УДК 517.95

М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна (Львів. нац. ун-т)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИРОДЖЕННЯМ

We consider an inverse problem of the determination of time-dependent heat conduction coefficient which vanishes at the initial time. We establish conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of the problem considered.

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта температуропровідності, який дорівнює нулю у початковий момент часу. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі.

До параболічних рівнянь з виродженням зводиться ряд практично важливих задач, серед яких задача про опріснення морських вод, рух рідин і газів у пористому середовищі, явища в плазмі [1, 2] та ін. Прямі задачі для параболічних рівнянь з виродженням досліджувались багатьма авторами [3 – 11]. Проте оберненим задачам для цього практично важливого класу задач приділялось мало уваги. Серед останніх можна було б відзначити задачу визначення вільного члена в еліптичному рівнянні з виродженням [12].

У даній роботі досліджується обернена задача для рівняння теплопровідності, в якому невідомий залежний від часу коефіцієнт температуропровідності прямує до нуля при $t \to 0$ за степеневим законом. Розглянуто випадок слабкого виродження, для якого знайдено умови існування та єдиності гладкого (класичного) розв'язку.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $Q_T \equiv \{(x,t): 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядаємо рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0$, $t \in (0, T]$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Під розв'язком задачі (1) – (4) розуміємо пару функцій $(a(t), u(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, таких, що існує границя $\lim\limits_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta} > 0$, де $0 < \beta < 1$ — задане число, і задовольняються рівняння (1) та умови (2) – (4).

Отримані умови існування та єдиності розв'язку задачі (1) – (4) сформульовано у наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*:

1) $\varphi \in C^1[0,h]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1, 2$, $\mu_3 \in C[0,T]$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $\mu_1'(t) \le 0$, $\mu_2'(t) \ge 0$, $t \in [0,T]$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, *існує границя* $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)}{t^\beta} > 0$, $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$.

Тоді існує розв'язок задачі (1) – (4).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

1) $\varphi \in C^2[0, h]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $\dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta} \neq 0$, $t \in (0, T]$.

Тоді розв'язок задачі (1) – (4) *є єдиним.*

2. Доведення теореми існування розв'язку. Позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau)$, $k = 1, 2$, функції Гріна першої та другої крайової задачі для рівняння (1), які мають вигляд

$$G_k(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \tag{5}$$

де $\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$. Тимчасово вважаючи функцію $a(t)$ відомою, розв'язок задачі (1) – (3) подамо у вигляді

$$u(x, t) = \int_0^h G_1(x, t, \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x, t, 0, \tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\xi}(x, t, h, \tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{6}$$

Для підстановки в умову перевизначення продиференціюємо цей вираз. Використовуючи властивості функції Гріна

$$G_{1x}(x, t, \xi, \tau) = -G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau), \qquad G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau) = -\frac{G_{2\tau}(x, t, \xi, \tau)}{a(\tau)}, \tag{7}$$

інтегруючи частинами і беручи до уваги умови узгодженості, знаходимо

$$u_x(x, t) = \int_0^h G_2(x, t, \xi, 0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(x, t, 0, \tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_2(x, t, h, \tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x, t, \xi, \tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Підставивши цей вираз в умову перевизначення (4), отримаємо рівняння щодо $a(t)$:

$$a(t) = \mu_3(t)\left(\int_0^h G_2(0, t, \xi, 0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(0, t, 0, \tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t G_2(0, t, h, \tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(0, t, \xi, \tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau \right)^{-1}, \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Отже, обернену задачу (1) – (4) зведено до рівняння (8). Для доведення існування розв'язку рівняння (8) застосуємо до нього теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Встановимо оцінки розв'язків рівняння (8). Враховуючи умови теореми та рівність

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\,d\xi = 1, \tag{9}$$

яку легко перевірити, виходячи з означення (5) функції Гріна, маємо

$$\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)\,d\xi \geq \min_{[0,h]}\varphi'(x)\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\,d\xi = \min_{[0,h]}\varphi'(x).$$

Тоді отримаємо оцінку для $a(t)$ зверху:

$$a(t) \leq \frac{\mu_3(t)}{\min\limits_{[0,h]}\varphi'(x)} \leq A_1 t^\beta, \tag{10}$$

де A_1 — додатна стала.

Для оцінки функції $a(t)$ знизу спочатку оцінимо кожний доданок знаменника (8). Враховуючи (9), знаходимо

$$\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)\,d\xi \leq \max_{[0,h]}\varphi'(x).$$

З обмеженості функції $G_2(0,t,h,\tau)$ маємо

$$\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau \leq C_1.$$

Нерівність для функції Гріна [13]

$$G_2(0,t,0,\tau) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} + C_2$$

дає можливість встановити оцінку

$$\left|\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau\right| \leq C_3\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_4$$

з відомими сталими $C_3, C_4 > 0$. Використавши властивості функції Гріна, оцінимо останній інтеграл з (8):

$$\int_0^t\int_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \leq \max_{\overline{Q}_T} f(x,t)\int_0^t\int_0^h\Big(-G_{2\xi}(0,t,\xi,\tau)\Big)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \max_{\overline{Q}_T} f(x,t)\int_0^t\big(G_2(0,t,0,\tau)-G_2(0,t,h,\tau)\big)\,d\tau \leq C_5\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Отже, функція $a(t)$ обмежена знизу виразом

$$a(t) \geq \frac{\mu_3(t)}{C_6 + C_7\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}. \tag{11}$$

Введемо позначення

$$a_0(t) = \frac{a(t)}{t^\beta}, \qquad \min_{[0,T]} a_0(t) = a_{\min}, \qquad \mu_0(t) = \frac{\mu_3(t)}{t^\beta}. \tag{12}$$

Згідно з цими позначеннями з (11) отримаємо

$$a_0(t)t^\beta \geq \frac{\mu_0(t)t^\beta}{C_6 + C_7\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\int_\tau^t a_0(\sigma)\sigma^\beta\,d\sigma}}} \geq \frac{\mu_0(t)t^\beta}{C_6 + C_7\sqrt{\dfrac{\beta+1}{a_{\min}}}\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}}.$$

Виконавши в інтегралі заміну змінних $z = \frac{\tau}{t}$, одержимо

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} = t^{\frac{1-\beta}{2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\beta+1}}} \le C_8, \quad t \in [0, T].$$

Повертаючись до оцінки $a(t)$ знизу, приходимо до нерівності

$$a_0(t) \ge \frac{C_9}{C_6 + \frac{C_{10}}{\sqrt{a_{\min}}}}.$$

Нерівність справджується для всіх $t \in [0, T]$, відповідно для $a_{\min}$ отримуємо нерівність

$$C_6 a_{\min} + C_{10}\sqrt{a_{\min}} - C_9 \ge 0,$$

з якої знаходимо

$$a_{\min} \ge \left(\frac{2C_9}{\sqrt{C_{10}^2 + 4C_6 C_9} + C_{10}} \right)^2 \equiv A_0 > 0.$$

Отже, для функції $a(t)$ виконується нерівність

$$a(t) \ge A_0 t^{\beta}, \quad t \in [0, T], \tag{13}$$

де A_0 — відома стала.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t \to +0} \frac{a(t)}{t^{\beta}} > 0$. Для цього скористаємося формулами (12), які підставимо в умову перевизначення

$$a_0(t) = \frac{\mu_0(t)}{u_x(0, t)}.$$

Існування потрібної границі залежить від існування $\lim\limits_{t \to +0} u_x(0, t)$. З умов теореми, властивостей інтеграла Пуассона та встановлених вище оцінок випливає існування границі

$$\lim_{t \to +0} \int_0^h G_2(0, t, \xi, 0)\varphi'(\xi)\, d\xi = \varphi'(0).$$

Отже,

$$\lim_{t \to +0} \frac{a(t)}{t^{\beta}} = \lim_{t \to +0} a_0(t) = \lim_{t \to +0} \frac{\mu_0(t)}{u_x(0, t)} = \frac{\mu_0(t)}{\varphi'(0)} > 0.$$

Визначимо множину $\mathcal{N} = \left\{ a(t) \in C[0,T] : A_0 \le \frac{a(t)}{t^{\beta}} \le A_1 \right\}$. Розглянемо (8) як операторне рівняння $a(t) = Pa(t)$ щодо $a(t)$ з оператором P, який визначається рівністю $Pa(t) = \frac{\mu_3(t)}{u_x(0, t)}$ і, згідно з оцінками (10), (13), відображає множину $\mathcal{N}$ в себе. Покажемо, що оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$. Згідно з теоремою Арцела, встановимо одностайну неперервність множини $\mathcal{N}$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і визначимо існування такого $\delta > 0$, що

$$\left| Pa(t_2) - Pa(t_1) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \left| t_2 - t_1 \right| < \delta. \tag{14}$$

Зважаючи на те, що

$$\left|Pa(t_2) - Pa(t_1)\right| = \left|\frac{\mu_3(t_2)}{u_x(0,t_2)} - \frac{\mu_3(t_1)}{u_x(0,t_1)}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\mu_3(t_2)-\mu_3(t_1)}{u_x(0,t_2)}\right| + \left|\frac{\mu_3(t_1)\left(u_x(0,t_2)-u_x(0,t_1)\right)}{u_x(0,t_2)u_x(0,t_1)}\right|,$$

і беручи до уваги оцінку $|u_x(0,t)| \ge \min\limits_{[0,h]} \varphi'(x) \equiv M_1 > 0$, нерівність (14) доводимо так само, як і в невиродженому випадку [13].

Отже, умови теореми Шаудера для рівняння (8) виконуються, і тому існує розв'язок $a = a(t)$ рівняння (8) з класу $C[0,T]$, який задовольняє оцінки (10), (13) і для якого існує додатна границя $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{a(t)}{t^\beta}$. Підставляючи його в рівняння (1), за формулою (6) знаходимо функцію $u = u(x,t)$, яка, як це випливає з доведення теореми, має потрібну гладкість.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Теорема 1 поширюється і на випадок $\beta = 1$, у чому легко переконатись, повторивши її доведення. Крім цього, теорема 1 залишається справедливою, якщо замість аналогічних умов теореми припустити, що $\varphi'(x) \ge \ge 0$, $x \in [0,h]$, $\mu_1'(t) < 0$, $t \in [0,T]$. Оцінка знаменника рівняння (8) матиме вигляд

$$u_x(0,t) \ge -\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \min_{[0,T]}(-\mu_1'(t)) \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \ge$$

$$\ge C_{11}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}} = C_{11}\frac{\pi}{2} > 0.$$

Інші міркування з доведення теореми 1 залишаються без змін.

3. Доведення теореми єдиності розв'язку. Припустимо, що існують два розв'язки $\left(a_i(t), u_i(x,t)\right)$, $i = 1, 2$, задачі (1)–(4). Для різниці розв'язків $a(t) \equiv \equiv a_1(t) - a_2(t)$, $u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо задачу

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a(t)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{16}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

$$a_1(t)u_x(0,t) = -a(t)u_{2x}(0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)$ розв'язок задачі (15)–(17) подамо у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{19}$$

Підставляючи (19) в умову (18), отримуємо інтегральне рівняння щодо $a(t)$:

$$a(t)u_{2x}(0,t) = -a_1(t)\int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau)a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Подамо $a(t)$ у вигляді (12). Тоді рівняння (20) перепишеться так:

$$a_0(t) = -\frac{a_1(t)}{t^\beta u_{2x}(0,t)}\int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau)a_0(\tau)\tau^\beta u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{21}$$

або

$$a_0(t) = \int_0^t K(t,\tau)a_0(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{22}$$

де

$$K(t,\tau) = -\frac{a_1(t)\tau^\beta}{t^\beta u_{2x}(0,t)}\int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi.$$

Встановимо оцінку для ядра $K(t,\tau)$. Для цього запишемо розв'язок $u_2(x,t)$ задачі (1)–(3) у вигляді (6), використавши функцію Гріна $G_1^{(2)}$ для рівняння $u_t = a_2(t)u_{xx}$. Взявши до уваги властивості функції Гріна (7) та проінтегрувавши частинами, знайдемо

$$u_{2xx}(x,t) = \int_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)(f(h,\tau) - \mu_2'(\tau))d\tau - \int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau) f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{23}$$

Оцінимо кожний доданок формули (23). Враховуючи (9), знаходимо

$$\left|\int_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\right| \le \max_{[0,h]}|\varphi''(x)|.$$

Використовуючи зображення функції Гріна (5), отримуємо

$$\left|\int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau))d\tau\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\max_{[0,T]}|\mu_1'(t) - f(0,t)| \times$$

$$\times \int_0^t \frac{1}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x+2nh)\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)d\tau.$$

Виділимо доданок, що відповідає $n = 0$, і розглянемо інтеграл

$$I_1 \equiv \int_0^t \frac{x}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)d\tau.$$

З означення функції $\theta(t)$ та властивостей функції $a_2(t)$ отримуємо

$$I_1 \le C_1\int_0^t \frac{x}{\left(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{C_2\left(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}\right)}\right)d\tau.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну змінних $z = \dfrac{x}{\sqrt{C_2(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}}$. Тоді

$$I_1 \le C_3 \int_{\frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}}^{\infty} \frac{\exp(-z^2)dz}{\left(t^{\beta+1} - \dfrac{x^2}{C_2 z^2}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} =$$

$$= \frac{C_3}{t^\beta}\int_{\frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}}^{\infty} \frac{z^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\exp(-z^2)dz}{\left(z - \dfrac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left(z + \dfrac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \le$$

$$\leq \frac{C_3}{t^\beta} \int\limits_{\frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}}^{\infty} \frac{z^{\frac{\beta}{\beta+1}} \exp(-z^2)\, dz}{\left(z - \frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}.$$

Заміною $z - \frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}} = y$ зведемо оцінку I_1 до вигляду

$$I_1 \leq \frac{C_3}{t^\beta} \int\limits_0^\infty y^{-\frac{\beta}{\beta+1}} \left(y + \frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \exp\left(-\left(y + \frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^2\right) dy.$$

Використаємо нерівність $x^p e^{-qx^2} \leq C_{p,q}$, $x \geq 0$, $p \geq 0$, $q > 0$. Тоді

$$I_1 \leq \frac{C_4}{t^\beta} \int\limits_0^\infty y^{-\frac{\beta}{\beta+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{x}{\sqrt{C_2 t^{\beta+1}}}\right)^2\right) dy \leq \frac{C_4}{t^\beta} \int\limits_0^\infty y^{-\frac{\beta}{\beta+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leq \frac{C_5}{t^\beta}.$$

Аналогічно до попереднього маємо

$$\left| \int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)(f(h,\tau) - \mu_2'(\tau))\, d\tau \right| \leq \frac{C_6}{t^\beta}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x, t, \xi, \tau)\, f_\xi(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \right| \leq \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \max_{\overline{Q}_T} |f_x(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{1}{(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))^{3/2}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|x - \xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right) + |x + \xi + 2nh| \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right) d\xi\, d\tau \equiv I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Заміною $z = \frac{x - \xi + 2nh}{2\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}$ перетворимо $I_{2,1}$:

$$I_{2,1} \leq C_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \int\limits_{\frac{x+(2n-1)h}{2\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}}^{\frac{x+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}} |z| \exp\left(-z^2\right) dz \leq$$

$$\leq C_7 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z| \exp\left(-z^2\right) dz \leq C_8 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \leq C_9\, t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Аналогічно оцінюємо $I_{2,2}$. Остаточно отримуємо оцінку

$$|u_{2xx}(x, t)| \leq \frac{C_{10}}{t^\beta}, \quad (x, t) \in [0, h] \times (0, T]. \tag{24}$$

Подамо $a_1(t)$ у вигляді $a_1(t) = a_{01}(t)\, t^\beta$. З умови перевизначення (4) та припущень теореми маємо

$$u_{2x}(0, t) = \frac{\mu_3(t)}{a_2(t)} \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Враховуючи це, а також оцінку (24), встановлюємо оцінку ядра інтегрального рівняння (22)

$$\left| K(t,\tau) \right| \le \frac{C_{11}}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}}.$$

Тоді

$$\int_0^t |K(t,\tau)| d\tau \le C_{12} t^{\frac{1-\beta}{2}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}, \tag{25}$$

тобто ядро $K(t,\tau)$ є інтегровним. За властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду рівняння (22) має лише тривіальний розв'язок $a_0(t) \equiv \equiv 0$. Звідси $a(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$, і $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, як розв'язок однорідної задачі (15) – (17).

Теорему 2 доведено.

Зауваження. **2.** Згідно з оцінкою (25), доведення теореми 2 не поширюється на випадок $\beta = 1$.

3. Якщо в теоремі 1 припустити, що $\varphi \in C^2[0, h]$, то, повторюючи доведення теореми 1 та використовуючи вигляд другої похідної $u_{xx}(x,t)$ з доведення теореми 2, легко переконатись, що задача (1) – (4) має розв'язок $(a(t), u(x,t))$, компонента $a(t)$ має такі ж властивості, що й у теоремі 1, а друга компонента $u(x,t)$ належить до класу $C^{2,1}([0,h] \times (0,T])$, причому функції $u_t(x,t)$, $t^\beta u_{xx}(x,t)$ є неперервними в $\overline{Q}_T$.

1. *Подгаев А. Г.* О краевых задачах для некоторых квазилинейных параболических уравнений с неклассическим вырождением // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 2. – С. 129 – 139.
2. *Caffarelli L. A., Friedman A.* Continuity of the density of a gas flow in a porous medium // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **252**. – P. 99 – 113.
3. *Глушко В. П.* Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 11. – С. 1957 – 1966.
4. *Калашников А. С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 2. – С. 171 – 178.
5. *Калашников А. С.* Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. – 1971. – № 2. – С. 42 – 48.
6. *Калашников А. С.* Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. II // Там же. – № 3. – С. 3 – 9.
7. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. „Мат. анализ. 1969" / ВИНИТИ. – 1971. – С. 7 – 252.
8. *Джураев Т. Д.* О краевых задачах для линейных параболических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 5. – С. 643 – 652.
9. *Глушко В. П.* О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка с вырождением // Докл. АН СССР. – 1972. – **207**, № 2. – С. 266 – 269.
10. *Глушак А. В., Шмулевич С. Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 6. – С. 1065 – 1068.
11. *Возняк О. І., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Допов. НАН України. – 1994. – № 6. – С. 7 – 11.
12. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функцион. анализа в уравнениях мат. физики. – Новосибирск, 1987. – С. 66 – 71.
13. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publ., 2003. – 238 p.

Одержано 15.07.2004