УДК 517.948.5

Б. И. Пелешенко (Днепропетр. аграр. ун-т)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

We prove theorems of interpolation of quasilinear operators of weak type $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$ in the Lorentz spaces. The operators considered are the analogs of the Calderon and Benett operators for concave and convex functions $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$.

Доведено теореми інтерполяції в просторах Лоренца квазілінійних операторів слабкого типу $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, аналогів операторів Кальдерона, Бенетта для вгнутих та опуклих функцій $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$.

1. Введение. В работе Кальдерона [1] получена теорема интерполяции линейных операторов условно слабых типов в пространствах Лоренца. Важную роль при доказательстве этих теорем играет оператор

$$Sf^*(t) = \int_0^\infty f^*(s)\, d \min_{i=0,1} \left\{ \frac{s^{1/p_i}}{t^{1/q_i}} \right\}, \tag{1}$$

$$1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty, \quad p_0 \ne p_1, \quad q_0 \ne q_1,$$

мажорантный для операторов условно слабых типов (p_0, q_0) и (p_1, q_1), определенных на функциях $f(s)$ из суммы пространств Лоренца $L^{p_0,1}(R^n) + L^{p_1,1}(R^n)$.

Развивая метод А. Кальдерона, Д. Бойд [2], Р. Шарпли [3], С. Г. Крейн, Е. М. Семенов [4], Е. А. Павлов [5] и другие (библиографию см. в [4]) получили теоремы интерполяции квазилинейных операторов в перестановочно-инвариантных пространствах вещественных функций n переменных, использовав ограниченность в этих пространствах оператора

$$Af^*(t) = \int_0^\infty f^*(s)\, d \min_{i=0,1} \left\{ \frac{\varphi_i(s)}{\psi_i(t)} \right\}, \tag{2}$$

определенного для квазивогнутых положительных функций $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = 0, 1$. В работе [6] исследованы квазилинейные операторы слабого типа (p_0, q_0, p_1, q_1) при $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$, для которых мажорантными являются операторы

$$Wf^*(t) = t^{1/q_0} \int_0^{t^m} f^*(s) s^{1/p_0 - 1} ds + t^{1/q_1} \int_{t^m}^\infty f^*(s) s^{1/p_1 - 1} ds,$$

$$m = ((q_1 - q_0) p_0 p_1)/((p_1 - p_0) q_0 q_1),$$

отличающиеся от операторов (1) только в случае $p_1 = \infty$, и доказаны теоремы интерполяции для пространств Лоренца – Зигмунда $L^{p,q} \log^\alpha L(R^n)$, $0 < p$, $q \le \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$. В настоящей статье для вогнутых или выпуклых функций $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ рассматриваются квазилинейные операторы слабого типа $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, являющиеся аналогами операторов, изученных в [1, 6], и совпадающие с операторами, исследованными в работах [2 – 5], в случае, когда $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ — вогнутые и $\varphi(t) \ne \infty$. Доказаны теоремы интерполяции рассматриваемых операторов в идеальных квазинормированных пространствах Лоренца. В качестве следствий получены теоремы интерполяции квазилинейных операторов, ограниченных из пары пространств Лоренца $\Lambda_{\varphi_0}(R^n)$,

$\Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ в пару пространств Марцинкевича $M_{\overline{\psi}_0}(R^n)$, $M_{\overline{\psi}_1}(R^n)$, где $\overline{\psi}_i(t) = t/\psi_i(t)$, $i = 1, 2$.

Обозначим через Φ объединение множества непрерывных выпуклых или вогнутых возрастающих на неограниченном промежутке $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и функции $\operatorname{sign} t$. Определим для положительной всюду конечной функции $\varphi(t)$ на полуоси $(0, \infty)$ функцию растяжения

$$M_\varphi(t) = \sup_{0<s<\infty} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}, \quad 0 < t < \infty.$$

Пусть $S(R^n)$ — пространство измеримых по Лебегу на n-мерном евклидовом пространстве R^n вещественных функций и $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка модуля функции $f \in S(R^n)$.

Для заданной на $(0, \infty)$ почти всюду положительной локально интегрируемой функции $g(t)$ и $0 < p < \infty$ весовое пространство $L_{p,g}(0, \infty)$ определяется как множество измеримых на $(0, \infty)$ вещественных функций с конечной квазинормой $(0 < p < 1)$ или нормой $(1 \le p < \infty)$

$$\| f \|_{p,g} = \left\{ \int_0^\infty | f(t)|^p g(t) dt \right\}^{1/p}.$$

Пространство Лоренца $\Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ для заданной $\varphi(t)$ из множества Φ и $a \in (0, \infty]$ состоит из функций $f(x) \in S(R^n)$, для которых конечна квазинорма $\| f \|_{\Lambda_{\varphi,a}} = \left\{ \int_0^\infty (f^*(t))^a \, d\varphi(t) \right\}^{1/a}$, если $\varphi(t) \ne \operatorname{sign} t$, $0 < a < \infty$, и квазинорма $\sup\limits_{t>0} (f^*(t)\varphi(t))$ при $a = \infty$. Если $a = 1$, то пространство $\Lambda_{\varphi,1}(R^n)$ будем обозначать $\Lambda_\varphi(R^n)$. В случае, когда $\varphi(t) = t^{1/p}$, $0 < p < \infty$, $\Lambda_\varphi(R^n) = L^{p,1}(R^n)$ и $\varphi(t) = \operatorname{sign} t$, положим $\Lambda_\varphi(R^n) = L_\infty(R^n)$.

Аналогично определяется пространство Лоренца $\Lambda_{\varphi,a}(0, \infty)$ функций, заданных на полуоси $(0, \infty)$.

Пусть функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t) \in \Phi$ таковы, что $\varphi(t) \ne \infty$ и $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает на $(0, \infty)$. Пространство $\Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ состоит из функций $f(x) \in S(R^n)$, неубывающие перестановки модулей которых удовлетворяют условию

$$\int_0^1 f^*(t) d\varphi_0(t) dt + \int_1^\infty f^*(t) d\varphi_1(t) < \infty.$$

Пусть $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$ и выполняется условие $\sup\limits_{0<u<1} \left(M_{\varphi_0}(u)(1 - \ln u)\right) \le 1$. Обозначим через $\Lambda_{\varphi_0}(R^n) + L^{\infty,1}(R^n)$ пространство функций $f(x)$ из $S(R^n)$, для которых конечна сумма интегралов

$$\int_0^1 f^*(t) d\varphi_0(t) dt + \int_1^\infty f^*(t) t^{-1} \, dt.$$

Определение 1 [4, с. 177]. *Пусть* $\varphi(t)$, $\psi(t) \in \Phi$. *Квазилинейный оператор* T *называется оператором слабого типа* (φ, ψ), *если существует такое число* $C > 0$, *что для любого* $t > > 0$ *и любой функции* $f(x) \in \Lambda_\varphi(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$(Tf)^*(t)\psi(t) \leq C\int_0^\infty f^*(u)d\varphi(u), \quad \text{если} \quad \varphi(t) \neq \operatorname{sign} t,$$

и

$$(Tf)^*(t)\psi(t) < C\|f\|_{L_\infty}, \quad \text{если} \quad \varphi(t) = \operatorname{sign} t.$$

Далее будем предполагать, что функции $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t) \in \Phi$, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает на $(0, \infty)$, область значений $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ совпадает с областью значений $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ и $m(t)$ — измеримое положительное решение уравнения

$$\varphi_0(m(t))/\varphi_1(m(t)) = \psi_0(t)/\psi_1(t). \tag{3}$$

Определение 2. *Квазилинейный оператор* T *называется оператором слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *если найдется такое* $C > 0$, *что для всех* $f(x) \in \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ *и* $t > 0$ *выполняется неравенство*

$$(Tf)^*(t) \leq C\left\{(\psi_0(t))^{-1}\int_0^{m(t)} f^*(u)d\varphi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1}\int_{m(t)}^\infty f^*(u)d\varphi_1(u)\right\}$$

в случае $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$, *и для всех* $\Lambda_\varphi(R^n) = L^{p,1}(R^n)$, $t > 0$,

$$(Tf)^*(t) \leq C\left\{(\psi_0(t))^{-1}\int_0^{m(t)} f^*(u)d\varphi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1}\int_{m(t)}^\infty f^*(u)u^{-1}du\right\},$$

если $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$ *и* $\sup\limits_{0<u<1}\left(M_{\varphi_0}(u)(1-\ln u)\right) \leq 1$.

Определим операторы усреднения следующим образом. Пусть $\varphi(t) \in \Phi$, для любого $t > 0$ и любой неотрицательной невозрастающей на $(0, \infty)$ функции $g(t)$ полагаем

$$A_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1}\int_0^t g(u)d\varphi(u), \quad \varphi(t) \neq \operatorname{sign} t,$$

$$B_\varphi g(t) = \begin{cases} [\varphi(t)]^{-1}\displaystyle\int_t^\infty g(u)d\varphi(u), & \varphi(t) \neq \operatorname{sign} t, \\ \displaystyle\int_t^\infty g(u)u^{-1}du, & \varphi(t) = \operatorname{sign} t, \end{cases}$$

$$C_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1}\sup_{0<u\leq t}(\varphi(u)g(u)),$$

$$D_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1}\sup_{t\leq u<\infty}(\varphi(u)g(u)).$$

2. Весовые неравенства Харди. Докажем утверждения об ограниченности операторов A_φ, B_φ на конусах неотрицательных невозрастающих функций весовых пространств $L_{p,g}(0, \infty)$. Близкие к теме исследования проводились в работах Й. Берга, Е. А. Мясникова, Л. Персона, В. Д. Степанова, Ш. Лая, В. И. Буренкова, М. Л. Гольдмана (см. библиографию в [7]).

Вначале установим вспомогательное неравенство для двусторонних числовых последовательностей.

Лемма. *Пусть* $a_i, b_i \geq 0$, $i \in Z$, $a_i \geq a_{i+1}$ *и* $b_i \leq b_{i+1}$ $\forall i \in Z$, $\lim\limits_{i \to +\infty} a_i = 0$, $\lim\limits_{i \to -\infty} b_i = 0$. *Если при* $q \in (0, \infty)$ *ряд* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} (b_i^q - b_{i-1}^q) a_i^q$ *сходится, то для любого* $r \in (q, \infty)$ *ряд* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} (b_i^r - b_{i-1}^r) a_i^r$ *также сходится и выполняется неравенство*

$$\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(b_i^r - b_{i-1}^r \right) a_i^r \right\}^{1/r} \leq \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) a_i^q \right\}^{1/q}.$$

Доказательство. Пусть вначале $r = 1$. Обозначим $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ для всех $k \in Z$. Пусть $\Delta a_k^{(i)} = \Delta a_k$, если $k \geq i$, и $\Delta a_k^{(i)} = 0$, если $k < i$. Применяя неравенство Минковского с показателем $1/q > 1$ и учитывая, что $a_i = \sum_{k=i}^{\infty} \Delta a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_k^{(i)}$, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\Delta a_k^{(i)} \right)^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\Delta a_k^{(i)} \right)^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q} \right]^q \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_k^{(i)} \right)^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q}.$$

Отметим, что согласно условию $\lim\limits_{i \to -\infty} b_i = 0$, следовательно, $b_k = \sum_{i=-\infty}^{k} (b_i - b_{i-1})$, $b_k^q = \sum_{i=-\infty}^{k} \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right)$ и для каждого $k \in Z$ справедливо равенство

$$\Delta a_k \sum_{i=-\infty}^{k} (b_i - b_{i-1}) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{k} (\Delta a_k)^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q}.$$

Суммируя по k и учитывая определения чисел $\Delta a_k^{(i)}$, имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta a_k^{(i)} [b_i - b_{i-1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\Delta a_k^{(i)} \right)^q \left(b_i^q - b_{i-1}^q \right) \right\}^{1/q}.$$

Тогда, учитывая ранее доказанное неравенство, получаем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i [b_i - b_{i-1}] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \Delta a_k \right) [b_i - b_{i-1}] =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_k^{(i)} \right) [b_i - b_{i-1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta a_k^{(i)} [b_i - b_{i-1}] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\Delta a_k^{(i)}\right)^q \left[b_i^q - b_{i-1}^q\right] \right\}^{1/q} \le \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^q \left[b_i^q - b_{i-1}^q\right] \right\}^{1/q}.$$

Если $r \ne 1$, то обозначим $\tilde{a}_i = a_i^r$, $\tilde{b}_i = b_i^r$ и применим доказанное неравенство к последовательностям $\{\tilde{a}_i\}_{i\in Z}$ и $\{\tilde{b}_i\}_{i\in Z}$ с показателем $q/r < 1$. Тогда

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^r \left(b_i^r - b_{i-1}^r\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_i \left(\tilde{b}_i - \tilde{b}_{i-1}\right) \le \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_i^{q/r} \left(\tilde{b}_i^{q/r} - \tilde{b}_{i-1}^{q/r}\right) \right\}^{r/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^q \left[b_i^q - b_{i-1}^q\right] \right\}^{r/q}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Полученное числовое неравенство обобщает неравенство

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^r - b_{i-1}^r\right) a_i^r \right\}^{1/r} \le \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^q - b_{i-1}^q\right) a_i^q \right\}^{1/q},$$

доказанное в [8, с. 218] при условии, что $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$, $0 = b_1 <$ $< b_2 < \ldots < b_n$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < b \le a \le 1$, $\varphi(t) \in \Phi$, $\varphi(t) \ne \operatorname{sign} t$, *функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ — *неотрицательные локально интегрируемые на* $(0, \infty)$ *и выполняется условие* $\int_1^{\infty} [\varphi(t)]^{-a} g_1(t)\,dt < \infty$. *Если величина*

$$\gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\left\{ \int_0^t g_1(z)\,dz + \varphi^a(t) \int_t^{\infty} [\varphi(z)]^{-a} g_1(z)\,dz \right\}^{1/a}}{\left\{ \int_0^t g_2(z)\,dz \right\}^{1/b}}$$

является конечной, то для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $L_{b,g_2}(0,\infty)$ *с весом* $g_2(t)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{ \int_0^{\infty} \left[(A_\varphi f)(t)\right]^a g_1(t)\,dt \right\}^{1/a} \le \gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b) \left\{ \int_0^{t} f^b(t) g_2(t)\,dt \right\}^{1/b}.$$

Константу $\gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b)$ *в неравенстве уменьшить нельзя.*

Доказательство. Пусть $0 < t_k < t_{k+1} < \infty$, $k \in Z$ и $\lim\limits_{k\to-\infty} t_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k =$ $= \infty$. Для невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ рассмотрим ступенчатую мажоранту $\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)$. Для любого $t > 0$ имеем

$$0 \le (A_\varphi f)(t) \le (A_\varphi \tilde{f})(t) \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) A_\varphi \chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \left[(A_\varphi \chi_{[0,t_{k+1})}(t)) - A_\varphi \chi_{[0,t_k)}(t) \right].$$

Применяя лемму, оцениваем последний ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\Big[(A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})}(t)) - A_\varphi\chi_{[0,t_k)}(t)\Big] \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^a(t_k)\Big[(A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})})^a(t) - (A_\varphi\chi_{[0,t_k)})^a(t)\Big]\right\}^{1/a}.$$

Тогда

$$\left\|A_\varphi f\right\|_{L_{a,g_1}} \leq \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^a(t_k)\left[\left\|A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})}\right\|^a_{L_{a,g_1}} - \left\|A_\varphi\chi_{[0,t_k)}\right\|^a_{L_{a,g_1}}\right]\right\}^{1/a}$$

и согласно лемме правая часть полученного неравенства не превышает

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^b(t_k)\left[\left\|A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})}\right\|^b_{L_{a,g_1}} - \left\|A_\varphi\chi_{[0,t_k)}\right\|^b_{L_{a,g_1}}\right]\right\}^{1/b}.$$

Далее, применяя преобразование Абеля, получаем

$$\left\|A_\varphi f\right\|_{L_{a,g_1}} \leq \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^b(t_k)\left[\left\|A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})}\right\|^b_{L_{a,g_1}} - \left\|A_\varphi\chi_{[0,t_k)}\right\|^b_{L_{a,g_1}}\right]\right\}^{1/b} \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[f^b(t_k) - f^b(t_{k+1})\right]\left\|A_\varphi\chi_{[0,t_{k+1})}\right\|^b_{L_{a,g_1}}\right\}^{1/b} \leq$$

$$\leq \sup_{0<t<\infty}\frac{\left\|A_\varphi\chi_{[0,t)}\right\|_{L_{a,g_1}}}{\left\|\chi_{[0,t)}\right\|_{L_{b,g_2}}}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f^b(t_k) - f^b(t_{k+1})\right]\left(\int_0^{t_{k+1}} g_2(t)\,dt\right)\right\}^{1/b} =$$

$$= \gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b)\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[f^b(t_k) - f^b(t_{k+1})\right]\chi_{(0,t_{k+1})}(t)\,g_2(t)\,dt\right\}^{1/b} =$$

$$= \gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b)\left\{\int_0^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f^b(t_k) - f^b(t_{k+1})\right]\chi_{(0,t_{k+1})}(t)\right)g_2(t)\,dt\right\}^{1/b}.$$

Снова применяя преобразование Абеля, имеем

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f^b(t_k) - f^b(t_{k+1})\right]\chi_{(0,t_{k+1})}(t)\right)g_2(t)\,dt =$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^b(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)\right)g_2(t)\,dt,$$

следовательно,

$$\left\|A_\varphi f\right\|_{L_{a,g_1}} \leq \gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b)\left\|\tilde f\right\|_{L_{b,g_2}}. \tag{4}$$

Теперь построим при каждом $n \in \mathbb{N}$ такие последовательности $\{t_i^{(n)}\}_{i\in Z}$, чтобы функции

$$\tilde f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k^{(n)})\chi_{[t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)})}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(t_{k-1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)})\right]\chi_{(0,t_k^{(n)})}(t)$$

образовывали невозрастающую последовательность и сходились всюду к $f(x)$. Тогда согласно теореме Леви $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{f}_n\|_{L_{b,g_2}} = \|f\|_{L_{b,g_2}}$, и из неравенства (4) получаем

$$\|A_\varphi f\|_{L_{a,g_1}} \le \gamma(\varphi, g_1, g_2, a, b)\|f\|_{L_{b,g_2}}.$$

Пусть G — множество неотрицательных невозрастающих на полуоси $(0,\infty)$ функций. Из неравенства следует оценка

$$\|A_\varphi\|_{G\bigcap L_{b,g_2}\to L_{a,g_1}} = \sup_{f\in G\bigcap L_{b,g_2},\, f\ne 0}\frac{\|A_\varphi f\|_{L_{a,g_1}}}{\|f\|_{L_{a,g_2}}} \le$$

$$\le \sup_{0<t<\infty}\left\{\|A_\varphi\chi_{(0,t]}\|_{L_{a,g_1}}\left(\int\limits_0^t g_2(z)\,dz\right)^{-1/b}\right\}.$$

Обратное неравенство вытекает из принадлежности функций $\chi_{(0,t]}(z)$ при любом $t>0$ множеству $G\bigcap L_{a,g_2}$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *При выполнении условий теоремы* 1 *в случае* $\varphi(t)=t$ *для любой функции* $f(t)\in G\bigcap L_{a,g_2}(0,\infty)$ *имеет место неравенство с точной константой*

$$\left\{\int\limits_0^\infty\left[t^{-1}\int\limits_0^t f(z)\,dz\right]^a g_1(t)\,dt\right\}^{1/a} \le \left[1+\gamma(g_1,g_2,a,b)\right]\left\{\int\limits_0^\infty f^b(t)g_2(t)\,dt\right\}^{1/b},$$

где

$$\gamma(g_1,g_2,a,b) = \sup_{0<t<\infty}\frac{\left(\int_0^t g_1(z)\,dz + t^a\int_t^\infty z^{-a}g_1(z)\,dz\right)^{1/a}}{\left(\int_0^t g_2(z)\,dz\right)^{1/b}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0<b\le a\le 1$, $\varphi(t)\in\Phi$, $\varphi(t)\ne \operatorname{sign} t$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ — *неотрицательные локально интегрируемые функции на* $(0,\infty)$ *и выполняется условие* $\int_0^1\varphi(t)^{-a}g_1(t)\,dt<\infty$. *Если величина*

$$\delta(\varphi,g_1,g_2,a,b) = \sup_{0<t<\infty}\frac{\left(\int_0^t[\varphi(t)-\varphi(z)]^a[\varphi(z)]^{-a}g_1(z)\,dz\right)^{1/a}}{\left(\int_0^t g_2(z)\,dz\right)^{1/b}}$$

является конечной, то для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $L_{b,g_2}(0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int\limits_0^\infty\left[(B_\varphi f)(t)\right]^a g_1(t)\,dt\right\}^{1/a} \le \delta(\varphi,g_1,g_2,a,b)\left\{\int\limits_0^\infty f^b(t)g_2(t)\,dt\right\}^{1/b}.$$

Константа $\delta(\varphi,g_1,g_2,a,b)$ *в неравенстве не может быть уменьшена.*

Доказательство. Повторяя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1, приходим к задаче определения величины

$$\left\| B_\varphi \right\|_{G \cap L_{b,g_2} \to L_{a,g_1}} = \sup_{f \in G \cap L_{a,g_2},\, f \neq 0} \frac{\left\| B_\varphi f \right\|_{L_{a,g_1}}}{\left\| f \right\|_{L_{a,g_2}}} =$$

$$= \sup_{0<t<\infty} \left[\left\| B_\varphi \chi_{[0,t]} \right\|_{L_{a,g_1}} \left(\int_0^t g_2(z)\,dz \right)^{-1/b} \right].$$

Для $z,\ t \in (0, \infty)$ получаем $(B_\varphi \chi_{[0,t]})(z) = \varphi(t)/\varphi(z) - 1$, если $z < t$, и $(B_\varphi \chi_{[0,t]})(z) = 0$ — в противном случае. Тогда

$$\left\| B_\varphi \chi_{[0,t]} \right\|_{L_{a,g_1}} = \left\{ \int_0^t \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)} - 1 \right]^a g_1(z)\,dz \right\}^{1/a}$$

и, следовательно, имеем

$$\left\| B_\varphi \right\|_{G \cap L_{b,g_2} \to L_{a,g_1}} = \sup_{0<t<\infty} \left(\left\{ \int_0^t [\varphi(t) - \varphi(z)]^a [\varphi(z)]^{-a} g_1(z)\,dz \right\}^{1/a} \left\{ \int_0^t g_2(z)\,dz \right\}^{-1/b} \right).$$

Согласно условию теоремы эта величина конечна, и теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *в случае* $\varphi(t) = t$. *Тогда для любой функции* $f(t) \in G \cap L_{a,g_2}(0, \infty)$ *выполняется неравенство с точной константой*

$$\left\{ \int_0^\infty \left[t^{-1} \int_t^\infty f(z)\,dz \right]^a g_1(t)\,dt \right\}^{1/a} \leq \beta(g_1, g_2, a, b) \left\{ \int_0^t [f(z)]^b g_2(z)\,dz \right\}^{1/b},$$

где

$$\delta(g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty} \left(\left\{ \int_0^t [t - z]^a z^{-a} g_1(z)\,dz \right\}^{1/a} \left\{ \int_0^t g_2(z)\,dz \right\}^{-1/b} \right).$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < b \leq a \leq 1$, $\varphi(t) = \operatorname{sign} t$, *функции* $g_1(t)$, $g_2(t)$ — *неотрицательные локально интегрируемые функции на полуоси* $(0, \infty)$ *и* $\int_0^1 \ln^a \frac{t}{z} g_1(z)\,dz < \infty$. *Если величина*

$$\eta(g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty} \left(\left\{ \int_0^t \left[\ln \frac{t}{z} \right]^a g_1(z)\,dz \right\}^{1/a} \left\{ \int_0^t g_2(z)\,dz \right\}^{-1/b} \right)$$

является конечной, то для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $L_{b,g_2}(0, \infty)$ *выполняется неравенство с точной константой*

$$\left\{ \int_0^\infty \left[(B_\varphi f)(t) \right]^a g_1(t)\,dt \right\}^{1/a} \leq \eta(g_1, g_2, a, b) \left\{ \int_0^\infty f^b(t) g_2(t)\,dt \right\}^{1/b}.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения по схеме доказательства теоремы 1, приходим к определению величины

$$\left\|\left| B_{\text{sign}} \right|\right\|_{G\cap L_{b,g_2}\to L_{a,g_1}} = \sup_{0<t<\infty}\left[\left\| B_{\text{sign}}\chi_{[0,t]}\right\|_{L_{a,g_1}}\left(\int_0^t g_2(z)\,dz\right)^{-1/b}\right].$$

Функция $(B_{\text{sign}}\chi_{[0,t]})(z) = \ln t/z$, если $0 < z < t$, и $(B_{\text{sign}}\chi_{[0,t]})(z) = 0$ в случае $0 < t < z$. Тогда

$$\left\| B_{\text{sign}}\chi_{[0,t]}\right\|_{L_{a,g_1}} = \left\{\int_0^t \left[\ln\frac{t}{z}\right]^a g_1(z)\,dz\right\}^{1/a}$$

и, следовательно,

$$\left\|\left| B_{\text{sign}} \right|\right\|_{G\cap L_{b,g_2}\to L_{a,g_1}} = \sup_{0<t<\infty}\left(\left\{\int_0^t \left[\ln\frac{t}{z}\right]^a g_1(z)\,dz\right\}^{1/a}\left(\int_0^t g_2(z)\,dz\right)^{-1/b}\right).$$

Согласно условию полученная величина конечна, и теорема доказана.

Предложение 1. *Пусть* $1 \le a < \infty$, $\varphi(t)\in\Phi$, $\varphi(t) \ne \operatorname{sign} t$, $g(t)$ — *почти всюду положительная на полуоси* $(0, \infty)$ *функция, интегрируемая на любом конечном отрезке* $[0, t]$, $t > 0$, *и* $G(t) = \int_0^1 g(z)\,dz$. *Если функции растяжения* M_φ, M_G *удовлетворяют условию*

$$\theta(\varphi, g, a) = \int_0^1 M_G^{1/a}(z^{-1})\,dM_\varphi(z) < \infty,$$

то для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $L_{a,g}(0,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left[(A_\varphi f)(t)\right]^a g(t)\,dt\right\}^{1/a} \le \theta(\varphi, g, a)\left\{\int_0^\infty f^a(t)g(t)\,dt\right\}^{1/a}.$$

Доказательство. Пусть $a\in[1,\infty)$. Учитывая неравенство

$$\int_0^t g(sz^{-1})z^{-1}\,ds = \int_0^{tz^{-1}} g(u)\,du = \frac{G(tz^{-1})}{G(t)}\int_0^t g(u)\,du \le M_G(z^{-1})\int_0^t g(u)\,du,$$

с помощью леммы 18 из [4] для любой функции $f(t)\in G\cap L_{a,g}(0,\infty)$ получаем оценку

$$\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)f(zt)\right]^a dt\right\}^{1/a} = \left\{\int_0^\infty [f(s)]^a g(sz^{-1})z^{-1}\,ds\right\}^{1/a} \le$$

$$\le \left\{M_G(z^{-1})\int_0^\infty [f(s)]^a g(s)\,ds\right\}^{1/a}. \tag{5}$$

Далее, применяя неравенство Минковского [9, с. 572] в случае $a > 1$ или теорему Фубини [9, с. 208] в случае $a = 1$ и оценку (5), имеем

$$\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_0^1 f(zt)\,dM_\varphi(z)\right]^a dt\right\}^{1/a} \le \int_0^1\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)f(zt)\right]^a dt\right\}^{1/a} dM_\varphi(z) \le$$

$$\le \int_0^1 M_G^{1/a}(z^{-1})\,dM_\varphi(z)\|f\|_{L_{a,g}}. \tag{6}$$

Тогда из оценки (6) следует неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_0^t f(z)\,d\varphi(z)\right]^a \varphi^{-a}(t)\,dt\right\}^{1/a} \le$$

$$\le \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_0^1 f(st)\,d\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}\right]^a dt\right\}^{1/a} \le \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_0^1 f(st)\,dM_\varphi(s)\right]^a dt\right\}^{1/a} \le$$

$$\le \int_0^1 M_G^{1/a}(z^{-1})\,dM_\varphi(z)\|f\|_{L_{a,g}}.$$

Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* $1 \le a < \infty$, $\varphi(t)\in \Phi$, $\varphi(t) \ne \operatorname{sign} t$, $g(t)$ — *такая почти всюду положительная функция на полуоси* $(0, \infty)$, *что* $G(t) = \int_0^t g(z)\,dz < \infty$ *для любого* $t > 0$ *и выполнено условие*

$$\lambda(\varphi, g, a) = \int_1^\infty M_G^{1/a}(z^{-1})\,dM_\varphi(z) < \infty.$$

Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $L_{a,g}(0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \varphi^{-a}(t)\left[\int_t^\infty f(z)\,d\varphi(z)\right]^a g(t)\,dt\right\}^{1/a} \le \lambda(\varphi, g, a)\left\{\int_0^\infty [f(t)]^a g(t)\,dt\right\}^{1/a}. \qquad (7)$$

Доказательство. Для невозрастающей неотрицательной функции $f(t)\in L_{a,g}(0,\infty)$ получаем

$$\left\{\int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(z)\,d\varphi(z)\right]^a \varphi^{-a}(t) g(t)\,dt\right\}^{1/a} = \left\{\int_0^\infty \left[\int_1^\infty f(zt)\,d\frac{\varphi(zt)}{\varphi(z)}\right]^a g(t)\,dt\right\}^{1/a} \le$$

$$\le \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_1^\infty f(zt)\,dM_\varphi(z)\right]^a dt\right\}^{1/a}.$$

Применяя неравенство Минковского при $a > 1$ или теорему Фубини в случае $a = 1$, имеем

$$\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_1^\infty f(zt)\,dM_\varphi(z)\right]^a dt\right\}^{1/a} \le \int_1^\infty \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t) f(zt)\right]^a dt\right\}^{1/a} dM_\varphi(z).$$

Далее, оценивая интеграл в правой части этого неравенства с помощью (6) и учитывая (7), получаем предложение 2.

Предложение 3. *Пусть* $1 \le a < \infty$, $g(t)$ — *такая почти всюду положительная функция на полуоси* $(0,\infty)$, *что* $G(t) = \int_0^t g(z)\,dz < \infty$ *существует для любого* $t > 0$ *и выполнено условие*

$$\mu(g, a) = \int_1^\infty M_G^{1/a}(z^{-1}) z^{-1}\,dz < \infty.$$

Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ из пространства $L_{a,g}(0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(z)z^{-1}dz\right]^a g(t)dt\right\}^{1/a} \le \mu(g,a)\left\{\int_0^\infty [f(t)]^a g(t)dt\right\}^{1/a}. \tag{8}$$

Доказательство. Для функции $f(t)\in G\bigcap L_{a,g}(0,\infty)$ имеем

$$\left\{\int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(z)z^{-1}dz\right]^a g(t)dt\right\}^{1/a} = \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_1^\infty f(zt)\frac{dz}{z}\right]^a dt\right\}^{1/a}.$$

Из теоремы Минковского при $a>1$ или теоремы Фубини в случае $a=1$ следует

$$\left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)\int_1^\infty f(zt)z^{-1}dz\right]^a dt\right\}^{1/a} \le \int_1^\infty \left\{\int_0^\infty \left[g^{1/a}(t)f(zt)\right]^a dt\right\}^{1/a} z^{-1}dz.$$

Далее, оценивая интеграл в правой части этого неравенства с помощью (6), получаем требуемое неравенство (8).

Предложение 4. *Пусть* $\varphi(t), g(t)\in\Phi$, $\varphi(t)\ne \operatorname{sign} t$, *и функции растяжения* M_g, M_φ *удовлетворяют условию*

$$\nu(\varphi,g) = \int_0^1 M_g(s^{-1})dM_\varphi(z) < \infty.$$

Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ из пространства $\Lambda_{g,\infty}(0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\sup_{0<t<\infty}\left(A_\varphi f(t)g(t)\right) \le \nu(\varphi,g)\sup_{0<t<\infty}\left(f(t)g(t)\right).$$

Доказательство предложения 4 получаем из следующей оценки:

$$\sup_{0<t<\infty}\left(g(t)[\varphi(t)]^{-1}\int_0^t f(z)d\varphi(z)\right) = \sup_{0<t<\infty}\left(g(t)[\varphi(t)]^{-1}\int_0^1 f(st)d\varphi(st)\right) \le$$

$$\le \sup_{0<t<\infty}\left(g(t)\int_0^1 f(st)dM_\varphi(s)\right) \le \int_0^1 M_g(s^{-1})dM_\varphi(s)\sup_{0<st<\infty}\left(g(st)f(st)\right).$$

Предложение 5. *Пусть функции* $\varphi(t)$, $g(t)$ *из множества* Φ *такие, что* $\varphi(t)\ne\operatorname{sign} t$ *и*

$$\xi(\varphi,g) = \int_0^1 M_g(s^{-1})dM_\varphi(s) < \infty.$$

Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ из пространства $\Lambda_{g,\infty}(0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\sup_{0<t<\infty}\left(B_\varphi f(t)g(t)\right) \le \xi(\varphi,g)\sup_{0<t<\infty}\left(f(t)\,g(t)\right).$$

Доказательство следует из оценки

$$\sup_{0<t<\infty}\left(g(t)\left[\varphi(t)\right]^{-1}\int_t^\infty f(z)\,d\varphi(z)\right) = \sup_{0<t<\infty}\left(g(t)\left[\varphi(t)\right]^{-1}\int_1^\infty f(st)\,d\varphi(st)\right) \le$$

$$\le \int_1^\infty M_g(s^{-1})\,dM_\varphi(s) \sup_{0<st<\infty}\big(g(st)f(st)\big).$$

Предложение 6. *Пусть функция* $g(t)$ *из множества* Φ *удовлетворяет условию*

$$\sigma(g) = \int_1^\infty M_g(s^{-1})s^{-1}ds < \infty.$$

Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$ *из пространства* $\Lambda_{g,\infty}(0,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{0<t<\infty}\big(B_{\text{sign}}f(t)g(t)\big) \le \sigma(g)\sup_{0<t<\infty}\big(f(t)g(t)\big).$$

Доказательство следует из оценки

$$\sup_{0<t<\infty}\left(g(t)\int_t^\infty f(s)s^{-1}ds\right) = \sup_{0<t<\infty}\left(g(t)\int_1^\infty f(st)s^{-1}ds\right) \le$$

$$\le \int_1^\infty M_g(s^{-1})\,dM_\varphi(s) \sup_{0<st<\infty}\big(g(st)f(st)\big).$$

Далее используется следующая теорема об операторах слабого типа $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, доказанная в [10].

Теорема А. *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *удовлетворяют условиям*: $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *возрастает на* $(0,\infty)$, *области значений* $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *и* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *совпадают и если* $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$, *то выполняется неравенство* $\sup\limits_{0<u<1}\big(M_{\varphi_0}(u)(1-\ln u)\big) \le 1$; *функция* $m(t)$ *определяется из соотношения* (3). *Для того чтобы оператор* T *был слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$, *если* $\varphi_1(t) \ne \operatorname{sign} t$, *или для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + L^{\infty,1}(R^n)$, *если* $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$, *и любого* $t > 0$ *выполнялись неравенства*

$$\psi_0(t)\Big(\big[C_{\psi_0} + D_{\psi_1}\big](Tf)^*(t)\Big) \le C\varphi_0(m(t))\Big(\big[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\big]f^*(m(t))\Big) \tag{9}$$

в случае, когда функция $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает, и*

$$\psi_0(t)\Big(\big[C_{\psi_1} + D_{\psi_0}\big](Tf)^*(t)\Big) \le C\varphi_0(m(t))\Big(\big[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\big]f^*(m(t))\Big) \tag{10}$$

в случае, когда функция $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *убывает.*

3. Теоремы интерполяции. Сформулируем и докажем основные утверждения работы. Напомним, что $m(t)$ — решение уравнения (3). В случае, когда функция $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает, а функция $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ возрастает или убывает, $m(t)$ соответственно возрастает или убывает на интервале $(0,\infty)$. Кроме того, поскольку функции из множества Φ положительны и непрерывны на $(0,\infty)$, то и $m(t)$ — положительная и непрерывная функция. Следовательно, существует обратная к ней положительная непрерывная возрастающая или убывающая функция $m^{-1}(t)$.

Теорема 4. *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что* $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *возрастает,* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает, области значений функций* $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *и* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *совпадают. Если для функций* $\psi(t)$, $\varphi(t)$ *из множества* Φ *при некоторых* $a, b \in (0, 1]$, $a < b$, *выполняются условия*

$$\int_0^1 \left[M_{\varphi_1}(z^{-1}) - 1\right]^a dM_\psi(z) + \int_1^\infty M_{\varphi_0}^a(z^{-1}) dM_\psi(z) < \infty,$$
$$\sup_{0<t<\infty} \left(\psi^{1/a}(t)\varphi^{-1/b}(t)\right) < \infty \tag{11}$$

и квазилинейный оператор T *слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a d\psi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b d\varphi(t)\right\}^{1/b}.$$

Доказательство. Вначале отметим, что из условий (11) следует конечность величины

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left\{\int_0^t [\varphi_1(t) - \varphi_1(z)]^a [\varphi_1(z)]^{-a} d\psi(z) + \varphi_0^a(t)\int_t^\infty [\varphi_0(z)]^{-a} d\psi(z)\right\}^{1/a}}{[\varphi(t)]^{1/b}},$$

т. е. выполнены условие теоремы 1 для функций $\varphi_0(t)$, $\psi'(t)$, $\varphi'(t)$ и условие теоремы 2 для функций $\varphi_1(t)$, $\psi'(t)$, $\varphi'(t)$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ из теорем 1 и 2 следует неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\right)^a \psi'(t) dt\right\}^{1/a} \leq M\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b \varphi'(t) dt\right\}^{1/b}. \tag{12}$$

Из существования интеграла, содержащегося в правой части неравенства, следует существование интеграла в левой части неравенства. Тогда подынтегральное выражение и функции $(A_{\varphi_0}) f^*(t)\psi'(t)$, $(B_{\varphi_1}) f^*(t)\psi'(t)$ конечны почти для всех $t \in (0, \infty)$. Учитывая, что $\psi'(t) > 0$ почти для всех t, получаем, что интегралы $\int_0^1 f^*(z) d\varphi_0(z)$ и $\int_1^\infty f^*(z) d\varphi_1(z)$ существуют и $f(z) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$.

Пусть T — оператор слабого типа $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$. Согласно теореме А для любой функции $f(z) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ выполняется либо неравенство (9), либо неравенство (10). Поскольку

$$(Tf)^*(t) \leq C_{\psi_i}(Tf)^*(t) \text{ и } (Tf)^*(t) \leq D_{\psi_i}(Tf)^*(t), \ i = 1, 2, \text{ для всех } t \in (0, \infty),$$

получаем

$$\psi_0(t)[\varphi_0(m(t))]^{-1}(Tf)^*(t) \leq C\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(m(t)) \tag{13}$$

для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$. Так как $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ — непрерывные строго монотонные функции на полуоси $(0, \infty)$, функция $m(t)$

также непрерывная строго монотонная. Следовательно, существует обратная к ней непрерывная строго монотонная функция $m^{-1}(t)$. Перепишем неравенство (13) в виде

$$\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t)) \leq C\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t).$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \left[\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right]^a d\psi(t) \leq C^a \int_0^\infty \left[\left(A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right) f^*(t)\right]^a d\psi(t).$$

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся неравенством (12). Тогда для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ имеем

$$\left\{\int_0^\infty \left[\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right]^a d\psi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b d\varphi(t)\right\}^{1/b}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что* $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *возрастает,* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает, области значений функций* $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *и* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *совпадают. Если функция* $\varphi(t)$ *из* Φ *при* $a \in (0, 1]$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \left[M_{\varphi_1}(t^{-1}) - 1\right]^a dM_\varphi(t) + \int_1^\infty M_{\varphi_0}^a(t^{-1}) dM_\varphi(t) < \infty$$

и квазилинейный оператор T *слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}.$$

Теорема 5. *Пусть* $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$ *и функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что выполнено неравенство* $\sup\limits_{0<u<1} (M_\varphi(u)(1 - \ln u)) \leq 1$, *функция* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает и ее множеству значений принадлежит интервал* $(0, \infty)$. *Если функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *из множества* Φ *при некоторых* $a, b \in (0, 1]$, $a < b$, *удовлетворяют условиям*

$$\int_0^1 \ln^a \frac{1}{t} dM_\psi(\tau) + \int_1^\infty M_{\varphi_0}^a(\tau^{-1}) dM_\psi(\tau) < \infty,$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left(\psi^{1/a}(t)\varphi^{-1/b}(t)\right) < \infty \tag{14}$$

и квазилинейный оператор T *слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a d\psi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b d\varphi(t)\right\}^{1/b}.$$

Доказательство. Из условий (14) получаем конечность величины

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left\{\int_0^t \left[\ln \frac{t}{z}\right]^a d\psi(z) + \varphi_0^a(t) \int_t^\infty [\varphi_0(z)]^{-a} d\psi(z)\right\}^{1/a}}{[\varphi(t)]^{1/b}},$$

откуда следует выполнение условия теоремы 1 для функций $\varphi_0(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ и условия теоремы 3 для функций $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Тогда из теорем 1 и 3 следует неравенство (12) для произвольной функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$.

Из существования интеграла, содержащегося в правой части (12), вытекает существование интеграла в левой части и конечность почти для всех $t \in (0, \infty)$ функций $(A_{\varphi_0}) f^*(t)$ и $(B_{\varphi_1}) f^*(t)$. Следовательно, $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + L^{\infty,1}(R^n)$. Пусть T — оператор слабого типа $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$. Применяя теорему А для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + L^{\infty,1}(R^n)$ и учитывая неравенства

$$(Tf)^*(t) \le C_{\psi_i}(Tf)^*(t) \quad \text{и} \quad (Tf)^*(t) \le D_{\psi_i}(Tf)^*(t), \quad i = 1, 2,$$

получаем для всех $t \in (0, \infty)$ и для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ оценку

$$\psi_0(t)[\varphi_0(m(t))]^{-1}(Tf)^*(t) \le C\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(m(t)). \tag{15}$$

Как отмечалось при доказательстве теоремы 4, из условия теоремы 5 вытекает, что функция $m(t)$ непрерывная строго монотонная и, следовательно, существует обратная к ней непрерывная строго монотонная функция $m^{-1}(t)$. Перепишем (15) в виде

$$\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t)) \le C\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t).$$

Отсюда получаем

$$\int_0^\infty \left[\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)\right]^a d\psi(t) \le C^a \int_0^\infty \left[\left(A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right) f^*(t)\right]^a d\psi(t).$$

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся неравенством (12). Тогда для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,b}(R^n)$ имеем

$$\left\{\int_0^\infty \left[\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right]^a d\psi(t)\right\}^{1/a} \le C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b d\varphi(t)\right\}^{1/b}.$$

Теорема доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть* $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$ *и функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что выполнено неравенство* $\sup\limits_{0<u<1} M_{\varphi_0}(u)(1-\ln u) \le 1$, *функция* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает и ее множеству значений принадлежит интервал* $(0, \infty)$. *Если функция* $\varphi(t) \in \Phi$ *и при* $a \in (0, 1]$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \left[\ln \frac{1}{u}\right]^a dM_\varphi(u) + \int_1^\infty M_{\varphi_0}^a(u^{-1})\,dM_\varphi(u) < \infty$$

и квазилинейный оператор T *слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}.$$

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что* $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *возрастает и* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает, области значений функций* $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ *и* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *совпадают. Если функция* $\varphi(t)$ *из множества* Φ *такова, что для некоторого* $a \in [1, \infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \left[M_\varphi(u^{-1})\right]^{1/a} dM_{\varphi_0}(u) + \int_1^\infty \left[M_\varphi(u^{-1})\right]^{1/a} dM_{\varphi_1}(u) < \infty, \tag{16}$$

и T *— квазилинейный оператор слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left[\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)\right]^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \leq C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}.$$

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 4. Вначале доказываем, что из условия (16) и абсолютной непрерывности функции $\varphi(t)\,(\neq \operatorname{sign} t)$ на каждом конечном отрезке $[0, t] \in [0, \infty)$ следуют условия предложения 1 для функций $\varphi_0(t)$, $\varphi'(t)$ и условия предложения 2 для функций $\varphi_1(t)$, $\varphi'(t)$. Затем, применяя эти предложения, получаем неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \leq M\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}, \tag{17}$$

из которого следует конечность интегралов $\int_0^1 f^*(z)\,d\varphi_0(z)$, $\int_0^1 f^*(z)\,d\varphi_1(z)$ для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$. Тогда функция $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$. Далее, из условия теоремы об операторе T и теоремы А получаем неравенство

$$\int_0^\infty \left[\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)\right]^a d\varphi(t) \leq C^a \int_0^\infty \left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\right)^a d\varphi(t).$$

Применяя для оценки интеграла в правой части полученное неравенство (17), завершаем доказательство теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$, *и функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *из множества* Φ *таковы, что* $\varphi_0(t) \neq \operatorname{sign} t$, *выполнено неравенство* $\sup\limits_{0<u<1} M_{\varphi_0}(u)(1 - \ln u) \leq 1$, *функция* $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ *возрастает или убывает и ее множество значений есть* $(0, \infty)$. *Если функция* $\varphi(t)$ *из множества* Φ *при* $a \in [1, \infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \left[M_\varphi(u^{-1})\right]^{1/a} dM_{\varphi_0}(u) + \int_1^\infty M_\varphi^{1/a}(u^{-1})\,u^{-1}du < \infty \tag{18}$$

и квазилинейный оператор T *слабого типа* $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$, *то существует такая константа* $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \le C\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5. Вначале доказываем, что из условия (18) и абсолютной непрерывности функции $\varphi(t)$ $(\neq \operatorname{sign} t)$ на каждом конечном отрезке $[0, t] \in [0, \infty)$ следуют условия предложения 1 для функций $\varphi_0(t)$, $\varphi'(t)$ и условие предложения 3 для функции $\varphi'(t)$. Затем с помощью предложений 1, 3 получаем неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a} \le M\left\{\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^a d\varphi(t)\right\}^{1/a}, \tag{19}$$

из которого следует конечность интегралов $\int_0^1 f^*(z)\,d\varphi_0(z)$, $\int_0^1 f^*(z)z^{-1}dz$ для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$. Это означает, что $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + L^{\infty,1}(R^n)$. Далее из условия теоремы, накладываемого на оператор T, и теоремы А получаем неравенство

$$\int_0^\infty \left[\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)\right]^a d\varphi(t) \le C^a \int_0^\infty \left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\right)^a d\varphi(t).$$

Применяя для оценки интеграла в правой части неравенство (19), доказываем теорему.

Теорема 8. *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *и оператор* T *удовлетворяют условиям теоремы* 6. *Если функция* $\varphi(t) \in \Phi$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 M_\varphi(u^{-1})\,dM_{\varphi_0}(u) + \int_1^\infty M_\varphi(u^{-1})\,dM_{\varphi_1}(u) < \infty, \tag{20}$$

то существует такая постоянная $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,\infty}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}\varphi(t)(Tf)^*(m^{-1}(t))\right) \le C \sup_{0<t<\infty}\left(\varphi(t) f^*(t)\right).$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 6. Из условия (20) и предложений 4, 5 для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,\infty}(R^n)$ получаем неравенство

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\left(A_{\varphi_0}(f)^*(t) + B_{\varphi_1}(f)^*(t)\right)\varphi(t)\right) \le C \sup_{0<t<\infty}\left(f^*(t)\varphi(t)\right).$$

Далее из теоремы А следует

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}\varphi(t)(Tf)^*(m^{-1}(t))\right) \le C \sup_{0<t<\infty}\left(\left[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\right] f^*(t)\varphi(t)\right).$$

Из доказанных неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 9. *Пусть для функций* $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ *и оператора* T *выполняются условия теоремы* 7. *Если функция* $\varphi(t)$ *из множества* Φ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 M_\varphi(s^{-1})\,dM_{\varphi_0}(s) + \int_1^\infty M_\varphi(s^{-1})s^{-1}ds < \infty, \tag{21}$$

то существует такая постоянная $C > 0$, *что для всех функций* $f(x) \in$ $\in \Lambda_{\varphi,\infty}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{0<t<\infty} \Big(\varphi(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}\varphi(t)(Tf)^*(m^{-1}(t))\Big) \le C \sup_{0<t<\infty} \Big(\varphi(t) f^*(t)\Big).$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7. Из условия (21) и предложений 4, 6 следует неравенство

$$\sup_{0<t<\infty} \Big(\Big(A_{\varphi_0} f^*(t) + B_{\varphi_1} f^*(t)\Big)\varphi(t)\Big) \le C \sup_{0<t<\infty} \Big(f^*(t)\varphi(t)\Big)$$

для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,\infty}(R^n)$. Далее, из теоремы A имеем

$$\sup_{0<t<\infty} \Big(\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1}\varphi(t)(Tf)^*(m^{-1}(t))\Big) \le$$

$$\le C \sup_{0<t<\infty} \Big(\Big[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}\Big] f^*(t)\varphi(t)\Big).$$

Из доказанных неравенств получаем утверждение теоремы 9.

1. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and theorem of Marcinkiewich // Stud. math. – 1966. – **26**. – P. 273 – 299.
2. *Boyd D. W.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Can. Math. J. – 1969. – **21**. – P. 1245 – 1254.
3. *Sharpley R. C.* Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation // J. Funct. Anal. – 1972. – № 11. – P. 479 – 513.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Павлов Е. А.* К оператору Кальдерона // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 1. – С. 52 – 58.
6. *Benett C., Rudnick K.* On Lorentz – Zygmund spaces. – Warszawa: Państw. wydawn. nauk., 1980. – 73 p.
7. *Буренков В. И., Гольдман М. Л.* Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1995. – **210**. – С. 65 – 89.
8. *Стейн Е., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
10. *Пелешенко Б. И.* Об операторах слабого типа // Праці Укр. мат. конгресу-2001. Функціон. аналіз. – Київ, 2002. – С. 234 – 244.

Получено 03.02.2004,
после доработки — 08.02.2005