УДК 517.5

Н. В. Парфінович (Дніпропетр. ун-т)

ТОЧНИЙ ПОРЯДОК ВІДНОСНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ W_1^r У ПРОСТОРІ L_1

As $n \to \infty$, the exact order of relative widths of classes W_1^r of periodic functions in the space L_1 is found under restrictions on higher derivatives of approximating functions.

Знайдено точний порядок при $n \to \infty$ відносних поперечників класів W_1^r періодичних функцій у просторі L_1 при обмеженнях на старші похідні наближаючих функцій.

Нехай L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\| f \|_p$. Якщо $r \in \mathbb{N}$, то через W_p^r позначимо клас функцій $f \in L_p$, які мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ і такі, що $\| f^{(r)} \|_p \le 1$.

Найкращим наближенням класу $M \subset L_p$ множиною $H \subset L_p$ в метриці простору L_p називається величина

$$E(M, H)_p := \sup_{f \in M} \sup_{h \in H} \| f - h \|_p.$$

Величина

$$d_n(M, L_p) := \inf_{H_n} E(M, H_n)_p,$$

де H_n — підпростори простору L_p такі, що $\dim H_n \le n$, називається n-поперечником за Колмогоровим [1] класу M у просторі L_p.

Нехай $M' \subset L_p$ — деякий клас функцій. Покладемо

$$d_n(M, L_p, M') := \inf_{H_n} E(M, H_n \cap M')_p,$$

де H_n — підпростори простору L_p, $\dim H_n \le n$. Величини типу $d_n(M, L_p, M')$ введені до розгляду В. М. Коноваловим [2] і називаються відносними поперечниками.

Відомо (див., наприклад, [3, с. 249]), що для всіх $r \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, \infty]$

$$d_n\left(W_p^r, L_p\right) \asymp n^{-r}, \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Зрозуміло також, що для довільного $r \in \mathbb{N}$

$$d_n\left(W_2^r, L_2, W_2^r\right) \asymp n^{-r}, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Проте поведінка відносних поперечників $d_n\left(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r\right)$ і $d_n\left(W_1^r, L_1, W_1^r\right)$ при $n \to \infty$ істотно відрізняється від (1) і (2). В. М. Коноваловим [2] було доведено, що для всіх $r = 2, 3, \ldots$

$$d_n\left(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r\right) \asymp n^{-2}, \qquad n \to \infty. \tag{3}$$

Пізніше В. Ф. Бабенко [4] довів, що при $r = 3, 4, \ldots$

$$d_n\left(W_1^r, L_1, W_1^r\right) \asymp n^{-2}, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

С. Б. Стєчкін висловив припущення, що для довільного фіксованого додатного числа ε при всіх $r = 3, 4, \ldots$ має місце співвідношення

$$d_n\left(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon)W_\infty^r\right) \asymp n^{-r}, \qquad n \to \infty.$$

В. Ф. Бабенко [5] довів істинність цієї гіпотези, а в [6] отримав аналогічні результати для поперечників $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon)W_1^r\right)$.

Нехай $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — незростаюча, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — неспадна послідовності додатних чисел. У роботах [6, 7] отримано оцінки зверху для послідовностей величин $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right)$ і $d_n\left(W_1^r, L_1, \alpha_n W_1^{r+k}\right)$ відповідно.

У даній роботі показано, що оцінки знизу для цих величин збігаються з оцінками зверху, тобто встановлено порядкові рівності при $n \to \infty$ для послідовностей величин $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right)$ і $d_n\left(W_1^r, L_1, \alpha_n W_1^{r+k}\right)$.

Теорема 1. *Нехай* $r = 3, 4, \ldots$ *і* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ *— незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце співвідношення*

$$d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right) \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon_n^{1-r/2}, & \varepsilon_n n^2 \to \infty, \quad \varepsilon_n \to 0, \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1). \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай* $r = 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ *і* $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ *— неспадна послідовність додатних чисел. Тоді при* $n \to \infty$ *мають місце співвідношення*

$$d_n\left(W_1^r, L_1, \alpha_n W_1^{r+k}\right) > C > 0,$$

якщо α_n *є обмеженою*;

$$d_n\left(W_1^r, L_1, \alpha_n W_1^{r+k}\right) \asymp \frac{1}{\varepsilon_n^{r/k} n^r},$$

якщо $\alpha_n = \varepsilon_n n^k$, $\varepsilon_n n^k \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$, *і*

$$d_n\left(W_1^r, L_1, \alpha_n W_1^{r+k}\right) \asymp \frac{1}{n^r},$$

якщо $\alpha_n \geq C n^k$.

Доведення теореми 1. Оцінки зверху для поперечників $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right)$ випливають із результатів В. Ф. Бабенка [6]. Знайдемо оцінку знизу. Зафіксуємо послідовність n-вимірних підпросторів $\{H_n\}$ простору L_1. Використовуючи теорему двоїстості для найкращих L_1-наближень опуклою множиною [8] (теорема 1.4.1), маємо

$$E_n := E\left(W_1^r, H_n \cap (1+\varepsilon_n)W_1^r\right)_1 =$$

$$= \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - (1+\varepsilon_n) \sup_{u \in H_n \cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u(t)g(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^r} \sup_{\substack{\|f\|_1 \leq 1 \\ f \perp 1}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - (1+\varepsilon_n) \sup_{u \in H_n \cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)g(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^r} \left\{ E(g)_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{u \in H_n \cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)g(t)\,dt \right\}.$$

Нехай для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{\lambda,0}(t) = \operatorname{sgn}\sin\lambda t$ і $\varphi_{\lambda,r}(\cdot)$ — r-й $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл від функції $\varphi_{\lambda,0}(\cdot)$, що має нульове середнє значення на періоді. Зазначимо, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ і $l \in \mathbb{N}$ $\varphi_{l,r}(\cdot+\alpha) \in W_\infty^r$, тому

$$E_n \ge \sup_{l\in\mathbb{N}} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left\{ \left\|\varphi_{l,r}(\cdot+\alpha)\right\|_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{u\in H_n\cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{l\in\mathbb{N}} \left\{ \left\|\varphi_{l,r}\right\|_\infty - (1+\varepsilon_n) \inf_\alpha \sup_{u\in H_n\cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt \right\}. \tag{5}$$

Якщо $l > n$, то

$$\left\|\varphi_{l,r}\right\|_\infty - (1+\varepsilon_n) \inf_\alpha \sup_{u\in H_n\cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt < \left\|\varphi_{n,r}\right\|_\infty,$$

але, як відомо,

$$d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right) \ge d_n\left(W_1^r, L_1\right).$$

Тому зовнішню точну верхню межу в (5) можна брати лише по $1 \le l \le n$. Використавши методи з [9], покажемо, що

$$\inf_\alpha \sup_{u\in H_n\cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt \le \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n}\right), \tag{6}$$

де $t_{\max}$ таке, що $\left\|\varphi_{l,r}\right\|_\infty = \varphi_{l,r}(t_{\max})$.

Припустимо, що, навпаки, для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sup_{u\in H_n\cap W_1^r} \int_0^{2\pi} u^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt > \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n}\right).$$

Довільному $\alpha \in \mathbb{R}$ поставимо у відповідність елемент u_α з $H_n \cap W_1^r$ такий, що

$$\int_0^{2\pi} \left|u_\alpha^{(r)}(x)\right| dx = 1$$

і

$$\int_0^{2\pi} u_\alpha^{(r)}(t)\varphi_{l,r}(t+\alpha)\,dt > \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n}\right). \tag{7}$$

Очевидно, що при зроблених припущеннях елемент u_α існує.

Функція $\varphi_{l,r}$ набуває екстремальних значень в $2l$ точках відрізка $[0, 2\pi]$. Позначимо, ці точки $t_{\max}^i$, $1 \le i \le 2l$. Нехай

$$U_{n,\alpha} = \bigcup_{i=1}^{2n} \left(x_{\max}^i - \alpha - \frac{\pi}{4n};\, x_{\max}^i - \alpha + \frac{\pi}{4n} \right).$$

Покажемо, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;-\; \int_{U_{n,\alpha}} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;<\; 2^{-1} \int_0^{2\pi} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \quad \left(= \frac{1}{2} \right), \tag{8}$$

тобто

$$\int_{U_{n,\alpha}} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;>\; \frac{1}{2}.$$

Припустимо супротивне. Тоді з (7) отримаємо

$$\varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n} \right) \;<\; \int_0^{2\pi} u_\alpha^{(r)}(x) \varphi_{l,r}(x+\alpha)\, dx \;=$$

$$= \int_{U_{n,\alpha}} u_\alpha^{(r)}(x) \varphi_{l,r}(x+\alpha)\, dx \;+\; \int_{[0,2\pi]\setminus U_{n,\alpha}} u_\alpha^{(r)}(x) \varphi_{l,r}(x+\alpha)\, dx \;\le$$

$$\le \varphi_{l,r}(t_{\max}) \int_{U_{n,\alpha}} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;+\; \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{4n} \right) \int_{[0,2\pi]\setminus U_{n,\alpha}} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;=$$

$$= \lambda \varphi_{l,r}(t_{\max}) \;+\; (1-\lambda) \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{4n} \right),$$

де згідно зі зробленими припущеннями

$$\lambda \;=\; \int_0^{2\pi} \left| u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;\le\; \frac{1}{2}.$$

Оскільки функція $\varphi_{l,r}(t_{\max} + \cdot)$ опукла догори в правому околі нуля, то

$$\varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n} \right) \;<\; \lambda \varphi_{l,r}(t_{\max}) \;+\; (1-\lambda) \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{4n} \right) \;\le$$

$$\le \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + (1-\lambda)\frac{\pi}{4n} \right) \;\le\; \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n} \right).$$

Таким чином, отримали суперечність

$$\varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n} \right) \;<\; \varphi_{l,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{8n} \right).$$

Отже, (8) справджується.

Тепер розглянемо множину

$$M_n \;=\; \left\{ \alpha = \frac{k\pi}{2n},\; k \in \mathbb{N},\; 1 \le k \le 2n-1 \right\}.$$

Оскільки для всіх $n \ge 2$ маємо $\operatorname{card} M_n = 2n - 1 > n$, то функції u_α, $\alpha \in M_n$, а з ними і $u_\alpha^{(r)}$, будуть лінійно залежними. Отже, знайдуться числа A_α, $\alpha \in M_n$, такі, що $\sum_{\alpha \in M_n} A_\alpha u_\alpha^{(r)} = 0$ і $\sum_{\alpha \in M_n} |A_\alpha| = 1$.

На підставі означень і доведених властивостей u_α, як в [9], маємо

$$0 \;=\; \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\alpha \in M_n} A_\alpha u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;\ge\; \sum_{\beta \in M_n} \int_{U_{n,\beta}} \left| \sum_{\alpha \in M_n} A_\alpha u_\alpha^{(r)}(x) \right| dx \;\ge$$

$$\ge \sum_{\beta \in M_n} \int_{U_{n,\beta}} \left(\left| A_\beta u_\beta^{(r)}(x) \right| - \sum_{\substack{\alpha \in M_n \\ \alpha \ne \beta}} \left| A_\alpha u_\alpha^{(r)}(x) \right| \right) dx \;>$$

$$> \sum_{\beta\in M_n}\left(\frac{|A_\beta|}{2} - \sum_{\substack{\alpha\in M_n\\ \alpha\neq\beta}} |A_\alpha| \int_{U_{n,\beta}} \left|u_\alpha^{(r)}(x)\right| dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\beta\in M_n}|A_\beta| - \sum_{\beta\in M_n}\sum_{\substack{\alpha\in M_n\\ \alpha\neq\beta}} |A_\alpha| \int_{U_{n,\beta}} \left|u_\alpha^{(r)}(x)\right| dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{\alpha\in M_n}|A_\alpha| \sum_{\substack{\beta\in M_n\\ \beta\neq\alpha}} \int_{U_{n,\beta}} \left|u_\alpha^{(r)}(x)\right| dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} - \sum_{\alpha\in M_n}|A_\alpha| \int_{[0,2\pi]\setminus U_{n,\alpha}} \left|u_\alpha^{(r)}(x)\right| dx > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Отримана суперечність доводить співвідношення (6). Для спрощення запису, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що в (6) $t_{\max} = 0$. Після зроблених зауважень для E_n можемо записати

$$E_n \geq \max_{1\leq l\leq n} F_n(l),$$

де

$$F_n(l) = \|\varphi_{l,r}\|_\infty - (1+\varepsilon_n)\varphi_{l,r}\left(\frac{\pi}{8n}\right) = \frac{1}{l^r}\left\{\|\varphi_{1,r}\|_\infty - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{l\pi}{8n}\right)\right\}.$$

Розглянемо поряд з $F_n(l)$ функцію дійсного аргументу $\lambda\in[1,n]$

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}\left\{\|\varphi_{1,r}\|_\infty - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\}.$$

Дослідимо спочатку випадок, коли $\varepsilon_n n^2 \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$, $n\to\infty$. Для похідної функції $F_n(\lambda)$ маємо

$$F_n'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\left\{\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\} - \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\frac{\lambda\pi}{8n} =$$

$$= -\frac{(1+\varepsilon_n)r}{\lambda^{r+1}}\left\{\varphi_{1,r}(0) - \varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\} - \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\frac{\lambda\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right) + \frac{r\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\|\varphi_r\|_\infty =$$

$$= \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\left\{r\int_0^{\lambda\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\} + \frac{r\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\|\varphi_{1,r}\|_\infty.$$

Враховуючи, що

$$r\int_0^{\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\pi}{8n}\right) \asymp n^{-2}$$

при $n\to\infty$, в розглянутому випадку ($\varepsilon_n n^2\to\infty$, $\varepsilon_n\to 0$, $n\to\infty$) при всіх достатньо великих n $F_n'(1) > 0$. Розглянемо $F_n'(n)$:

$$F_n'(n) = \frac{1+\varepsilon_n}{n^{r+1}}\left\{r\int_0^{\pi/8}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\pi}{8}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} + \frac{r\varepsilon_n}{n^{r+1}}\|\varphi_{1,r}\|_\infty.$$

Оскільки $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, то при досить великих n знак $F_n'(n)$ буде визначатись знаком першого доданка. Враховуючи те, що функція $\varphi_{1,r-1}(\cdot)$ опукла донизу на $[0, \pi/2]$ і набуває на $(0, \pi/2]$ від'ємних значень, при досить великих n отримуємо $F_n'(n) < 0$.

Розглянемо тепер функцію

$$G_n(\lambda) = \lambda^{r+1} F_n'(\lambda).$$

Для її похідної маємо

$$G_n'(\lambda) = r(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\frac{\pi}{8n} - \frac{\pi(1+\varepsilon_n)}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right) -$$

$$- \frac{(1+\varepsilon_n)\pi}{8n}\frac{\lambda\pi}{8n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8n}(1+\varepsilon_n)\left\{(r-1)\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right) - \frac{\lambda\pi}{8n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{8n}(1+\varepsilon_n)\left\{(r-1)\int_0^{\lambda\pi/8n}\varphi_{1,r-2}(t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{8n}\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\}.$$

Оскільки функція $\varphi_{1,r-2}(\cdot)$ опукла донизу на $[0, \pi/2]$ (лінійна при $r = 3$), то $G_n'(\lambda) < 0$ для всіх $\lambda \in [1, n]$. Отже, функція $G_n(\lambda)$, а з нею і $F_n'(n)$, є спадною на цьому проміжку. Враховуючи той факт, що на кінцях відрізка $[1, n]$ $F_n'(\lambda)$ набуває значень різних знаків, можемо стверджувати, що існує єдина точка $\lambda_n \in (1, n)$ така, що

$$\sup_{1 \le \lambda \le n} F_n(\lambda) = F_n(\lambda_n).$$

Необхідну умову екстремуму функції $F_n(\lambda)$ $(F_n'(\lambda_n) = 0)$ запишемо у вигляді

$$(1+\varepsilon_n)\left\{r\int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\lambda_n\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)\right\} = -r\varepsilon_n\,\varphi_{1,r}(0). \tag{9}$$

Оскільки функція $\varphi_{1,r-1}(\cdot)$ опукла донизу на проміжку $[0, \pi/2]$ і $\varphi_{1,r-1}(t) < 0$ $\forall\, t \in (0, \pi/2]$, то для $\lambda_n \in [1, n]$ виконується нерівність

$$\frac{\lambda_n\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right) \le \int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt.$$

Зрозуміло також, що для $\lambda_n \in [1, n]$

$$\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right) \ge \varphi_{1,r-1}'(0)\frac{\lambda_n\pi}{8n}.$$

Скориставшись цими міркуваннями і тим, що $\varphi_{1,r-1}'(0) = -\|\varphi_{1,r-2}\|_\infty$, можемо одержати оцінки

$$r\int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\lambda_n\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right) \ge$$

$$\geq (r-1)\int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt \geq -(r-1)\|\varphi_{1,r-2}\|_\infty\int_0^{\lambda_n\pi/8n} t\,dt =$$

$$= -(r-1)\frac{\|\varphi_{1,r-2}\|_\infty}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)^2,$$

звідки одразу випливає

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)^2 \geq \frac{2r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(0)}{(r-1)\|\varphi_{1,r-2}\|_\infty(1+\varepsilon_n)}. \tag{10}$$

З іншого боку,

$$r\int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\lambda_n\pi}{8n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right) \leq$$

$$\leq (r-2)\int_0^{\lambda_n\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt \leq -\frac{(r-2)\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty}{\pi/2}\int_0^{\lambda_n\pi/8n} t\,dt =$$

$$= -\frac{(r-2)\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty}{\pi}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)^2,$$

звідки

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)^2 \leq \frac{\pi r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(0)}{(r-2)\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty(1+\varepsilon_n)}. \tag{11}$$

Зіставляючи (10) і (11), отримуємо

$$C_1 n\sqrt{\varepsilon_n} \leq \lambda_n \leq C_2 n\sqrt{\varepsilon_n}, \tag{12}$$

де $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ — константи, які не залежать від n. Оберемо $l \in \{1, \ldots, n\}$ так, щоб

$$l - 1 \leq \lambda_n \leq l. \tag{13}$$

Тепер, враховуючи (9), (12) і (13), для E_n маємо

$$E_n = \max_{1\leq l\leq n} F_n(l) \geq F_n(l) = \frac{1}{l^r}\left\{\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{8n}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1+\varepsilon_n}{l^r}\int_0^{l\pi/8n}\varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\varepsilon_n}{l^r}\varphi_{1,r}(0) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{l^r}\frac{\lambda_n\pi}{8n}\frac{1+\varepsilon_n}{r}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right) \geq \frac{(l-r)^r}{l^r(l-1)^r}\frac{1+\varepsilon_n}{r}\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty\left(\frac{\lambda_n\pi}{8n}\right)^2\frac{2}{\pi} \geq$$

$$\geq \frac{C_3}{\lambda_n^r}\frac{\lambda_n^2}{n^2} = \frac{C_3}{\lambda_n^{r-2}n^2} \geq \frac{C_4}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r},$$

де C_3, C_4 — додатні константи. Отже, в розглянутому випадку необхідні оцінки знизу отримано.

Зазначимо, що у випадку, коли $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ і $\varepsilon_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, порядкова рівність $d_n\left(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon_n)W_1^r\right) \asymp n^{-r}$ випливає одразу з результату В. Ф. Бабенка [6].

Нехай тепер $\varepsilon_n n^2 = O(1)$, тобто $\varepsilon_n \le C_5 / n^2$ (C_5 — додатна константа). Для будь-якого фіксованого $l \in \{1, \ldots, n\}$ отримаємо

$$E_n \ge -\frac{1+\varepsilon_n}{l^r} \int_0^{l\pi/8n} \varphi_{1,r-1}(t)\,dt - \frac{\varepsilon_n}{l^r}\varphi_{1,r}(0) \ge$$

$$\ge \frac{1+\varepsilon_n}{l^r}\frac{2}{\pi}\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty \int_0^{l\pi/8n} t\,dt - \frac{\varphi_{1,r}(0)}{l^r}\frac{C_5}{n^2} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon_n}{l^r}\frac{\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty}{\pi}\left(\frac{l\pi}{8n}\right)^2 - \frac{\varphi_{1,r}(0)}{l^r}\frac{C_5}{n^2} \ge$$

$$\ge \frac{1}{n^2}\left\{\frac{\pi}{64}\frac{1+\varepsilon_n}{l^{r-2}}\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty - \frac{\varphi_{1,r}(0)}{l^r}C_5\right\}.$$

Легко побачити, що при всіх фіксованих

$$l > 8\sqrt{\frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty C_5}{\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty \pi}}$$

буде

$$C_6 = \frac{\pi}{64}\frac{1+\varepsilon_n}{l^{r-2}}\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty - \frac{\varphi_{1,r}(0)}{l^r}C_5 > 0,$$

а $E_n \ge C_6 / n^2$. Отже, необхідну оцінку знизу отримано і в цьому випадку.

Теорему доведено.

***Доведення теореми* 2.** Покажемо, що виконується перше співвідношення. Зафіксуємо послідовність H_n n-вимірних підпросторів простору L_1. Оскільки послідовність α_n є обмеженою, то знайдеться число $K > 0$ таке, що $\alpha_n \le K$. Зрозуміло, що

$$E\left(W_1^r, H_n \cap \alpha_n W_1^{r+k}\right)_1 \ge E\left(W_1^r, KW_1^{r+k}\right)_1 = C.$$

Припустимо, що $C = 0$. Тоді для кожної функції $f \in W_1^r$ $\inf\limits_{u \in KW_1^{r+k}} \|f - u\|_1 = 0$. Оскільки множина KW_1^{r+k} є локально компактною в L_1, то для кожної функції $f \in W_1^r$ існує $u_f \in KW_1^{r+k}$ така, що $\|f - u_f\|_1 = 0$, тобто на $[0, 2\pi]$ $f(t) = u_f(t)$ і $\left\|f^{(r+k)}\right\|_1$ є обмеженою. Розглянемо функцію $f_n(t) = \sin nt / (4n^r)$. Зрозуміло, що $f_n \in W_1^r$, проте $\left\|f^{(r+k)}\right\|_1 = n^k$ і при $k \in \mathbb{N}$ не є обмеженою. Отримана суперечність доводить, що $C > 0$.

Покажемо тепер, що виконується і друге співвідношення. Оцінки зверху в цьому випадку одразу випливають з результату [7]. Отримаємо для $d_n\left(W_1^r, H_n \cap \alpha_n W_1^{r+k}\right)_1$ оцінки знизу. Для будь-якого $H_n \subset L_1$ на підставі теореми двоїстості для найкращого L_1-наближення в метриці простору L_1 можемо записати

$$E\left(W_1^r, H_n \cap \alpha_n W_1^{r+k}\right)_1 =$$

$$= \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le 1 \\ g \perp 1}} \left\{\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \alpha_n \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \int_0^{2\pi} u(t)g(t)\,dt\right\} =$$

$$= \sup_{\substack{\|f\|_1 \le 1 \\ f \perp 1}} \sup_{g \in W_\infty^{r+k}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t) g^{(k)}(t)\, dt - \alpha_n \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \int_0^{2\pi} u^{(r+k)}(t) g(t)\, dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^{r+k}} \left\{ E\left(g^{(k)}(t)\right)_\infty - \alpha_n \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \int_0^{2\pi} u^{(r+k)}(t) g(t)\, dt \right\} \ge$$

$$\ge \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \max_{1 \le l \le n} \left\{ E\left(\varphi_{l,r}(t+\alpha)\right) - \alpha_n \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \int_0^{2\pi} u^{(r+k)}(t) \varphi_{l,r+k}(t+\alpha)\, dt \right\} =$$

$$= \max_{1 \le l \le n} \left\{ \|\varphi_{l,r}\|_\infty - \alpha_n \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \int_0^{2\pi} u^{(r+k)}(t) \varphi_{l,r+k}(t+\alpha)\, dt \right\} \ge$$

$$\ge \max_{1 \le l \le n} \left\{ \|\varphi_{l,r}\|_\infty - \alpha_n \sup_{u \in H_n \cap W_1^{r+k}} \|\varphi_{l,r+k}\|_\infty \left\|u^{(r+k)}\right\|_1 \right\} \ge$$

$$\ge \max_{1 \le l \le n} \left\{ \|\varphi_{l,r}\|_\infty \left(1 - \frac{\varepsilon_n n^k}{l^k} \frac{\|\varphi_{1,r+k}\|_\infty}{\|\varphi_{1,r}\|_\infty} \right) \right\}.$$

Нехай $l = 2\left[\varepsilon_n^{1/k} n\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа x. При достатньо великих n $1 \le l \le n$, і ми можемо записати

$$E_n \ge \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2^r \varepsilon_n^{r/k} n^r} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_n n^k}{2^k \left[\varepsilon_n^{1/k} n\right]^k} \right\} \ge \frac{C}{\varepsilon_n^{r/k} n^r},$$

де C — додатна константа. Залишилось зазначити, що останнє твердження теореми випливає з [7] і результатів для відповідних поперечників без обмежень.

Теорему доведено.

1. *Колмогоров А. Н.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // Математика и механика. Избр. тр. – М.: Наука, 1985. – С. 186–189.
2. *Коновалов В. Н.* Оценка поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, вып. 3. – С. 369–380.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9–18.
5. *Бабенко В. Ф.* О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, вып. 6. – С. 24–30.
6. *Бабенко В. Ф.* О наилучших L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там же. – 1992. – **51**, вып. 5. – С. 12–19.
7. *Бабенко В. Ф., Азар Л., Парфинович Н. В.* О приближении классов периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 18–29.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Babenko V. F.* On the relative widths of classes of functions with bounded mixed derivative // East J. Approxim. – 1996. – **2**, № 3. – P. 319–330.

Одержано 25.03.2004,
після доопрацювання — 17. 01. 2005