УДК 519.21

М. В. Карташов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗАГАЛЬНЕ НЕОДНОРІДНЕ ЗА ЧАСОМ ОБМЕЖЕНЕ ЗБУРЕННЯ СИЛЬНО НЕПЕРЕРВНОЇ НАПІВГРУПИ

We consider an evolution family with generator formed by a time-dependent bounded perturbation of a strongly continuous semigroup. We do not use the condition of the continuity of perturbation. We prove the formula of variation of a parameter and also the corresponding generalization of the Dyson – Phillips theorem.

Розглядається еволюційна сім'я з генератором, утвореним неоднорідним за часом обмеженим збуренням сильно неперервної напівгрупи. Умова неперервності збурення не застосовується. Доведено формулу варіації параметра, а також відповідне узагальнення теореми Дайсона – Філліпса.

1. Вступ. Основні поняття теорії напівгруп наведено у роботі [1]. Книга [2, с. 445 – 462] містить огляд результатів теорії збурення сильно неперервних еволюційних сімей, що розроблені у [3] та інших роботах. Ці результати суттєво спираються на відносну неперервність функції збурення (див. теорему 9.17 у [2]).

У теорії стійкості стохастичних моделей таке припущення виглядає не дуже доречним. Наприклад, розглянемо неоднорідне за часом узагальнення класичного процесу ризику з генератором

$$A_t f(x) = c f'(x) + \lambda(t) \int_{-\infty}^{x} f(x-y)\, dG(y) - \lambda(t) f(x),$$

де c — інтенсивність премій, G — розподіл страхових виплат, а $\lambda(\cdot)$ — інтенсивність неоднорідного пуассонівського потоку страхових вимог. Якщо ми розглянемо як основний (незбурений) однорідний класичний процес ризику, неперервність збурення зведеться до неперервності інтенсивності $\lambda(\cdot)$. Це припущення видається обмежувальним.

Еволюційні сім'ї з розривними обмеженими та необмеженими генераторами розглядались у роботі [4], але відповідні результати отримано лише для сепарабельних рефлексивних банахових просторів. Крім того, задача збурення у [4] не розглядалась.

Основи теорії неоднорідних за часом процесів Маркова викладено у книзі [5]. Деякі результати стійкості для загальних ланцюгів Маркова з дискретним часом розглянуто у [6].

2. Означення. Нехай X — банахів простір з дуальним простором $Y \subset X'$, тобто банаховим підпростором спряженого простору X', та з дуальною формою $\langle y, x \rangle = y(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, такою, що

$$\| x \| = \sup\left(\langle y, x \rangle,\ \| y \| \le 1,\ y \in Y\right). \tag{1}$$

Позначимо через $L(X)$ банахів простір лінійних обмежених операторів на X. Для кожного $B \in L(X)$ позначимо через B' спряжений до B оператор на X'.

Нехай $T = [0, a]$ — скінченний інтервал у $\mathbb{R}$. Сім'я $(Q_t, t \in T) \subset L(X)$ є *обмеженою напівгрупою*, якщо

$$Q_{t+s} = Q_t Q_s \quad \forall t, s, t+s \in T, \quad \text{і} \quad \sup_{t \in T} \| Q_t \| < \infty. \tag{2}$$

Ця сім'я є *сильно неперервною,* якщо

$$\| Q_s x - x \| \to 0, \quad s \to 0, \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

Генератор A такої напівгрупи визначається на щільній області визначення $D(A) \subset X$ як

$$Ax = \lim_{h \to 0} h^{-1}(Q_h x - x) \qquad \forall x \in D(A), \tag{4}$$

де границя обчислюється у нормі простору X.

Позначимо $T_2 = \{(s, t),\ s, t \in T,\ s \le t\}$. Сім'я $\big(P_{st}, (s, t) \in T_2\big) \subset L(X)$ є *обмеженою еволюційною сім'єю,* якщо

$$P_{su}P_{ut} = P_{st}, \qquad s \le u \le t, \qquad s, u,\ t \in T, \qquad \text{та} \qquad \sup_{(s,t) \in T_2} \| P_{st} \| < \infty. \tag{5}$$

Інфінітезимальну функцію цієї еволюції визначено як

$$A_t x = \lim_{u \uparrow t, v \downarrow t}(v - u)^{-1}(P_{uv}x - x) \qquad \forall x \in D(A_t) \qquad \forall t \in T, \tag{6}$$

де на границі ∂T має використовуватись одностороння границя.

Означення. *Обмежена сильно неперервна еволюційна сім'я* $\big(P_{st}, (s, t) \in$ $\in T_2 \big)$ *є квазіоднорідною, якщо існують обмежена сильно неперервна напівгрупа* $(Q_t, t \in T)$ *з генератором* $\big(A, D(A)\big)$, *обмежена операторна функція збурень* $(D_t, y \in T)$, *а також щільний підпростір* $X_0 \subset X$ *такі, що*

$$X_0 \subset D(A), \qquad Q_s X \subset X_0, \qquad s > 0, \qquad X_0 \subset D(A_t) \qquad \forall t \in T,$$
$$A_t = A + D_t \qquad \text{на} \qquad X_0 \qquad \forall t \in T. \tag{7}$$

Напівгрупа $(Q_t, t \in T)$ *називається базовою для еволюції* $\big(P_{st}, (s, t) \in T_2\big)$.

Зауваження. Умова (7) еквівалентна умові

$$\forall t \in T \qquad \forall x \in X_0 \qquad \exists \lim_{u \uparrow t, v \downarrow t}(v - u)^{-1}(P_{uv}x - Q_{v-u}x) \equiv D_t x \in X, \tag{8}$$

де границя обчислюється у нормі простору X.

Спряжена $\big(P'_{st}, (s, t) \in T_2\big) \subset L(X')$ еволюційна сім'я є *сильно неперервною,* якщо

$$\| P'_{uv}y - y \| \to 0, \qquad u \uparrow t, \qquad v \downarrow t \qquad \forall y \in Y, \qquad t \in T. \tag{9}$$

Вимірність дійснозначних функцій будемо розуміти як вимірність за Лебегом.

Нехай сім'я $(m_t, t \in T) \subset X'$ така, що функції $\langle m_t, x \rangle : T \to \mathbb{R}$ обмежені та вимірні для всіх $x \in X$. Визначимо *слабкий інтеграл* $\int_s^t m_u\, du = I_s^t(m)$ як такий елемент X', що

$$\big\langle I_s^t(m), x \big\rangle = \int_s^t \langle m_u, x \rangle du \qquad \forall x \in X.$$

Для сім'ї $(f_t, t \in T) \subset X$ *дуальний слабкий інтеграл* $I_s^t(f)$ є таким елементом X'', що

$$\big\langle y, I_s^t(f) \big\rangle = \int_s^t \langle y, f_u \rangle du \qquad \forall y \in X'.$$

3. Результати.

Теорема 1 (формула варіації параметра). *Нехай квазіоднорідна еволюційна сім'я* $(P_{st}, s, t \in T,\ s \le t)$ *має базову напівгрупу* $(Q_t, t \in T)$ *і відповідну обмежену операторну функцію збурень* $(D_t, t \in T)$. *Тоді для всіх* $y \in Y$ *має місце рівняння*

$$P'_{st}y \;=\; Q'_{t-s}y \;+\; \int_s^t (P_{su}D_uQ_{t-u})'\,y\,du, \tag{10}$$

де слабкий інтеграл у правій частині визначено коректно.

Теорема 2 (ряд Дайсона – Філліпса). *Нехай* $(P_{st},\, s,\, t\in T,\;\; s\leq t)$ — *квазіоднорідна еволюційна сім'я з базовою напівгрупою* $(Q_t,\, t\in T)$ *та з обмеженою операторною функцією* $(D_t,\, t\in T)$. *Якщо спряжена еволюційна сім'я сильно неперервна, то для всіх* $y\in Y$ *та для кожного фіксованого* $s\in T$ *має місце зображення*

$$P'_{st}y \;=\; \sum_{n\geq 0} U_n(s,t)y, \tag{11}$$

де ряд сильно збігається, а його складові визначаються рекурентно

$$U_0(s,t)y \;=\; Q'_{t-s}y, \tag{12}$$

$$U_{n+1}(s,t)y \;=\; \int_s^t (D_uQ_{t-u})'U_n(s,u)\,y\,du, \qquad n\;\geq\;0. \tag{13}$$

Теорема 3 (дуальна формула варіації параметра). *Нехай* $(P_{st},\, s,\, t\in T,\;\; s\leq t)$ — *квазіоднорідна еволюційна сім'я з базовою напівгрупою* $(Q_t,\, t\in T)$ *та з обмеженою операторною функцією* $(D_t,\, t\in T)$. *Якщо спряжена еволюційна сім'я сильно неперервна, то для всіх* $x\in X$

$$P_{st}x \;=\; Q_{t-s}x \;+\; \int_s^t Q_{u-s}D_uP_{ut}x\,du. \tag{14}$$

4. Доведення. Визначимо

$$p(t) \;=\; \sup_{u\leq v\leq t}\|P_{uv}\| \;<\; \infty,$$

$$q(t) \;=\; \sup_{s\leq t}\|Q_s\| \;<\; \infty, \qquad \varepsilon(t) \;=\; \sup_{s\leq t}\|D_s\| \;<\; \infty, \tag{15}$$

де скінченність випливає з означення обмеженої еволюційної сім'ї та з квазіоднорідності.

Лема 1. *Справедливі такі твердження*:

a) $Q_tx\in D(A)$ *та* $AQ_tx=Q_tAx\quad \forall x\in X_0\quad \forall t\in T$;

b) *для будь-якого* $x\in X$ *функція* $Q_tx: T\to X$ *є сильно неперервною*;

c) *для будь-якого* $x\in X$ *функція* $P_{uv}x: T_2\to X$ *є сильно неперервною у точці* $(t,t): P_{uv}x\to x,\; u\uparrow t,\; v\downarrow t,\quad \forall t\in T$;

d) *для будь-якого* $x\in X$ *функція* $P_{uv}x: T_2\to X$ *є сильно неперервною зліва по* u *та справа по* v *у кожній точці* $(s,t)\in T_2$.

Доведення. Маємо

a) $AQ_sx \;\equiv\; \lim_{h\to 0}h^{-1}(Q_hQ_sx-Q_sx) \;=\; Q_s\lim_{h\to 0}h^{-1}(Q_hx-x) \;=\; Q_sAx$;

b) $\|Q_{s+h}x-Q_sx\| \;=\; \|Q_s(Q_hx-x)\| \;\leq\; q(s)\|Q_hx-x\| \;\to\; 0, \qquad h\downarrow 0,$

$$\|Q_{s-h}x-Q_sx\| \;=\; \|Q_{s-h}(Q_hx-x)\| \;\leq\; q(s)\|Q_hx-x\| \;\to\; 0, \qquad h\downarrow 0.$$

Твердження c) для $x\in X_0$ є очевидним наслідком (6) та (7).

Для кожного $x\in X$ існують $x_n\in X_0$ такі, що $x_n\to x$. Тоді

$$\overline{\lim}_{u\uparrow t,\, v\downarrow t}\| P_{uv}x - x \| \;\le\; \overline{\lim}_{u\uparrow t,\, v\downarrow t}\| P_{uv}x_n - x_n \| +$$

$$+ \big(1 + p(a)\big)\big\| x - x_n \big\|,$$

де перший доданок у правій частині дорівнює нулю, а другий можна зробити як завгодно малим відповідним вибором n.

Твердження d) є наслідком твердження c) та рівності

$$P_{uv}x - P_{st}x \;=\; P_{ut}(P_{tv} - I)x + (P_{us} - I)P_{st}x \tag{16}$$

для $u \le s \le t \le v$.

Лема 2. *Для всіх* $x \in X$, $y \in Y$ *та* $(t, s) \in T_2$ *дійсна функція*

$$F_u \;=\; F_u(x, y) \;\equiv\; \langle y, P_{su}Q_{t-u}x\rangle, \qquad u \in [s, t], \tag{17}$$

є неперервною.

Доведення. Нехай $x \in X$, $y \in Y$.

Для доведення неперервності справа виберемо $u \uparrow v$ для фіксованого v. Тоді

$$F_v - F_u \;=\; \langle y, P_{sv}Q_{t-v}x\rangle - \langle y, P_{su}Q_{t-u}x\rangle \;=$$

$$=\; \big\langle y, P_{su}(Q_{t-v} - Q_{t-u})x\big\rangle + \big\langle y, (P_{sv} - P_{su})Q_{t-v}x\big\rangle \;=$$

$$=\; \big\langle P'_{su}y, Q_{t-v}(I - Q_{v-u})x\big\rangle + \big\langle P'_{su}y, (P_{uv} - I)Q_{t-v}x\big\rangle. \tag{18}$$

За лемою 1

$$\big|F_v - F_u\big| \;\le$$

$$\le\; \big\|y\big\| p(t)\big(q(t)\big\|(I - Q_{v-u})x\big\| + \big\|(P_{uv} - I)Q_{t-v}x\big\|\big) \;\to\; 0, \qquad u \uparrow v. \tag{19}$$

Для доведення неперервності зліва зафіксуємо u та обчислимо для $v > u$ різницю $F_v - F_u$:

$$F_v - F_u \;=\; \langle y, P_{sv}Q_{t-v}x\rangle - \langle y, P_{su}Q_{t-u}x\rangle \;=$$

$$=\; \big\langle y, P_{sv}(Q_{t-v} - Q_{t-u})x\big\rangle + \big\langle y, (P_{sv} - P_{su})Q_{t-u}x\big\rangle \;=$$

$$=\; \big\langle yP'_{sv}, Q_{t-v}(I - Q_{v-u})x\big\rangle + \big\langle P'_{su}y, (P_{uv} - I)Q_{t-u}x\big\rangle. \tag{20}$$

За лемою 1

$$\big|F_v - F_u\big| \;\le$$

$$\le\; \big\|y\big\| p(t)\big(q(t)\big\|(I - Q_{v-u})x\big\| + \big\|(P_{uv} - I)Q_{t-u}x\big\|\big) \;\to\; 0, \qquad v \downarrow u. \tag{21}$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Для всіх* $x \in X_0$, $y \in Y$ *та* $(s, t) \in T_2$ *функція* $F_u(x, y)$ *у* (17) *є диференційовною по* $u \in [s, t]$ *та*

$$\frac{d}{du}F_u(x, y) \;=\; \langle y, P_{su}D_uQ_{t-u}x\rangle \;\equiv\; f_u(x, y). \tag{22}$$

Доведення. Зауважимо, що внаслідок (8) для всіх $x \in X_0$ має місце зображення

$$\big\|(P_{uv} - Q_{v-u} - hD_t)x\big\| \;=\; o\big(\big\|h\big\|\big), \qquad h \downarrow u, \tag{23}$$

при $u \uparrow t$, $v \downarrow t$, $v - u = h$.

Доведемо, що ліва та права похідні F_u існують та збігаються з f_u.

Нехай v фіксоване та $u \uparrow v$. Позначимо $h = v - u$. Тоді за означенням (22)

$$F_v - F_u = hf_v + h\langle y, (P_{su} - P_{sv})D_v Q_{t-v}x\rangle +$$
$$+ \langle P'_{su}y, (P_{uv} - Q_{v-u} - hD_v)Q_{t-v}x\rangle =$$
$$= hf_v + ho(1) + o(h), \qquad h \downarrow 0, \tag{24}$$

де використано неперервність з леми 1(d), включення $Q_{t-v}x \in X_0$ та зображення (23).

Звідси отримуємо ліву похідну

$$\frac{d^-}{du} F_u = f_u.$$

Оскільки $X_0 \subset X$ є щільним, то для кожного $y \in Y$ та $x \in X$ з (23) випливає зображення

$$\langle y, (P_{uv} - Q_{v-u} - hD_t)x\rangle = o(h), \qquad h \downarrow 0. \tag{25}$$

Нехай u є фіксованим, $v \downarrow u$ та $h = v - u$. Тоді з включення $x \in X_0 \subset D(A)$ та з означення (22) отримуємо

$$F_v - F_u - hf_u = \langle y, P_{su}(P_{uv} - Q_{v-u})Q_{t-v}x\rangle - hf_u =$$
$$= \langle P'_{su}y, (P_{uv} - Q_{v-u} - hD_u)Q_{t-u}x\rangle +$$
$$+ \langle P'_{su}y, (P_{uv} - Q_{v-u})Q_{t-v}(I - Q_{v-u} + hA)x\rangle +$$
$$+ h(\langle y, P_{su}Q_{t-u}Ax\rangle - \langle y, P_{sv}Q_{t-v}Ax\rangle). \tag{26}$$

Тому за означенням (17)

$$|F_v - F_u - hf_u| \le o(h) + \|y\| p(t)(1 + q(t))\|(I - Q_{v-u} + hA)x\| +$$
$$+ h|F_u(Ax, y) - F_v(Ax, y)| = o(h), \qquad h \downarrow 0, \tag{27}$$

де перший доданок у правій частині дорівнює $o(h)$ згідно з (25), другий — за означенням генератора (4) та останній — за лемою 2.

Отже, права похідна також дорівнює f_u:

$$\frac{d^+}{du} F_u = f_u,$$

тому функція F_u є диференційовною з похідною f_u.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай $m_u : T \to Y$ — сильно неперервна функція. Якщо спряжена еволюційна сім'я сильно неперервна, то для всіх $x \in X$, $t \in T$ дійсна функція $\langle m_u, D_u Q_{t-u}x\rangle : [0, t] \to \mathbb{R}$ є вимірною та обмеженою по відношенню до норми $\|x\|$.*

Доведення. Нехай $x \in X_0$. Тоді $Q_{t-u}x \in X_0$ та згідно з (8) має місце рівність

$$\langle m_u, D_u Q_{t-u}x\rangle = \lim_{h\downarrow 0}\langle m_u, h^{-1}(P_{u,u+h} - Q_h)Q_{t-u}x\rangle. \tag{28}$$

Вимірність лівої частини є наслідком неперервності функції під знаком границі. Ця неперервність випливає із зображення

$$\langle m_{u+\varepsilon}, P_{u+\varepsilon,\, u+\varepsilon+h} Q_{t-u-\varepsilon} x\rangle - \langle m_u, P_{u,\, u+h} Q_{t-u} x\rangle =$$

$$= \langle m_{u+\varepsilon} - m_u, P_{u+\varepsilon,\, u+\varepsilon+h} Q_{t-u-\varepsilon} x\rangle + \langle m_u, P_{u+\varepsilon,\, u+\varepsilon+h}(Q_{t-u-\varepsilon} - Q_{t-u})x\rangle +$$

$$+ \langle P'_{u+\varepsilon,u+h} m_u, (P_{u+h,u+\varepsilon+h} - I) Q_{t-u} x\rangle + \langle (P_{u,u+\varepsilon} - I)' m_u, P_{u+\varepsilon,\, u+h} Q_{t-u} x\rangle, \quad (29)$$

де перший доданок прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$ внаслідок неперервності m_u, другий — згідно з сильною неперервністю Q_s, третій — за лемою 1(d) та останній — внаслідок сильної неперервності спряженої еволюційної сім'ї (9).

Обмеженість $\langle m_u, D_u Q_{t-u} x\rangle$ є очевидною:

$$\sup_{u \le t} |\langle m_u, D_u Q_{t-u} x\rangle| \le \sup_{u\le t} \| m_u \| \varepsilon(t) q(t) \| x \|.$$

Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Твердження теореми для всіх $x \in X$, $y \in Y$ еквівалентне такій рівності:

$$\langle y, P_{st} x\rangle = \langle y, Q_{t-s} x\rangle + \int_s^t \langle y, P_{su} D_u Q_{t-u} x\rangle du. \quad (30)$$

Зауважимо, що функція під знаком інтеграла збігається з похідною $f_u(x, y)$ у (22). За лемами 2 та 3 ця функція є вимірною як границя неперервних функцій $(F_u - F_v)(u - v)^{-1}$ та обмеженою:

$$\sup_{s \le u \le t} |f_u| \le \| y \| p(t) \varepsilon(t) q(t) \| x \|. \quad (31)$$

Нехай $x \in X_0$, $y \in Y$. За лемою 3 для майже всіх $(s, t) \in T_2$

$$F_t(x, y) - F_s(x, y) = \int_s^t f_u(x, y) du. \quad (32)$$

Обидві частини цієї рівності неперервні по s, t. Тому вона виконується для всіх $(s, t) \in T_2$. Отже, за означенням (17) рівність (30) справджується для всіх $x \in$ $\in X_0$, $y \in Y$.

У загальному випадку, коли $x \in X$, виберемо $x_n \in X_0$ так, щоб $x_n \to x$. Тоді $F_t = F_t(x, y) = \lim_{n\to\infty} F_t(x_n, y)$, що доведено у (21), та

$$\sup_{s \le u \le t} |f_u(x, y) - f_u(x_n, y)| = \sup_{s\le u\le t} |f_u(x - x_n, y)| \le$$

$$\le \| y \| p(t) \varepsilon(t) q(t) \| x_n - x \| \to 0, \quad n \to \infty, \quad (33)$$

рівномірно по x, y внаслідок (31). Отже, рівність (30), як і (32), виконується для всіх $x \in X$, $y \in Y$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Зафіксуємо $s \in T$. Позначимо через C_s банахів простір сильно неперервних функцій $m = (m(u), u \in T) : [s, a] \to X'$ з супремум-нормою $\| m \| = \sup_{u\in T} \| m(u) \|$.

Розглянемо оператор $\mathcal{L} : C_s(Y) \to C_s(Y)$ з дією

$$\langle (\mathcal{L} m)(t), x\rangle = \int_s^t \langle m(u), D_u Q_{t-u} x\rangle du, \quad x \in X. \quad (34)$$

За лемою 4 функція під знаком інтеграла є вимірною та обмеженою сталою вигляду $K\|x\|$. Сильна неперервність по t образу $(\mathcal{X}m)(t)$ випливає з сильної неперервності $Q_{t-u}x$ та з обмеженості підінтегральної функції. Тому $\mathcal{X}$ є лінійним обмеженим оператором на C_s.

Далі, n-й ступінь оператора $\mathcal{X}$ має вигляд

$$\langle(\mathcal{X}^n m)(t), x\rangle = \int_s^t \int_s^{u_2} \ldots \int_s^{u_n} \langle m(u_1), D_{u_1}Q_{u_2-u_1}\ldots D_{u_n}Q_{t-u_n}x\rangle du_1\ldots du_n. \qquad (35)$$

Тому

$$\|\mathcal{X}^n m\| \le \|m\|(\varepsilon(a)q(a))^n a^n/n! \to 0, \qquad n \to \infty,$$

і $\mathcal{X}^n$ є оператором стискання для деякого n.

З теореми 1 виводимо, що для кожного $y \in Y$ неперервна за лемою 1 функція $m(u) = P'_{su}y$ задовольняє рівняння

$$m(t) = Q'_{t-s}y + (\mathcal{X}m)(t). \qquad (36)$$

Остаточно твердження теореми 2 випливає з теореми про відображення стискання, оскільки з означень (12), (13) в результаті рекурентних обчислень

$$U_0(s,t)y = Q'_{t-s}y,$$

$$U_{n+1}(s,t)y = \mathcal{X}(U_n(s,\cdot))(t)y = \mathcal{X}^{n+1}(U_0(s,\cdot))(t)y \qquad (37)$$

єдиний розв’язок (36) отримується як сума ряду Неймана:

$$P'_{st}y = m(t) = \sum_{n\ge 0}\mathcal{X}^n(U_0(s,\cdot))(t)y = \sum_{n\ge 0}U_n(s,t)y.$$

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** З (35) та (37) для всіх $x \in X$, $y \in Y$ та $n \ge 1$ випливає зображення

$$\langle U_n(s,t)y, x\rangle = \mathcal{X}^n(U_0(s,\cdot))(t)y =$$

$$= \int_s^t \int_s^{u_2} \ldots \int_s^{u_n} \langle U_0(s,u_1)y, D_{u_1}Q_{u_2-u_1}\ldots D_{u_n}Q_{t-u_n}x\rangle du_1\ldots du_n =$$

$$= \int_s^t \int_s^{u_2} \ldots \int_s^{u_n} \langle y, Q_{u_1-s}D_{u_1}Q_{u_2-u_1}\ldots D_{u_n}Q_{t-u_n}x\rangle du_1\ldots du_n. \qquad (38)$$

Для фіксованого $t \in T$ визначимо простір $C_t(X'')$ сильно неперервних функцій $f(u):[0,t] \to X''$ з супремум-нормою та лінійний оператор ¥ на $C_t(X'')$ з дією

$$\langle y, (¥f)(s)x\rangle = \int_s^t \langle y, Q_{u-s}D_u f_u x\rangle du \qquad \forall y \in Y. \qquad (39)$$

Як і в лемі 4, можна довести обмеженість та вимірність підінтегральної функції та обмеженість лінійного оператора ¥.

Визначимо $V_0(t,s)x = Q_{t-s}x$ та рекурсивно

$$V_{n+1}(t,s)x = ¥(V_n(\cdot,t))(s)x = ¥^{n+1}(V_0(\cdot,t))(s)x.$$

Тому за означенням (39)

$$\langle y, V_n(t,s)x \rangle = \langle y, \yen^n(V_0(\cdot, t))(s)x \rangle =$$

$$= \int_s^t \int_s^{u_2} \ldots \int_s^{u_n} \langle y, D_{u_1} Q_{u_2 - u_1} \ldots D_{u_n} V_0(t - u_n, s)x \rangle \, du_1 \ldots du_n =$$

$$= \int_s^t \int_s^{u_2} \ldots \int_s^{u_n} \langle y, Q_{u_1 - s} D_{u_1} Q_{u_2 - u_1} \ldots D_{u_n} Q_{t - u_n} x \rangle \, du_1 \ldots du_n = \langle U_n(s,t)y, x \rangle$$

внаслідок (38).

Далі, за теоремою 1

$$\langle y, P_{st}x \rangle - \langle y, Q_{t-s}x \rangle = \sum_{n \ge 1} \langle U_n(s,t)y, x \rangle = \sum_{n \ge 1} \langle y, V_n(t,s)x \rangle =$$

$$= \sum_{n \ge 0} \langle y, \yen(V_n(\cdot, t))(s)x \rangle = \left\langle y, \yen\left(\sum_{n \ge 0} V_n(\cdot, t) \right)(s)x \right\rangle =$$

$$= \langle y, \yen(P_{\cdot t})(s)x \rangle = \left\langle y, \int_s^t Q_{u-s} D_u P_{ut} x \, du \right\rangle = \int_s^t \langle y, Q_{u-s} D_u P_{ut} x \rangle \, du.$$

Теорему 3 доведено.

1. *Kato T.* On linear differential equations in Banach spaces // Communs Pure and Appl. Math. – 1956. – **9**. – P. 479 – 486.
2. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations // Grad. Texts Math., – 2000. – **194**. – 586 p.
3. *Raebiger F., Rhandi A., Schnaubelt R.* Perturbation and an abstract characterization of evolution semigroups // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 516 – 533.
4. *Hockman M.* The abstract time-dependent Cauchy problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **133**, № 1. – P. 1 – 50.
5. *Gikhman I. I., Skorokhod A. V.* Theory of random processes. – Moscow: Nauka, 1973. – Vol. 2. – 640 p.
6. *Kartashov N. V.* Strong stable Markov chains. – Utrecht: VSP, 1996. – 138 p.

Одержано 12.01.2005