УДК 517.9

П. О. Касьянов (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка),
В. С. Мельник (Ін-т прикл. сист. аналізу НАН України та М-ва освіти і науки України, Київ)

ПРО ВЛАСТИВОСТІ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

We present conditions under which a subdifferential map of proper convex lower semicontinuous functional in the Frechet space is a bounded upper semicontinuous map. The theorem on boundedness of subdifferential map is new also for Banach spaces. We prove the generalized Weierstrass theorem in Frechet spaces and study a variational inequality with set-valued map.

Наведено умови, за яких субдиференціал власного опуклого напівнеперервного знизу функціонала у просторі Фреше є обмеженим та напівнеперервним зверху відображенням. Теорема про обмеженість субдиференціала є новою і для банахових просторів. Доведено узагальнену теорему Вейєрштрасса у просторах Фреше та вивчено варіаційну нерівність з множиннозначним відображенням.

Останнім часом активізувалися дослідження операторних і диференціально-операторних включень, мультиваріаційних нерівностей та систем, що містять як еволюційні, так і операторні включення. Такі об'єкти в рефлексивних банахових просторах вивчалися багатьма авторами, зокрема у роботах [1 – 4]. Одним із джерел, що породжують операторні включення, є варіаційні нерівності з опуклим власним напівнеперервним знизу функціоналом φ [5]. У банахових просторах субдиференціал $\partial\varphi(\cdot)$ власного опуклого напівнеперервного знизу функціонала має ряд важливих властивостей [6 – 8], які є ключовими при дослідженні варіаційних нерівностей. Але у відділених локально опуклих просторах аналогічні властивості не досліджувались.

У даній роботі доводиться критерій обмеженості багатозначного відображення $\partial\varphi(\cdot)$, достатні умови його напівнеперервності зверху у відповідних топологіях та ряд інших властивостей у просторах Фреше.

Нехай X — простір Фреше, тобто повний локально опуклий лінійний топологічний простір, що допускає метризацію, X^* — його топологічно спряжений, $\langle \cdot , \cdot \rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — канонічна двоїстість.

Як відомо, топологія τ на X породжується зліченним набором напівнорм $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$, що розділяють точки. Сім'я напівнорм породжує метрику d, узгоджену з τ, за формулою

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\rho_i(x-y)}{1+\rho_i(x-y)}. \tag{1}$$

Зауважимо, що $d(x+h, y+h) = d(x, y)$, $d(\alpha x, \alpha y) < |\alpha| d(x, y)$ при $|\alpha| > 1$ і $d(\alpha x, \alpha y) \geq |\alpha| d(x, y)$ при $|\alpha| \leq 1$.

Розглянемо функціонал $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ при умові $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \neq \varnothing$, де $\operatorname{dom}\varphi = \{ x \in X \,|\, \varphi(x) < +\infty \}$.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *— власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал,* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$. *Тоді для будь-якого* $u \in X$ *величина*

$$D_+\varphi(x_0; u) = \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(x_0+tu) - \varphi(x_0)}{t} \tag{2}$$

є скінченною, причому:

і) *знайдеться врівноважений опуклий поглинаючий окіл нуля* Θ *такий, що для будь-якого* $u \in \Theta$

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - u) \leq D_+\varphi(x_0; u) \leq \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0); \tag{3}$$

ii) *функціонал* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \times X \ni (x; u) \mapsto D_+\varphi(x; u)$ *є напівнеперервним зверху*;

iii) *для будь-якого* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *функціонал* $D_+\varphi(x; \cdot): X \mapsto \mathbb{R}$ *є додатно однорідним і напівадитивним*;

iv) *для будь-яких* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *і* $u_0 \in X$ *знайдеться окіл* $O(u_0)$ *такий, що* $\left| D_+\varphi(x_0; u) - D_+\varphi(x_0; u_0) \right| \leq c_1 d(u, u_0) \quad \forall u \in O(u_0)$.

Доведення. Мають місце наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Функціонал* φ *є локально обмеженим зверху на* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, *тобто для будь-якого* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *знайдуться додатні константи* r *і* c *такі, що* $\varphi(x) \leq c \quad \forall x \in B_r(x_0)$, *де* $B_r(x_0) = \{ x \in X \,|\, d(x, x_0) < r \}$.

Доведення. Для довільного $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ знайдеться $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $B_{2\varepsilon_1}(x_0) \subset \operatorname{dom}\varphi$, а отже, $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \subset B_{2\varepsilon_1}(x_0) \subset \operatorname{dom}\varphi$. Оскільки функціонал φ є напівнеперервним знизу, то при кожному $n = 1, 2, \ldots$ множина $A_n = \{ x \in \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \,|\, \varphi(x) \leq n \}$ є замкненою в X, причому $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \subset \operatorname{dom}\varphi$. Зауважимо, що $\left(\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}, d\right)$ — повний метричний простір, тому за теоремою Бера існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$ в $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}$. Доведемо, що $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$ в X. Із того, що $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$ в $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}$, випливає, що існують $x_1 \in \operatorname{int} A_{n_0}$ і $\varepsilon_2 > 0$ такі, що $A_{n_0} \supset \{ x \in \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \,|\, d(x, x_1) < \varepsilon_2 \} = \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) \neq \varnothing$. При цьому можливі два випадки:

1) $B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) \neq \varnothing$;

2) $B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) = \varnothing, \quad \partial\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) \neq \varnothing$.

У першому випадку $B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1)$ є відкритою множиною в топології τ, тому існують $x_2 \in X$ та $\varepsilon_3 > 0$ такі, що $B_{\varepsilon_3}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) \subset A_{n_0}$, тобто для будь-якого $x \in B_{\varepsilon_3}(x_2)$ маємо $\varphi(x) \leq n_0$, отже, $x_2 \in \operatorname{int} A_{n_0}$ в X.

Тепер розглянемо другий випадок. Для довільного $x \in \partial\overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)} \cap B_{\varepsilon_2}(x_1)$ існує $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B_{\varepsilon_1}(x_0)$ така, що $x_n \to x$ при $n \to +\infty$, а оскільки $x \in B_{\varepsilon_2}(x_1)$, то знайдеться N таке, що для будь-якого $n \geq N \quad x_n \in B_{\varepsilon_2}(x_1)$, тобто $x_n \in B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1) \neq \varnothing$, і ми переходимо до попереднього випадку. Таким чином, $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$ в X.

Доведемо тепер локальну обмеженість зверху φ в деякому околі точки x_0. Нехай $y = x_2 + \dfrac{x_0 - x_2}{1 - \lambda}$, де $\lambda = \dfrac{\varepsilon_1 / d(x_2, x_0)}{1 + \varepsilon_1 / d(x_2, x_0)}$, тому $y = x_0 + \dfrac{\varepsilon_1}{d(x_2, x_0)}(x_0 - x_2)$, $d(y, x_0) = d\left(\dfrac{\varepsilon_1}{d(x_0, x_2)}(x_0 - x_2), 0\right) < \dfrac{\varepsilon_1}{d(x_0, x_2)} d(x_0, x_2) = \varepsilon_1$, тобто $y \in B_{\varepsilon_1}(x_0) \subset \operatorname{dom}\varphi$. Для кожного $x \in B_{\lambda\varepsilon_3}(x_0)$ розглянемо $z = (x + \lambda x_2 - x_0)/\lambda = (x - (1 - \lambda)y)/\lambda$. Оскільки $0 < \lambda < 1$, то $d(z, x_2) = d\left(x_2 + \dfrac{x - x_0}{\lambda}, x_2\right) = d\left(\dfrac{x - x_0}{\lambda}, 0\right) < \dfrac{1}{\lambda} d(x, x_0) < \dfrac{\lambda\varepsilon_3}{\lambda} = \varepsilon_3$, тобто $z \in B_{\varepsilon_3}(x_2)$, а отже, $\varphi(z) \leq n_0$. Далі, функціонал φ — опуклий, тому $\varphi(x) = \varphi(\lambda z + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(z) + (1 - \lambda)\varphi(y) \leq n_0 + (1 - \lambda)\varphi(y)$.

Таким чином, φ є обмеженим зверху в околі $B_{\lambda\varepsilon_3}(x_0)$, тобто $r = \lambda\varepsilon_3$, $c = n_0 + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Лему доведено.

Лема 2. *Функціонал* φ *є локально ліпшицевим на* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, *тобто для будь-якого* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *існують* $r_1 > 0$ *та* $c_1 > 0$ *такі, що* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le c_1 d(x, y)$ $\forall x, y \in B_{r_1}(x_0)$.

Доведення. З леми 1 випливає локальна обмеженість зверху φ на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, тому для будь-якого $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ існують $r > 0$ і $c > 0$ такі, що $\varphi(x) \le c$ $\forall x \in B_r(x_0)$.

Для довільного $x \in B_r(x_0)$ $(x \ne x_0)$ і $t = \dfrac{d(x,x_0)}{r + d(x,x_0)}$ покладемо $y = \dfrac{x_0 + (t-1)x}{t} = x_0 + \dfrac{1-t}{t}(x_0 - x)$, де $t \in (0,1)$. Тоді $d(y, x_0) = d\left(\dfrac{1-t}{t}(x_0 - x), 0\right) = d\left(\dfrac{r}{d(x,x_0)}(x_0 - x), 0\right) < \dfrac{r}{d(x,x_0)} d(x,x_0) = r$, тобто $\varphi(y) \le c$. Завдяки опуклості φ маємо $\varphi(x_0) = \varphi(ty + (1-t)x) \le t\varphi(y) + (1-t)\varphi(x) \le tc + (1-t)\varphi(x)$, або $(1-t)\varphi(x_0) \le t(c - \varphi(x_0)) + (1-t)\varphi(x)$. Звідси

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) \le \frac{t}{1-t}(c - \varphi(x_0)) = \frac{(c - \varphi(x_0))}{r} d(x, x_0). \tag{4}$$

Тепер нехай $z = \dfrac{x - (1-\tau)x_0}{\tau} = x_0 + \dfrac{x - x_0}{\tau}$, де $\tau = \dfrac{d(x,x_0)}{r} \in (0,1)$, тоді $d(z, x_0) = d\left(\dfrac{x - x_0}{\tau}, 0\right) < \dfrac{1}{\tau} d(x, x_0) = r$, тобто $\varphi(z) \le c$, причому завдяки опуклості φ $\varphi(x) = \varphi(\tau z + (1-\tau)x_0) \le \tau\varphi(z) + (1-\tau)\varphi(x_0) \le \tau c + (1-\tau)\varphi(x_0)$ або

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \le \tau(c - \varphi(x_0)) = \frac{c - \varphi(x_0)}{r} d(x, x_0). \tag{5}$$

Із оцінок (4), (5) знаходимо

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le \frac{c - \varphi(x_0)}{r} d(x, x_0). \tag{6}$$

Доведемо ліпшицевість φ на $B_{\varepsilon_1}(x_0)$ при $\varepsilon_1 = r/3$. Згідно з (6) для будь-яких $x_1, x_2 \in B_{3\varepsilon_1}(x_0)$ $\varphi(x_1) \le c$, $\varphi(x_2) \le c$. Якщо $x_1 \in B_{\varepsilon_1}(x_0)$, то $B_{2\varepsilon_1}(x_1) \subset B_r(x_0)$, тобто $x_1 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, а тому завдяки (6)

$$\forall x \in B_{2\varepsilon_1}(x_1) : |\varphi(x) - \varphi(x_1)| \le \frac{c - \varphi(x_1)}{2\varepsilon_1} d(x, x_1). \tag{7}$$

Зокрема, нерівність (7) справджується при $x = x_2$ — довільному елементу з $B_{\varepsilon_1}(x_0)$. Далі знову завдяки (6) $c - \varphi(x_1) \le (c - \varphi(x_0)) + |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \le (c - \varphi(x_0)) + \dfrac{c - \varphi(x_0)}{r} d(x_1, x_0) < 2(c - \varphi(x_0))$. Звідси і з оцінки (7) остаточно знаходимо $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le \dfrac{c - \varphi(x_0)}{\varepsilon_1} d(x_2, x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}(x_0)$, тобто $c_1 = \dfrac{c - \varphi(x_0)}{\varepsilon_1}$, $r_1 = \varepsilon_1$.

Лему доведено.

Продовжимо доведення теореми. Нехай $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ і $B_r(x_0) = x_0 + B_r(0)$. Тоді за лемами 1, 2 функціонал φ є обмеженим зверху і задовольняє умову

Ліпшиця на $B_r(x_0)$. Зауважимо, що множина $B_r(0)$ (на відміну від банахових просторів) не є, взагалі кажучи, абсолютно опуклою, але знайдеться опукла поглинаюча врівноважена множина Θ із бази топології τ така, що $\Theta \subset \subset B_r(x_0)$. Тоді

$$\varphi(x) \le c \quad \forall x \in x_0 + \Theta, \quad \left|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right| \le c_1 d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in x_0 + \Theta. \tag{8}$$

Для кожного $u \in X$ існує $t = t(u) > 0$ таке, що $t^{-1} u \in \Theta$, а отже, для будь-якого $h \in (0, t^{-1})$ $hu \in \Theta$, тому що $t\Theta \subset \Theta / h$. Далі, для довільних $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $0 < h_1 \le h_2 < t^{-1}$, завдяки опуклості φ маємо

$$\varphi(x_0 + h_1 u) - \varphi(x_0) = \varphi\left(x_0\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) + (x_0 + h_2 u)\frac{h_1}{h_2}\right) - \varphi(x_0) \le$$

$$\le \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right)\varphi(x_0) + \frac{h_1}{h_2}\varphi(x_0 + h_2 u) - \varphi(x_0) = \frac{h_1}{h_2}(\varphi(x_0 + h_2 u) - \varphi(x_0)).$$

Таким чином, функція $h \mapsto \dfrac{\varphi(x_0 + hu) - \varphi(x_0)}{h}$ монотонно спадає при $h \to 0+$.

Для кожного $u \in \Theta$ величина $D_+\varphi(x_0; u)$ є скінченною. Справді, $\alpha u \in \Theta$ $\forall \alpha : |\alpha| \le 1$, тому $D_+\varphi(x_0; u) = \inf\limits_{h>0} \dfrac{\varphi(x_0 + hu) - \varphi(x_0)}{h} \le \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0) < < +\infty$, оскільки $x_0 + u \in B_r(x_0) \subset \operatorname{dom}\varphi$. З іншого боку, для будь-якого $h \in (0, 1)$ $x_0 = \dfrac{1}{1+h}(x_0 + hu) + \dfrac{h}{1+h}(x_0 - u)$, причому $-u \in \Theta$ і, крім того, для будь-якого $h \in (0, 1)$ $-\infty < \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - u) \le \dfrac{\varphi(x_0 + hu) - \varphi(x_0)}{h}$. Таким чином, для будь-якого $u \in \Theta$ $-\infty < \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - u) \le D_+\varphi(x_0; u) \le \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0) < +\infty$, тобто $D_+\varphi(x_0; u) \in \mathbb{R}$ і виконується нерівність (3).

Із співвідношення (2) безпосередньо випливає

$$D_+\varphi(x_0; \alpha u) = \alpha D_+\varphi(x_0; u) \qquad \forall \alpha > 0 \quad \forall u \in X, \tag{9}$$

а оскільки множина Θ є поглинаючою, то для будь-якого $u \in X$ існує $\alpha > 0$ таке, що $\alpha u \in \Theta$. Тоді із (9) отримуємо $D_+\varphi(x_0; u) \in \mathbb{R}$ $\forall x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ $\forall u \in X$.

Розглянемо при $h > 0$ функцію

$$\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \times X \ni (x; u) \mapsto F_h(x; u) = \frac{\varphi(x + hu) - \varphi(x)}{h}. \tag{10}$$

Лема 3. *Для кожної пари* $(x_0; u_0) \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \times X$ *знайдеться* $l \le 1$ *таке, що для будь-якого* $h \in (0, l)$ *функція* $F_h(\cdot\,;\cdot)$ *є неперервною в точці* $(x_0; u_0)$.

Доведення. Нехай $u_0 \in X$ — довільний елемент, $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, тоді існує $t_0 > 0$ таке, що $u_0 \in t_0\Theta$ (множину Θ визначено вище). Далі, для $h \in (0, l)$, де $l = \min\left(\dfrac{1}{2t_0}, 1\right)$, розглянемо функцію $F_h(x; u)$ в околі точки $(x_0; u_0)$. При цьому

$$\left|F_h(x; u) - F_h(x_0; u_0)\right| =$$

$$= \frac{1}{h}\Big|\left[\varphi(x_0 + hu_0 + (x - x_0) + h(u - u_0)) - \varphi(x_0 + hu_0)\right] + \left[\varphi(x_0) - \varphi(x)\right]\Big|, \tag{11}$$

і якщо $x \in x_0 + \frac{1}{4}\Theta$, $u \in u_0 + \frac{1}{4}\Theta$, то маємо

$$x_0 + hu_0 \in x_0 + \frac{1}{2}\Theta, \qquad h(u-u_0) \in x_0 + \frac{1}{4}\Theta,$$

$$(x-x_0) + h(u-u_0) \in x_0 + \frac{1}{2}\Theta, \qquad x_0 + hu_0 + (x-x_0) + h(u-u_0) \in x_0 + \Theta.$$

Отже, завдяки (8) із співвідношення (11) знаходимо $\left| F_h(x;u) - F_h(x_0;u_0) \right| \le$ $\le \frac{2c_1}{h} d(x - x_0, h(u_0 - u)) \to 0$ при $x \to x_0$, $u \to u_0$.

Лему доведено.

З леми 3 випливає напівнеперервність зверху $D_+\varphi(x_0;u) = \inf\limits_{h>0} F_h(x;u) =$ $= \inf\limits_{h\in(0,l)} F_h(x;u)$ як поточкова нижня границя неперервних функцій. Додатна однорідність $D_+\varphi(x_0;\cdot)$ є очевидною. Доведемо напівадитивність. Справді, для будь-яких $v_1, v_2 \in X$ маємо

$$D_+\varphi(x_0; v_1 + v_2) =$$

$$= \inf_{t>0} \frac{\varphi(x_0 + t(v_1+v_2)) - \varphi(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\varphi\left(\frac{x_0+tv_1}{2} + \frac{x_0+tv_2}{2}\right) - 2\varphi(x_0)}{t} \le$$

$$\le \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_0+tv_1) - \varphi(x_0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_0+tv_2) - \varphi(x_0)}{t} = D_+\varphi(x_0;v_1) + D_+\varphi(x_0;v_2).$$

Щоб завершити доведення даної теореми, слід показати, що відображення $D_+\varphi(x_0;\cdot)$ задовольняє iv). Із напівадитивності даного відображення випливає

$$\left| D_+\varphi(x_0;u) - D_+\varphi(x_0;u_0) \right| \le$$

$$\le \max\{D_+\varphi(x_0;u-u_0), D_+\varphi(x_0;u_0-u)\} \le c_1 d(u,u_0) \qquad \forall u \in u_0 + \frac{1}{4}\Theta.$$

Теорему доведено.

Означення 1. *Множина $B \subset X^*$ називається обмеженою в $\sigma(X^*;X)$-топології (скорочено $*$-обмеженою), якщо $\sup\limits_{y\in B} |\langle y, x\rangle_X| < +\infty$ $\forall x \in X$. Очевидно, кожна обмежена в X^* множина є $*$-обмеженою.*

Означення 2. *Множиннозначне відображення $A: X \rightrightarrows X^*$ називається*:

а) *$*$-обмеженим, якщо для довільної обмеженої в X множини B образ $A(B)$ є $*$-обмеженим в X^*;*

б) *$*$-напівнеперервним зверху, якщо для довільної відкритої в $\sigma(X^*;X)$-топології множини B множина $A_M^{-1} = \{x \in X \mid A(x) \subset B\}$ є відкритою в X;*

в) *хемінеперервним зверху, якщо функція $X \ni x \mapsto [A(x), y]_+ = \sup\limits_{d\in A(x)} \langle d, y\rangle_X$ є напівнеперервною зверху для будь-якого $y \in X$.*

Зауважимо, що із б) випливає в).

Означення 3. *Множина $\partial\varphi(x_0) = \{p \in X^* \mid \varphi(x) - \varphi(x_0) \ge \langle p, x - x_0\rangle_X \ \forall x \in X\}$ називається субдиференціалом функціонала $\varphi: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ у точці x_0.*

Теорема 2. *Нехай $\varphi: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу* *функціонал. Тоді для будь-якого* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ ($\partial\varphi(x_0)$ — *непорожня опукла компактна в* $\sigma(X^*; X)$*-топології множина*) *відображення* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x \mapsto$ $\mapsto \partial\varphi(x) \subset X^*$ *є* $*$*-напівнеперервним зверху та*

$$[\partial\varphi(x_0), u]_+ = D_+\varphi(x_0; u) \qquad \forall u \in X. \tag{12}$$

Доведення. Зауважимо, що функція φ задовольняє умови теореми 1.

Лема 4. *Для кожного* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *має місце*

$$\partial\varphi(x_0) = \{p \in X^* \,|\, \langle p, u\rangle_X \le D_+\varphi(x_0; u) \ \forall u \in X\}.$$

Доведення. Нехай $p \in \partial\varphi(x_0)$. Тоді $\forall u \in X: \langle p, u\rangle_X \le \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0)$. Звідси для будь-якого $h > 0$ $\langle p, u\rangle_X \le \dfrac{\varphi(x_0 + hu) - \varphi(x_0)}{h}$, звідки за теоремою 1 $\langle p, u\rangle_X \le \inf\limits_{h>0} \dfrac{\varphi(x_0 + hu) - \varphi(x_0)}{h} = D_+\varphi(x_0; u)$ $\forall u \in X$. З іншого боку, нехай для будь-якого $u \in X$ $\langle p, u\rangle_X \le D_+\varphi(x_0; u)$. З теореми 1 випливає, що для будь-якого $u \in X$ $\langle p, u\rangle_X \le D_+\varphi(x_0; u) \le \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0)$. Отже, $p \in \partial\varphi(x_0)$.

Лему доведено.

Безпосередньо з леми 4 випливає, що $[\partial\varphi(x_0), u]_+ \le D_+\varphi(x_0; u)$, тобто завдяки лемі 4 $\{p \in X^* \,|\, \langle p, u\rangle_X \le [\partial\varphi(x_0), u]_+ \ \forall u \in X\} \subset \{p \in X^* \,|\, \langle p, u\rangle_X \le$ $\le D_+\varphi(x_0; u) \ \forall u \in X\} = \partial\varphi(x_0)$. З іншого боку, кожний елемент $p \in \partial\varphi(x_0)$ задовольняє умову $\langle p, u\rangle_X \le [\partial\varphi(x_0), u]_+ \ \forall u \in X$, що доводить зворотне включення і тим самим рівність (12).

Далі, із (12) та теореми 1 випливає, що $\partial\varphi$ є хемінеперервним зверху відображенням на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$. Крім того, $\partial\varphi(x_0)$ — опукла обмежена множина, замкнена в $\sigma(X^*; X)$-топології. Опуклість і замкненість є очевидними, а обмеженість випливає з оцінки $[\partial\varphi(x_0), u]_+ = D_+\varphi(x_0; u) \le c_1 d(u, 0)$ $\forall u \in X$. Отже, завдяки теоремі Банаха – Алаоглу [9] $\partial\varphi(x_0)$ — компактна множина в $\sigma(X^*; X)$-топології. За цих умов із хемінеперервності зверху відображення $\partial\varphi$ та теореми Кастеня [6] випливає $*$-напівнеперервність зверху $\partial\varphi$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай* $\varphi^*: X^* \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — *спряжений функціонал до* φ. *Тоді* $\partial\varphi^*: X^* \rightrightarrows X$ *є замкненим відображенням в* $X^* \times \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *щодо* $\sigma(X^*; X)$*-топології на* X^*.

Доведення. Як випливає з доведення теореми 2, відображення $\partial\varphi$ є хемінеперервним зверху на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ і завдяки пропозиції 3.5 [8] має замкнений графік в $X^* \times \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ в $\sigma(X^*; X)$-топології на X^*. Тоді твердження наслідку випливає із співвідношення $\xi \in \partial\varphi^*(x) \Leftrightarrow x \in \partial\varphi^*(\xi)$.

Наслідок доведено.

Означення 4. *Функціонал* $\varphi: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *називається напівобмеженим зверху на* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, *якщо для довільної обмеженої в* X *множини* $B \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ *образ* $\varphi(B)$ *є обмеженим зверху в* $\mathbb{R}$.

Наступна теорема є новою і у випадку, коли X — банахів простір.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi: X \mapsto \mathbb{R}$ — *опуклий напівнеперервний знизу функціонал. Тоді наступні твердження є еквівалентними*:

а) φ — *напівобмежений зверху функціонал на* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;

б) *множиннозначне відображення* $\partial\varphi$ *є* $*$*-обмеженим на* X.

Доведення. Мають місце наступні твердження.

Лема 5. *Для довільної обмеженої множини* B *в* X *та* $*$*-обмеженої множини* C *в* X^* *величина* $\sup_{x\in B}\sup_{p\in C}|\langle p, x\rangle_X|$ *є скінченною.*

Доведення. Нехай $\rho(x) = \sup_{p\in C}|\langle p, x\rangle_X|$. Із $*$-обмеженості множини C випливає, що даний функціонал визначений на всьому X. Зауважимо, що $\rho(-x) = \rho(x)$ $\forall x\in X$. Крім того, ρ є опуклим, додатно однорідним і напівнеперервним знизу як супремум опуклих додатно однорідних неперервних функціоналів. Звідси за лемою 2 ρ є неперервним на X. Отже, ρ — неперервна напівнорма на X. За теоремою V.23 [10] із обмеженості B в X випливає $\sup_{x\in B}\sup_{p\in C}|\langle p, x\rangle_X| = \sup_{x\in B}\rho(x) < +\infty$.

Лему доведено.

Означення 5. *Нехай* X *— відділений локально опуклий топологічний простір. Функціонал* $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *називається коерцитивним, якщо для довільної неперервної напівнорми* ρ *такої, що* $\rho(x)\to+\infty$, *виконується* $\varphi(x)\to+\infty$.

Лема 6. *Нехай* $B\subset X$ *— непорожня опукла замкнена множина і або* B *— обмежена, або функціонал* φ *є коерцитивним на* B. *Тоді* $\inf_{x\in B}\varphi(x) > -\infty$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Для довільного цілого n розглянемо множину $A_n = \{x\in B \,|\, \varphi(x)\le n\} \ne \varnothing$. Із опуклості та напівнеперервності знизу функціонала φ, опуклості та замкненості множини B випливає опуклість та замкненість, а отже, і слабка замкненість множини A_n. Обмеженість A_n випливає з обмеженості B або з коерцитивності φ. Справді, якщо множина A_n не є обмеженою, то знайдуться неперервна напівнорма ρ і послідовність $\{x_n\}_{n\ge1}\subset B$ такі, що $\rho(x_n)\to+\infty$. При цьому $\varphi(x_n)\to+\infty$, що суперечить конструкції A_n. Звідси, враховуючи, що для будь-якого $n\in\mathbb{Z}$ $\varnothing \ne A_n\subset A_{n+1}$, маємо центровану систему $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ компактних множин у слабкій топології простору X. Отже, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n\ne\varnothing$. Це означає, що існує $x\in B$ таке, що для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ $\varphi(x)\le -n$, тобто $\varphi(x) = -\infty$. Маємо суперечність з тим, що $\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$.

Лему доведено.

Продовжимо доведення теореми. Нехай B — обмежена в X множина $(B\subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi)$. Спочатку припустимо, що множиннозначне відображення $\partial\varphi$ є $*$-обмеженим. Тоді за означенням субдиференціала $\forall x\in B$ $\forall p_x\in\partial\varphi(x)$: $\varphi(x_0)-\varphi(x)\ge\langle p_x, x_0-x\rangle_X$. Звідси $\forall x\in B$ $\forall p_x\in\partial\varphi(x)$: $\varphi(x)\le\varphi(x_0) + \langle p_x, x-x_0\rangle_X \le |\varphi(x_0)| + \sup_{p\in\partial\varphi(B)}|\langle p, x-x_0\rangle_X| \le |\varphi(x_0)| + \sup_{x\in x_0+B}\ \sup_{p\in\partial\varphi(B)}|\langle p, x\rangle_X|$. Залишилось показати, що $\sup_{x\in x_0+B}\ \sup_{p\in\partial\varphi(B)}|\langle p, x\rangle_X| < +\infty$. Останнє випливає з леми 5 та того факту, що $x_0 + B$ — обмежена в X множина.

З іншого боку, нехай функціонал φ є напівобмеженим зверху. Тоді за теоремою 2 $\forall u\in X$: $\sup_{p\in\partial\varphi(B)}\langle p, u\rangle_X = \sup_{x\in B}\ \sup_{p\in\partial\varphi(x)}\langle p, u\rangle_X = \sup_{x\in B}[\partial\varphi(x), u]_+ = \sup_{x\in B}D_+\varphi(x;u)$. Далі, за теоремою 1 $\sup_{x\in B}D_+\varphi(x;u)\le\sup_{x\in B}(\varphi(x+u)-\varphi(x))\le \sup_{x\in B+u}\varphi(x)-$

$-\inf\limits_{x\in B}\varphi(x) \le \sup\limits_{x\in\overline{\mathrm{co}}\,B+u}\varphi(x) - \inf\limits_{x\in\overline{\mathrm{co}}\,B}\varphi(x) =: I$. Оскільки $\overline{\mathrm{co}}B$, $\overline{\mathrm{co}}B+u$ є обмеженими в X множинами, то звідси на підставі леми 6 та означення напівобмеженого зверху функціонала маємо, що величина I є скінченною, а отже, для будь-якого $u\in X$ $\sup\limits_{p\in\partial\varphi(B)}\langle p, u\rangle_X < +\infty$. Звідси випливає, що множина $\partial\varphi(B)$ є $*$-обмеженою.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Далі для довільного множиннозначного відображення $A : Y\subset X \rightrightarrows X^*$ через $\mathrm{co}A$ та $\overline{\mathrm{co}}A$ будемо позначати множиннозначні відображення, які задаються таким чином: $\mathrm{co}A(y) := \mathrm{co}(A(y))$, $\overline{\mathrm{co}}A(y) := \overline{\mathrm{co}}(A(y))$ $\forall y\in Y$.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\varphi_1, \varphi_2 : X\mapsto\mathbb{R}$ *— напівнеперервні знизу опуклі функціонали, напівобмежені зверху на* X, $S = \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\varphi_1\bigcap\,\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\varphi_2 \ne \varnothing$. *Тоді* $\partial\varphi_1+\partial\varphi_2 : S\subset X\rightrightarrows X^*$ *є* $*$*-обмеженим* $*$*-напівнеперервним зверху відображенням з компактними в* $\sigma(X^*; X)$*-топології значеннями.*

Доведення. Відображення $G = \partial\varphi_1+\partial\varphi_2$ є хемінеперервним зверху як верхня сума таких відображень, до того ж $\partial\varphi_i = \overline{\mathrm{co}}\,\partial\varphi_i$, $i=\overline{1,2}$. Доведемо, що $\overline{\mathrm{co}}\,G = G$. Очевидно, $\overline{\mathrm{co}}\,G = G$, отже, $\overline{\mathrm{co}}\,G \supset \partial\varphi_1+\partial\varphi_2 = G$, тому доведемо обернене вкладення. Нехай $u\in\overline{\mathrm{co}}\,G(y)$, тоді знайдеться направленість $u_\alpha\in G(y)$ така, що $u_\alpha\to u$ в X^*, причому $u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha$, де $u'_\alpha\in\partial\varphi_1(y)$, $u''_\alpha\in\partial\varphi_2(y)$. А оскільки $\partial\varphi_1(y)$, $\partial\varphi_2(y)$ — компактні множини в $\sigma(X^*; X)$-топології, то звідси випливає, що $u = u'+u''$, $u'\in\partial\varphi_1(y)$, $u''\in\partial\varphi_2(y)$, тобто $\overline{\mathrm{co}}\,G(y)\subset G(y)$, що і доводить $\overline{\mathrm{co}}\,G(y) = G(y)$.

Таким чином, ми попадаємо в умови теореми Кастеня, із якої випливає $*$-напівнеперервність зверху відображення $\partial\varphi_1+\partial\varphi_2$. $*$-Обмеженість відображення $\partial\varphi_1+\partial\varphi_2$ випливає з аналогічної властивості для $\partial\varphi_1$ і $\partial\varphi_2$.

Для довільної обмеженої в X множини $B\subset S$ образи $\partial\varphi_1(B)$ і $\partial\varphi_2(B)$ є $*$-обмеженими в X^*. Тоді

$$\sup_{g\in\partial\varphi_1(B)+\partial\varphi_2(B)}|\langle g, x\rangle_X| = \sup_{g_1\in\partial\varphi_1(B)}\ \sup_{g_2\in\partial\varphi_2(B)}|\langle g_1+g_2, x\rangle_X| \le$$
$$\le \sup_{g_1\in\partial\varphi_1(B)}|\langle g_1, x\rangle_X| + \sup_{g_2\in\partial\varphi_2(B)}|\langle g_2, x\rangle_X| < +\infty \qquad \forall x\in X,$$

тобто $\partial\varphi_1+\partial\varphi_2$ — $*$-обмежена множина в X^*.

Наслідок доведено.

Нехай функціонал φ має вигляд

$$\varphi(y) = \varphi_1(y)+\varphi_2(y)-\langle f, y\rangle_X, \tag{13}$$

де $f\in X^*$, $\varphi_1 : X\mapsto\overline{\mathbb{R}}$ задовольняє умови теореми 1, функціонал $\varphi_2 : X\mapsto\overline{\mathbb{R}}$ є опуклим та $\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\varphi_1\subset\mathrm{dom}\,\varphi_2$.

Теорема 4. *Нехай виконуються перераховані умови. Тоді наступні властивості є еквівалентними:*

1) $x_0\in\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\varphi_1$, $\varphi(x_0) = \inf\limits_{x\in X}\varphi(x)$;

2) *для* $x_0\in\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\varphi_1$

$$[\partial\varphi_1(x_0), x-x_0]_+ + \varphi_2(x)-\varphi_2(x_0) \ge \langle f, x-x_0\rangle_X \qquad \forall x\in X. \tag{14}$$

Доведення. Розглянемо імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай точка $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi_1$ задовольняє властивість 1. Тоді для будь-яких $x \in X$ і $t \in [0, 1]$ маємо

$$\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_0) - \langle f, x_0\rangle_X \le$$

$$\le \varphi_1(x_0 + t(x - x_0)) + \varphi_2(x_0 + t(x - x_0)) - \langle f, x_0 + t(x - x_0)\rangle_X \le$$

$$\le \varphi_1(x_0 + t(x - x_0)) + t\varphi_2(x) + (1 - t)\varphi_2(x_0) - t\langle f, x - x_0\rangle_X .$$

Звідси $\dfrac{\varphi_1(x_0 + t(x - x_0)) - \varphi_1(x_0)}{t} + \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0) \ge \langle f, x - x_0\rangle_X$ або після граничного переходу при $t \to +0$ $D_+\varphi_1(x_0; x - x_0) + \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0) \ge \langle f, x - x_0\rangle_X$. Тоді завдяки співвідношенню (12) приходимо до нерівності (14).

Тепер, навпаки, нехай виконується нерівність (14). Використовуючи оцінку (3), маємо

$$\forall x \in X:\ \varphi_1(x) - \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0) \ge$$

$$\ge [\partial\varphi_1(x_0), x - x_0]_+ + \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0) \ge \langle f, x - x_0\rangle_X ,$$

тобто $\varphi(x) \ge \varphi(x_0)$, що еквівалентно властивості 1.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Нерівність (14) називається варіаційною нерівністю з множиннозначними відображеннями. В банахових просторах такі об'єкти досить активно вивчаються.

Теорема 5. *Нехай простір* X — *рефлексивний,* $\varphi_1 \colon X \to \mathbb{R}$, *а функціонал* φ *має вигляд* (13), *причому* φ *є коерцитивним. Тоді варіаційна нерівність* (14) *має хоча б один розв'язок* $x_0 \in X$.

Доведення. Має місце наступне твердження, яке є узагальненням теорем Вейєрштрасса на простори Фреше.

Лема 7. *Нехай* X — *рефлексивний простір Фреше,* $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ — *власний слабко напівнеперервний знизу функціонал,* $B \subset X$ — *замкнена опукла множина і, крім того, виконується одна із двох умов*:

а) *множина* B *є обмеженою в* X;

б) *функціонал* φ — *коерцитивний.*

Тоді функціонал φ *є обмеженим знизу на* B *і досягає своєї точної нижньої границі* d, *причому множина* $K = \{x \in X \mid \varphi(x) = d\}$ — *слабко компактна в* X.

Доведення. За лемою 6 функціонал φ є обмеженим знизу, тому знайдеться направленість $\{x_\alpha\}_\alpha \subset B$ така, що $\lim\limits_\alpha \varphi(x_\alpha) = d = \inf\limits_{x \in B} \varphi(x) < +\infty$.

Множина $\{x_\alpha\}_\alpha$ є обмеженою в X або завдяки обмеженості B, або завдяки коерцитивності φ. Отже, згідно з теоремою Банаха – Алаоглу знайдеться піднаправленість (яку будемо позначати також $\{x_\alpha\}_\alpha$) така, що $x_\alpha \to x_0$ в $\sigma(X; X^*)$-топології простору X, причому $x_0 \in B$, оскільки множина B є замкненою в $\sigma(X; X^*)$-топології. Звідси внаслідок напівнеперервності знизу функціонала φ в $\sigma(X; X^*)$-топології простору X маємо $\varphi(x_0) \le \liminf\limits_\alpha \varphi(x_\alpha) = \lim\limits_\alpha \varphi(x_\alpha) = d$, тобто $x_0 \in K$.

Нарешті, нехай $\{x_\alpha\}_\alpha \subset K$ — довільна направленість. За конструкцією множина K є обмеженою, а тому можемо вважати, що $x_\alpha \to x_0$ в $\sigma(X; X^*)$-

топології простору X. Отже, $\varphi(x_0) \leq \liminf_{\alpha} \varphi(x_\alpha) = d$, звідки $x_0 \in K$.

Лему доведено.

У даному випадку $\operatorname{dom} \varphi_1 = X$, і ми попадаємо в умови леми 7, з якої випливає, що задача $\varphi(x) \to \inf$, $x \in X$, має розв'язок $x_0 \in X$. Для завершення доведення залишилось застосувати теорему 4.

Теорему доведено.

1. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
2. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 2.– С. 70 – 85.
3. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mapping of monotone type in Banach spases // J. Func. Anal. – 1972. – **11**, № 2. – P. 251–294.
4. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для одного класу диференціально-операторних включень // Допов. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 20 – 24.
5. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными операторами // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69; № 5. – С. 41–67; 2001. – № 2. – С. 70–83.
6. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 512 с.
7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 317 с.
8. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 381 с.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. – Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 442 с.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 359 с.

Одержано 22.11.2004