\tau^k, T^k\}$, $\{\tau_r, T_r\}$ случайного блуждания $\xi(n)$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, с геометрически распределенной отрицательной компонентой при $t \in (0, 1)$ справедливы равенства [19]

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau_r};\, T_r = m\right] = \lambda^{m-1}(c(t) - \lambda)c(t)^r = \mathrm{E}\left[t^{\tau_r}\right]\mathrm{P}[\gamma = m], \qquad m \in \mathbf{N}, \quad r \in \mathbf{N} \cup 0,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k\, \mathrm{E}\left[t^{\tau^k} z^{\xi(\tau^k)}\right] = \frac{1}{1-\theta}\left(1 - \frac{c(t) - z\theta}{t(1-\lambda)\mathrm{E}(z\theta)^{\eta} + \lambda - z\theta}\, \frac{t(1-\lambda)\mathrm{E}z^{\eta} + \lambda - z}{c(t) - z}\right), \tag{30}$$

где $c(t) \in (\lambda, 1)$ — единственный корень внутри единичного круга $|\theta| < 1$ уравнения

$$\theta - \lambda - t(1-\lambda)\mathrm{E}\theta^{\eta} = 0, \quad t \in (0, 1).$$

Следствие 3. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *случайное блуждание с геометрически распределенной отрицательной компонентой,* $B \in \mathbf{N} \cup 0$, $k \in \overline{0, B}$, $r = B - k$ *и*

$$\chi = \inf\{n > 0 \colon \xi(n) \notin [-r, k]\}, \quad X = (\xi(\chi) - k)\mathrm{I}_{A^k} + (-\xi(\chi) - r)\mathrm{I}_{A_r} \in \mathbf{N}$$

— *соответственно момент первого выхода блуждания из интервала и величина перескока через границу в момент выхода. Тогда при* $t \in (0, 1)$:

1) *для производящих функций совместных распределений случайных величин* $\{\chi, X\}$ *для всех* $m \in \mathbf{N}$, $t \in (0, 1)$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, X = m,\, A_r\right] = \lambda^{m-1}(c(t) - \lambda)c(t)^r\left(1 - \mathrm{E}\left[t^{\tau^k} c(t)^{\xi(\tau^k)}\right]\right)K(t)^{-1},$$
$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, X = m,\, A^k\right] = \mathrm{E}\left[t^{\tau^k};\, T^k = m\right] - \mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A_r\right]\mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}};\, T^{\gamma+B} = m\right], \tag{31}$$

где

$$K(t) = 1 - \mathrm{E}t^{\tau_B}\, \mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}} c(t)^{T^{\gamma+B}}\right];$$

2) *для производящих функций случайной величины* χ *справедливы резольвентные представления* [19]

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, X = m,\, A_r\right] = \lambda^{m+B}\frac{R_k(t)}{\hat{R}_B(\lambda, t)}, \qquad \mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A_r\right] = \frac{\lambda^{B+1}}{1-\lambda}\frac{R_k(t)}{\hat{R}_B(\lambda, t)},$$
$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A^k\right] = 1 - \frac{R_k(t)}{\hat{R}_B(\lambda, t)}\left[\frac{\lambda^{B+1}}{1-\lambda} + (1-\lambda)(1-t)\hat{S}_B(\lambda, t)\right] + (1-\lambda)(1-t)S_k(t), \tag{32}$$

где

$$R_k(t) = \oint_{|\theta| = \alpha} \frac{1}{\theta^{k+1}}\frac{1}{t(1-\lambda)\mathrm{E}\theta^{\eta} + \lambda - \theta}d\theta, \quad \alpha < c(t), \quad k \in \mathbf{N} \cup 0, \tag{33}$$

— *резольвентная последовательность случайного блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой,*

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^{k} R_i(t), \qquad \hat{R}_B(\lambda, t) = \sum_{i=B+1}^{\infty} \lambda^i R_i(t), \qquad \hat{S}_B(\lambda, t) = \sum_{i=B+1}^{\infty} \lambda^i S_i(t).$$

Доказательство. Для случайного блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой равенства теоремы 2 упрощаются. Используя равенство (30) и определения (27) ядер $H_{\pm}(i, m, t)$ и их последовательных итераций (26) $H_{\pm}^{(n)}(i, m, t)$, для всех $i, m \in \mathbf{N}$ находим

$$H_{-}^{(n)}(i, m, t) = \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}} c(t)^{T^{i+B}}\right]\left(\mathrm{E}\, t^{\tau_B}\right)^n \left(\mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}} c(t)^{T^{\gamma+B}}\right]\right)^{n-1} (1-\lambda)\lambda^{m-1},$$

$$H_{+}^{(n)}(i, m, t) = c(t)^i \left(\mathrm{E}\, t^{\tau_B}\right)^n \left(\mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}} c(t)^{T^{\gamma+B}}\right]\right)^{n-1} \mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}};\, T^{\gamma+B} = m\right],$$

$$n \in \mathbf{N}.$$

Тогда

$$\mathbf{H}_{-}^{t}(i, m) = \delta_{im} + \mathrm{E}\left[t^{\tau^{i+B}} c(t)^{T^{i+B}}\right] \mathrm{E}\, t^{\tau_B} (1-\lambda)\lambda^{m-1} K(t)^{-1},$$

$$\mathbf{H}_{+}^{t}(i, m) = \delta_{im} + c(t)^i \mathrm{E}\, t^{\tau_B}\, \mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}};\, T^{\gamma+B} = m\right] K(t)^{-1},$$

$$i, m \in \mathbf{N},$$

где

$$K(t) = 1 - \mathrm{E}\, t^{\tau_B}\, \mathrm{E}\left[t^{\tau^{\gamma+B}} c(t)^{T^{\gamma+B}}\right].$$

Подставляя найденные выражения для функций $\mathbf{H}_{+}^{t}(i, m)$ в равенства (25), получаем формулы (31).

Далее, используя определение резольвентной последовательности (33) и равенство (30), находим резольвентные представления для функций $\mathrm{E}\left[t^{\tau^k} c(t)^{\xi(\tau^k)}\right]$, $\mathrm{E}\, t^{\tau^k}$:

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau^k} c(t)^{\xi(\tau^k)}\right] = 1 - c(t)^{k+1} R_k(t)\, r(c(t), t),$$

$$\mathrm{E}\, t^{\tau^k} = 1 - (1-\lambda)\frac{1-t}{1-c(t)} R_k(t) + (1-\lambda)(1-t) S_k(t),$$

где

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^{k} R_i(t), \qquad r(c(t), t) = 1 - t(1-\lambda)\mathrm{E}\left[\eta c(t)^{\eta-1}\right].$$

Подставляя найденные резольвентные представления в формулы (31), получаем резольвентные представления (32).

2.3. Выход из интервала полунепрерывного блуждания. Пусть $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — полунепрерывное снизу блуждание с производящей функцией шага блуждания

$$\mathrm{E}\theta^{\xi(1)} = \frac{1}{\theta}\mathrm{E}\theta^{\eta}, \quad n \in \mathbf{N} \cup 0, \qquad \mathrm{P}[\eta = 0]\mathrm{P}[\eta > 1] > 0.$$

В этом случае для нижних однограничных функционалов случайного блуждания выполняются равенства

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau_r};\ T_r = m\right] = c(t)^{r+1}\delta_{m1}, \qquad \mathrm{E}\theta^{\xi^-(\nu_t)} = \frac{1-c(t)}{1-c(t)/\theta}, \quad |\theta| \ge 1,$$

где $c(t) > 0$ — единственный корень внутри единичного круга $|\theta| < 1$ уравнения $\theta - t\mathrm{E}\theta^{\eta} = 0,\ t \in (0, 1)$. Из факторизационного тождества Спицера и первого из равенств (24) находим, что производящая функция совместного распределения $\{\tau^k, \xi(\tau^k)\}$ имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\,\mathrm{E}\left[t^{\tau^k}z^{\xi(\tau^k)}\right] = \frac{1}{1-\theta}\left(1 - \frac{c(t)-z\theta}{t\,\mathrm{E}(z\theta)^{\eta} - z\theta}\,\frac{t\,\mathrm{E}z^{\eta}-z}{c(t)-z}\right), \quad |\theta|,\ |z| \le 1. \qquad (34)$$

***Следствие* 4.** *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\cup 0$, — *полунепрерывное снизу случайное блуждание,* $t \in (0, 1)$. *Тогда*:

1) *для производящих функций совместных распределений случайных величин* $\{\chi, X\}$ *для всех* $m \in \mathbf{N}$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ X = m,\ A_r\right] = c(t)^{r+1}\,\frac{1-G_k^t(c(t))}{1-G_{B+1}^t(c(t))}\,\delta_{m1},$$

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ X = m,\ A^k\right] = \mathrm{E}\left[t^{\tau^k};\ T^k = m\right] - \mathrm{E}\left[t^{\chi};\ A_r\right]\mathrm{E}\left[t^{\tau^{B+1}};\ T^{B+1} = m\right], \qquad (35)$$

где функция $G_k^t(z) = \mathrm{E}\left[t^{\tau^k}z^{\xi(\tau^k)}\right]$ *определена равенством* (34);

2) *для производящих функций случайной величины* χ *справедливы резольвентные представления*

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ A_r\right] = \frac{R_k(t)}{R_{B+1}(t)},$$

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\ A^k\right] = 1 - \frac{R_k(t)}{R_{B+1}(t)} - (1-t)\frac{R_k(t)}{R_{B+1}(t)}S_{B+1}(t) + (1-t)\sum_{i=0}^{k}R_i(t), \qquad (36)$$

где

$$R_k(t) = \oint_{|\theta|=\alpha}\frac{1}{\theta^{k+1}}\,\frac{1}{t\,\mathrm{E}\theta^{\eta}-\theta}\,d\theta, \quad \alpha < c(t), \quad k \in \mathbf{N}\cup 0, \qquad (37)$$

— *резольвентная последовательность полунепрерывного случайного блуждания* [20].

Доказательство. Приведем доказательство следствия, исходя из равенств теоремы 2. Используя определение (27) ядра $H_-(i, m, t)$ и его n-й итерации (26), находим

$$H_-^{(n)}(i, m, t) = c(t)^{1-i}G_{i+B}^t(c(t))\left(G_{B+1}^t(c(t))\right)^{n-1}\delta_{m1}, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$\mathbf{H}_-^t(i, m) = \delta_{im} + c(t)^{1-i}\,\frac{G_{i+B}^t(c(t))}{1-G_{B+1}^t(c(t))}\,\delta_{m1}, \quad i, m \in \mathbf{N}.$$

Подставляя найденное выражение для функции $\mathbf{H}_-^t(i, m)$ во второе из равенств (25), получаем первое из равенств (35). Используя определение (27) ядра $H_+^{(n)}(i, m, t)$ и его n-й итерации (26), находим

$$H_+^{(n)}(i, m, t) = c(t)^{i+B+1}\left(G_{B+1}^t(c(t))\right)^{n-1}\mathrm{E}\left[t^{\tau^{B+1}};\ T^{B+1} = m\right], \quad n \in \mathbf{N},$$

$$\mathbf{H}_{+}^{t}(i,m) = \delta_{im} + c(t)^{i+B+1}\frac{1}{1-G_{B+1}^{t}(c(t))}\mathrm{E}\left[t^{\tau^{B+1}};\, T^{B+1}=m\right], \quad i,m\in\mathbf{N}.$$

Подставляя найденное выражение для функции $\mathbf{H}_{+}^{t}(i,m)$ в первое из равенств (25), получаем второе из равенств (35). Суммируя равенства (35) по всем $m\in\mathbf{N}$, находим

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A_r\right] = c(t)^{r+1}\frac{1-G_k^t(c(t))}{1-G_{B+1}^{t}(c(t))},$$
$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A^k\right] = \mathrm{E}t^{\tau^k} - \mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A_r\right]\mathrm{E}t^{\tau^{B+1}}. \tag{38}$$

Из определения резольвентной последовательности (37) и равенства (34) следуют резольвентные представления для функций $G_k^t(c(t))$, $\mathrm{E}t^{\tau^k}$:

$$G_k^t(c(t)) = 1 - c(t)^{k+1}R_k(t)r(t,c(t)), \qquad \mathrm{E}t^{\tau^k} = 1-\frac{1-t}{1-c(t)}R_k(t) + (1-t)S_k(t),$$

где $r(t,c(t)) = 1 - t\,\mathrm{E}\left[\eta c(t)^{\eta-1}\right]$. Подставляя эти выражения в равенства (38), получаем формулы (36).

2.4. Выход из интервала блуждания Бернулли. Пусть $\xi(n)\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}\cup\cup 0$, — блуждание Бернулли с производящей функцией шага блуждания $\mathrm{E}\theta^{\xi} = p\theta + q\theta^{-1}$, $p,q>0$, $p+q=1$. В этом случае $\mathrm{P}[\,T_r = T^k = 1\,] = 1$ и

$$\mathrm{E}\left[t^{\tau^k};\, T^k = m\right] = d(t)^{k+1}\delta_{m1}, \qquad \mathrm{E}\left[t^{\tau_r};\, T_r = m\right] = c(t)^{r+1}\delta_{m1},$$

где

$$c(t) = \left(1-\sqrt{1-4pqt^2}\right)(2tp)^{-1}, \qquad d(t) = \left(1-\sqrt{1-4pqt^2}\right)(2tq)^{-1}.$$

Тогда

$$\mathbf{H}_{-}^{t}(i,m) = \delta_{im} + d(t)^{i-1}\frac{(c(t)d(t))^{B+2}}{1-(c(t)d(t))^{B+2}}\delta_{m1},$$
$$\mathbf{H}_{+}^{t}(i,m) = \delta_{im} + c(t)^{i-1}\frac{(c(t)d(t))^{B+2}}{1-(c(t)d(t))^{B+2}}\delta_{m1}.$$

Подставляя эти формулы в равенства теоремы 2, находим

$$\mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A_r\right] = c(t)^{r+1}\frac{1-(c(t)d(t))^{k+1}}{1-(c(t)d(t))^{B+2}}, \qquad \mathrm{E}\left[t^{\chi};\, A^k\right] = d(t)^{k+1}\frac{1-(c(t)d(t))^{r+1}}{1-(c(t)d(t))^{B+2}}. \tag{39}$$

Полагая в этих равенствах $t=1$, получаем вероятности выхода блуждания Бернулли из интервала $[-r,k]$ через верхнюю и нижнюю границы:

$$P^{k+1} = \mathrm{P}\left[A^k\right] = \frac{1-(q/p)^{r+1}}{1-(q/p)^{B+2}}, \qquad P_{r+1} = \mathrm{P}\left[A_r\right] = \frac{1-(p/q)^{k+1}}{1-(p/q)^{B+2}}.$$

В 1657 г. Гюйгенс вычислил P^k/P_r в частном случае $k=r=12$, $p/q = 5/9$. В 1680 г. Бернулли нашел P^k/P_r в общем случае; его доказательство приводит де Муавр [21] (ссылка взята из монографии [20]). Это была первая двухграничная задача, решенная для случайных блужданий. Справедливо следующее следствие.

***Следствие* 5.** *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *симметричное блуждание Бернулли. Тогда распределения случайной величины* χ *имеют вид* $(n \in \mathbf{N} \cup 0)$

$$\mathrm{P}\left[\chi > n;\ A^k\right] = \frac{1}{B+2} \sum_{\nu=1}^{B+1} \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{B+2}\right)\right]^n \sin\left(\frac{k+1}{B+2}\nu\pi\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\nu\pi}{2(B+2)}\right),$$

$$\mathrm{P}[\chi > n;\ A_r] = \frac{1}{B+2} \sum_{\nu=1}^{B+1} \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{B+2}\right)\right]^n \sin\left(\frac{r+1}{B+2}\nu\pi\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\nu\pi}{2(B+2)}\right),$$

$$\mathrm{P}[\chi > n] =$$

$$= \frac{2}{B+2} \sum_{\nu=0}^{[B/2]} (-1)^\nu \left[\cos\left(\frac{2\nu+1}{B+2}\pi\right)\right]^n \cos\left(\frac{k-r}{2(B+2)}(2\nu+1)\pi\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\nu+1}{2(B+2)}\pi\right);$$

в частности, при $k = r = N$

$$\mathrm{P}[\chi > n] = \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} (-1)^\nu \left[\cos\left(\frac{2\nu+1}{2N+2}\pi\right)\right]^n \operatorname{ctg}\left(\frac{2\nu+1}{2N+2}\frac{\pi}{2}\right). \tag{40}$$

Доказательство. Для симметричного блуждания Бернулли $c(t) = d(t) = (1 - \sqrt{1-t^2})/t$, $|t| < 1$, и из равенства (39) следует

$$\mathrm{P}\left[\chi = n;\ A^k\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=\rho} \frac{1}{t^{n+1}} \frac{c(t)^{r+1} - c(t)^{-(r+1)}}{c(t)^{B+2} - c(t)^{-(B+2)}} dt, \quad \rho < 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Используя то обстоятельство, что подынтегральная функция

$$f(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \frac{c(t)^{r+1} - c(t)^{-(r+1)}}{c(t)^{B+2} - c(t)^{-(B+2)}}$$

при $|t| > 1$ имеет простые полюсы в точках

$$t_\nu = \left(\cos\frac{\nu\pi}{B+2}\right)^{-1}, \quad \nu \in \{1, \ldots, B+1\}, \quad \nu \neq \frac{B}{2} + 1 \quad \text{при} \quad B \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),$$

и выбирая подходящий контур интегрирования, находим

$$\mathrm{P}\left[\chi = n;\ A^k\right] = -\sum_{\nu=1}^{B+1} \operatorname{Res} f(t_\nu) =$$

$$= \frac{1}{B+2} \sum_{\nu=1}^{B+1} \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{B+2}\right)\right]^{n-1} \sin\left(\frac{k+1}{B+2}\nu\pi\right) \sin\left(\frac{\nu\pi}{B+2}\right), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Из этой формулы следует первое равенство следствия. Два других равенства являются следствием первого. Формула (40) была получена в [18] матричными методами.

2.5. Supremum, infimum и значение блуждания. Пусть $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — целочисленное случайное блуждание и

$$\xi^+(n) = \sup_{m \le n} \xi(m), \qquad \xi^-(n) = \inf_{m \le n} \xi(m), \quad m \in \mathbf{N} \cup 0.$$

В этом пункте для всех $r, k \in \mathbf{N} \cup 0$ определим функцию

$$Q_\theta^t(-r,k) = \mathrm{E}\Big[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \chi > \nu_t\Big] = \sum_{m=-r}^{k} \theta^m \mathrm{P}\Big[-r \le \xi^-(\nu_t),\ \xi(\nu_t) = m,\ \xi^+(\nu_t) \le k\Big].$$

Лемма 4. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *случайное блуждание. Тогда для производящей функции совместного распределения* $\{\xi^-(\nu_t),\ \xi(\nu_t),\ \xi^+(\nu_t)\}$ *справедливо представление*

$$Q_\theta^t(-r,k) = U^k(t,\theta) - \theta^{-r}\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\big[t^\chi;\ X = i,\ A_r\big]\theta^{-i}\,U^{i+B}(t,\theta), \quad B = r + k, \tag{41}$$

где

$$U^k(t,\theta) = \mathrm{E}\Big[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\Big] = \mathrm{E}\theta^{\xi^-(\nu_t)}\,\mathrm{E}\Big[\theta^{\xi^+(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\Big], \quad |\theta| \ge 1.$$

Доказательство. Согласно формуле полной вероятности, однородности блуждания по пространству и свойству строгой марковости случайного блуждания, имеет место уравнение

$$\mathrm{E}\Big[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\Big] = \mathrm{E}\Big[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \chi > \nu_t\Big] +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\big[t^\chi;\ X = i,\ A_r\big]\theta^{-(i+r)}\,\mathrm{E}\Big[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le i + B\Big], \quad |\theta| \ge 1. \tag{42}$$

Это уравнение отражает то обстоятельство, что приращения случайного блуждания на траекториях, которые не пересекают уровень k на интервале $[0, \nu_t]$, происходят либо на траекториях блуждания, которые не пересекают и уровень $-r$ (первое слагаемое в правой части этого равенства), либо на траекториях блуждания, которые пересекают уровень $-r$ с дальнейшими приращениями на траекториях, которые не пересекают уровень k на интервале $[0, \nu_t]$ (второе слагаемое в правой части этого равенства). Из равенства (42) следует формула (41).

2.6. Supremum, infimum и значение блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой. Пусть $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — случайное блуждание с геометрически распределенной отрицательной компонентой и производящей функцией шага блуждания

$$\mathrm{E}\theta^{\xi(1)} = \frac{1}{\theta}\frac{1-\lambda}{1-\lambda/\theta}\mathrm{E}\theta^\eta, \quad \eta \in \mathbf{N}\cup 0,$$

$$\mathrm{P}[\eta = 0]\mathrm{P}[\eta > 1] > 0, \quad \lambda \in [0,1), \quad |\theta| = 1.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\theta^{\xi^-(\nu_t)} &= \frac{1-c(t)}{1-\lambda}\,\frac{1-\lambda/\theta}{1-c(t)/\theta}, \quad |\theta| \ge 1, \\ \mathrm{E}\theta^{\xi^+(\nu_t)} &= (1-\lambda)\frac{1-t}{1-c(t)}\,\frac{c(t)-\theta}{t(1-\lambda)\mathrm{E}\theta^\eta + \lambda - \theta}, \quad |\theta| \le 1, \end{aligned} \tag{43}$$

где $c(t) \in (\lambda,\ 1)$ — единственный корень внутри единичного круга $|\theta| < 1$ уравнения $\theta - \lambda - t(1-\lambda)\mathrm{E}\theta^\eta = 0$, $t \in (0, 1)$. Обозначим

$$q_n(-r,m,k) = \mathrm{P}\Big[-r \le \xi^-(n),\ \xi(n) = m,\ \xi^+(n) \le k\Big], \quad m \in \{-r, \ldots, k\}.$$

Следствие 6. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *случайное блуждание с геометрически распределенной отрицательной компонентой. Тогда для произ-*

водящей функции совместного распределения $\{\xi^-(n),\ \xi(n),\ \xi^+(n)\}$ *выполняется равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n q_n(-r, m, k) = \lambda^{B+1} \frac{R_k(t)}{\hat{R}_B(\lambda, t)} R_{m+r}(t) + \lambda R_m(t) - R_{m-1}(t), \quad t \in (0, 1), \tag{44}$$

где $B = k + r$, $R_k(t)$, $k \in \mathbf{N} \cup 0$, — *резольвентная последовательность случайного блуждания* (33), $R_m(t) = 0$ *при* $m < 0$, *а* $\hat{R}_B(\lambda, t) = \sum_{i=B+1}^{\infty} \lambda^i R_i(t)$.

Доказательство. Из равенства

$$\mathrm{E}\left[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\right] = \mathrm{E}\theta^{\xi^-(\nu_t)}\mathrm{E}\left[\theta^{\xi^+(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\right], \quad |\theta| \ge 1,$$

и равенств (43) следует формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{E}\left[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\right] = \frac{1-t}{1-z}\,\frac{\lambda-\theta}{c(t)-\theta}\,\frac{c(t)-z\theta}{t(1-\lambda)\mathrm{E}(z\theta)^{\eta} + \lambda - z\theta},$$

$$|\theta| \ge 1, \quad |z| < 1.$$

Используя определение резольвентной последовательности (33), находим

$$\mathrm{E}\left[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k\right] =$$

$$= (1-t)(\lambda-\theta)\sum_{i=0}^{k}\theta^i R_i(t) + (1-t)\frac{1-\lambda/\theta}{1-c(t)/\theta}\theta^{k+1}R_k(t), \quad |\theta| \ge 1.$$

Подставляя выражение $\mathrm{E}[\theta^{\xi(\nu_t)};\ \xi^+(\nu_t) \le k]$ и выражение (32) для $\mathrm{E}[t^{\chi};\ X = i,\ A_r]$ в равенство (41) и проводя необходимые вычисления, для всех $r, k \in \mathbf{N} \cup 0$ находим

$$Q_\theta^t(-r, k) = (1-t)(\lambda-\theta)\sum_{i=0}^{k}\theta^i R_i(t) + (1-t)\theta^{k+1}R_k(t) +$$

$$+ (1-t)\frac{\lambda^{B+1}}{\theta^r}\,\frac{R_k(t)}{\hat{R}_B(\lambda, t)}\sum_{i=0}^{B}\theta^i R_i(t).$$

Сравнивая коэффициенты при θ^m, $m \in \{-r, \ldots, k\}$, в левой и правой частях этого равенства, получаем равенство (44).

2.7. Supremum, infimum и значение полунепрерывного блуждания. Пусть $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — полунепрерывное снизу случайное блуждание с производящей функцией шага блуждания

$$\mathrm{E}\theta^{\xi(1)} = \frac{1}{\theta}\mathrm{E}\theta^{\eta}, \quad \eta \in \mathbf{N} \cup 0, \quad \mathrm{P}[\eta = 0]\mathrm{P}[\eta > 1] > 0, \quad |\theta| \in (0, 1].$$

Следствие 7. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \cup 0$, — *полунепрерывное снизу случайное блуждание,* $r, k \in \mathbf{N} \cup 0$ *и*

$$q_n(-r, m, k) = \mathrm{P}\left[-r \le \xi^-(n), \xi(n) = m, \xi^+(n) \le k\right], \quad m \in \{-r, \ldots, k\}.$$

Тогда для производящей функции совместного распределения $\{\xi^-(n),\ \xi(n),\ \xi^+(n)\}$ *выполняется равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n q_n(-r, m, k) = \frac{R_k(t)}{R_{B+1}(t)} R_{m+r}(t) - R_{m-1}(t), \quad t \in (0,1), \quad B = k + r,$$

где $R_k(t)$, $k \in \mathbf{N} \bigcup 0$, *— резольвентная последовательность полунепрерывного случайного блуждания* (37), $R_m(t) = 0$ *при* $m < 0$.

Для доказательства следствия необходимо в равенстве (44) положить $\lambda \to \to 0$.

2.8. Supremum, infimum и значение блуждания Бернулли. Пусть $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \bigcup 0$ — симметричное блуждание Бернулли. В этом случае резольвентная последовательность блуждания имеет вид

$$R_k(t) = \oint\limits_{|\theta|=\alpha} \frac{1}{\theta^{k+1}} \frac{1}{t/2(1+\theta^2) - \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{1}{c(t)^{k+1}} - c(t)^{k+1} \right),$$

$$\alpha < c(t), \quad k \in \mathbf{N} \bigcup 0,$$

где $c(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$, $|t| \le 1$. Справедливо следующее следствие.

Следствие 8. *Пусть* $\xi(n) \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \bigcup 0$, *— симметричное блуждание Бернулли,* $k, r \in \mathbf{N} \bigcup 0$ *и*

$$q_n(-r, m, k) = \mathrm{P}\left[-r \le \xi^-(n), \xi(n) = m, \xi^+(n) \le k \right], \quad m \in \{-r, \ldots, k\}.$$

Тогда для совместного распределения $\{\xi^-(n), \xi(n), \xi^+(n)\}$ *выполняется равенство*

$$q_n(-r, m, k) = \frac{2}{B+2} \sum_{\nu=1}^{B+1} \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{B+2} \right) \right]^n \sin\left(\frac{k+1}{B+2} \nu\pi \right) \sin\left(\frac{k+1-m}{B+2} \nu\pi \right).$$

Доказательство. Из равенства следствия 7 вытекает, что для $m \in \in \{-r, \ldots, k\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n q_n(-r, m, k) \overset{\mathrm{df}}{=} f_m(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{(1/c(t))^{k+1-\frac{m+|m|}{2}} - c(t)^{k+1-\frac{m+|m|}{2}}}{(1/c(t))^{B+2} - c(t)^{B+2}} \left(\left(\frac{1}{c(t)} \right)^{r+1-\frac{m-|m|}{2}} - c(t)^{r+1-\frac{m-|m|}{2}} \right).$$

Тогда

$$q_n(-r, m, k) = \oint\limits_{|t|=\alpha} \frac{1}{t^{n+1}} f_m(t) dt, \quad \alpha < 1.$$

Используя то обстоятельство, что подынтегральная функция при $|t| > 1$ имеет простые полюсы в точках

$$t_\nu = \left(\cos \frac{\nu\pi}{B+2} \right)^{-1}, \quad \nu \in \{1, \ldots, B+1\}, \quad \nu \ne \frac{B}{2} + 1 \quad \text{при} \quad B \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),$$

и выбирая походящий контур интегрирования, для всех $m \in \{-r, \ldots, k\}$ находим

$$q_n(-r, m, k) = -\sum_{\nu=1}^{B+1} \operatorname{Res} \frac{1}{t^{n+1}} f_m(t_\nu) =$$

$$= \frac{2}{B+2} \sum_{\nu=1}^{B+1} \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{B+2} \right) \right]^n \sin\left(\frac{k+1}{B+2} \nu\pi \right) \sin\left(\frac{k+1-m}{B+2} \nu\pi \right).$$

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – 639 с.
3. *Печерский Е. А., Рогозин Б. А.* О совместных распределениях случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **14**, № 3. – С. 431 – 444.
4. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
5. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 127 с.
6. *Боровских Ю. В.* Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределения вероятности разорения // Асимптотические методы в теории вероятностей. – Киев, 1979. – С. 10 – 21.
7. *Emery D. J.* Exit problem for a spectrally positive process // Adv. Appl. Probab. – 1973. – P. 498 – 520.
8. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 104 – 119.
9. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 170 – 174.
10. *Супрун В. Н.* Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53 – 61.
11. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 240 с.
12. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* On the disribution of duration of stay in an interval of the semi-continuous process with independet increments // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2004. – **12**, № 4. – P. 365 – 388.
13. *Kadankova T. V.* On the disribution of the number of the intersections of a fixed interval by the semi-continuous process with independent increments // Theory Stochast. Processes. – 2003. – № 1-2. – P. 73 – 81.
14. *Каданкова Т. В.* Про сумісний розподіл supremum'a, infimum'a та значення напівнеперервного процесу з незалежними приростами // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2004. – Вип. 70. – С. 56 – 65.
15. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968. – 394 с.
16. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Физматгиз, 1960. – 208 с.
17. *Levy P.* Processus stochastiques et mouvement borwnien. – Paris, 1948.
18. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.
19. *Каданкова Т. В.* Двограничні задачі для випадкового блукання з геометрично розподіленими від'ємними стрибками // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2003. – Вип. 68. – С. 60 – 71.
20. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Мир, 1967. – 263 с.
21. *De Moivre A.* De mensura sortis seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus // Phil. Trans. London. – 1711. – **27**. – P. 213 – 254.

Получено 01.09.2004,
после доработки — 06.06.2005