УДК 517.5

В. Н. Коновалов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОЛМОГОРОВСКИЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ s-МОНОТОННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Let $s \in \mathbb{N}$ and let Δ_+^s be the set of functions $x: I \mapsto \mathbb{R}$ on a finite interval I such that the divided differences $[x; t_0, \ldots, t_s]$ of order s of these functions are nonnegative for all collections of $s+1$ distinct points $t_0, \ldots, t_s \in I$. For the classes $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \bigcap B_p$, where B_p is the unit ball in L_p, we obtain orders of the Kolmogorov and linear widths in the spaces L_q for $1 \le q < p \le \infty$.

Нехай $s \in \mathbb{N}$ і Δ_+^s — множина функцій $x: I \mapsto \mathbb{R}$ на скінченному інтервалі I таких, що поділені різниці $[x; t_0, \ldots, t_s]$ порядку s цих функцій є невід'ємними для всіх наборів з $s+1$ різних точок $t_0, \ldots, t_s \in I$. Для класів $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \bigcap B_p$, де B_p — одинична куля в L_p, знайдено порядки у просторах L_q при $1 \le q < p \le \infty$ колмогоровських і лінійних поперечників.

1. Введение. Формулировки основных результатов. Пусть X — вещественное линейное пространство x с нормой $\|x\|_X$, а W — произвольное непустое множество из X. Колмогоровским n-поперечником в пространстве X множества W называется величина

$$d_n(W)_X^{\text{kol}} := \inf_{M^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берется по всем аффинным многообразиям M^n размерности $\le n$ из X. Линейным n-поперечником в пространстве X множества W называется величина

$$d_n(W)_X^{\text{lin}} := \inf_{M^n} \inf_{A} \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X,$$

где первый инфимум берется по всем аффинным многообразиям M^n размерности $\le n$ из X, а второй — по всем аффинным непрерывным отображениям $A: \operatorname{aff}(W) \mapsto M^n$ аффинной оболочки $\operatorname{aff}(W)$ множества W в многообразие M^n. Входящие в определения колмогоровского и линейного поперечников величины

$$E(X, M^n)_X := \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X$$

и

$$E(X, M^n)_X^{\text{lin}} := \inf_{A} \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X$$

называются соответственно наилучшим и наилучшим линейным приближением в X множества W (фиксированным) аффинным многообразием M^n. Очевидно, что

$$E(X, M^n)_X \le E(X, M^n)_X^{\text{lin}} \quad \text{и} \quad d_n(W)_X^{\text{kol}} \le d_n(W)_X^{\text{lin}}.$$

При $s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ функцию $x: I \mapsto \mathbb{R}$ будем называть s-монотонной на конечном интервале $I \subset \mathbb{R}$, если для всех наборов из $s+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_s \in I$ соответствующие разделенные разности $[x; t_0, \ldots, t_s]$ порядка s

этой функции являются неотрицательными. Очевидно, что s-монотонные функции при $s = 0, 1, 2$ — это соответственно неотрицательные, неубывающие и выпуклые функции на интервале I. Таким образом, параметр s характеризует форму функций.

Основные свойства s-монотонных функций описаны в [1 – 3]. Отметим, что те свойства s-монотонных функций, которые будут использоваться в данной работе, приведены также в [4].

Класс всех s-монотонных на I функций будем обозначать через $\Delta_+^s(I)$. Кроме того, если на I определен некоторый класс функций $W(I)$, то полагаем $\Delta_+^s W(I) := \Delta_+^s(I) \bigcap W(I)$. Через $L_p(I)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим, как обычно, линейное пространство всех измеримых по Лебегу функций $x : I \mapsto \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|x\|_{L_p(I)}$. Единичный шар пространства $L_p(I)$ обозначим через $B_p(I)$. Для интервала $I = (-1, 1)$ его обозначение будем иногда опускать, т. е. $W := W(I)$.

Нетрудно проверить, что $\Delta_+^s B_p \not\subset L_q$ при $1 \le p < q \le \infty$. Следует также отметить, что, несмотря на наличие при $s > 1$ у функций $x \in \Delta_+^s B_p$ определенных дифференциальных свойств, нельзя, вообще говоря, гарантировать при $1 \le p < \infty$ ограниченность норм производных $x^{(k)}$ порядка $k \ge 1$ в каком-либо из пространств L_q, $1 \le q \le \infty$. Лишь для функций $x \in \Delta_+^s B_\infty$, где $s > 1$, можно утверждать, что $\|x'\|_{L_1} < \infty$.

Цель данной работы — описать, в терминах колмогоровских и линейных поперечников, влияние формы функций, характеризуемой параметром s, на порядки приближения этих функций аффинными многообразиями конечной размерности.

Прежде чем сформулировать полученные результаты, условимся еще о некоторых обозначениях. Через $|I|$ будем обозначать длины промежутков I, а через $c := c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ — различные положительные „постоянные", зависящие от параметров $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Если заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n \ge 1$, положительных чисел a_n и b_n, то эти последовательности удовлетворяют соотношению $a_n \asymp b_n$, $n \ge 1$, тогда и только тогда, когда существуют не зависящие от n числа $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 \le a_n / b_n \le c_2$, $n \ge 1$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема, в которой предполагается, что классы $\Delta_+^s B_p$ заданы на интервале $I := (-1, 1)$.

Теорема 1.1. *Если* $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, *и* $1 \le q < p \le \infty$, *или* $s = 1$ *и* $1 \le q < p \le 2$, *или* $s = 1$ *и* $1 \le q \le 2 < p \le \infty$, *то*

$$d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \asymp d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\mathrm{lin}} \asymp n^{-s+\min\{1/q', 1/2\}}, \quad n \ge 1, \tag{1.1}$$

где $1/q + 1/q' = 1$. *Если* $s = 1$ *и* $2 < q < p \le \infty$, *то существуют* $c_1 = c_1(q)$ *и* $c_2 = c_2(q)$ *такие, что*

$$c_1 n^{-1/2} \le d_n(\Delta_+^1 B_p)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \le d_n(\Delta_+^1 B_p)_{L_q}^{\mathrm{lin}} \le c_2 n^{-1/2} (\ln(n+1))^{3/2}, \quad n \ge 1. \tag{1.2}$$

***Замечание* 1.1.** В работах [4, 5] для классов $\Delta_+^s B_p$ исследовано поведение формосохраняющих поперечников $d_n(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ типа Колмогорова (определение см. в [4, 5]). Было установлено, что при $s = 1, 2$ и $1 \le q < p \le \infty$ формосохраняющие поперечники имеют порядки

$$d_n(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q)_{L_q}^{\text{kol}} \asymp n^{-s+1/q'}, \qquad n \geq 1. \tag{1.3}$$

Если же $s \geq 3$ и $1 \leq q < p \leq \infty$, то

$$d_n(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q)_{L_q}^{\text{kol}} \asymp n^{-2}, \qquad n \geq 1. \tag{1.4}$$

Сравнивая оценки (1.3) и (1.4) с оценками (1.1) и (1.2), видим, что для классов $\Delta_+^s B_p$ порядки колмогоровских и линейных поперечников могут существенно отличаться от порядков формосохраняющих поперечников типа Колмогорова.

Если же $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q = p \leq \infty$, или $s = 0$ и $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то ни колмогоровские, ни линейные, ни формосохраняющие поперечники типа Колмогорова классов $\Delta_+^s B_p$ в L_q не стремятся к нулю при $n \to \infty$. Это установлено в [4, 5].

Отметим также, что в [6 – 8] исследовалось поведение в пространствах L_q, $1 \leq q \leq \infty$, колмогоровских, линейных и формосохраняющих поперечников типа Колмогорова классов $\Delta_+^s W_p^r$, $0 \leq s \leq r+1$, состоящих из s-монотонных функций, принадлежащих классам Соболева W_p^r, где $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$.

2. Вспомогательные утверждения. Сформулируем в виде лемм утверждения, которые будут использоваться при доказательстве теоремы 1.1.

Если $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$, то полагаем

$$(k)_s := \begin{cases} \dbinom{s-2+k}{s-1}, & k \geq 1, \\ 0, & k \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $s, n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *— фиксированный вектор с неотрицательными координатами* a_i, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *— фиксированный вектор с положительными координатами* b_i, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Пусть также*

$$f_n(\omega; a) := \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

и

$$\Omega_{s,p,n}(b) := \left\{ \omega_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \left(b_i \sum_{j=1}^{i} (i-j+1)_s \omega_j \right)^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\max_{\omega \in \Omega_{s,p,n}(b)} f_n(\omega; a) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left| \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} a_{i+k} \right| b_i^{-1} \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

где $a_i := 0$, $i = n+1, \ldots, n+s$ *и* $1/p + 1/p' = 1$.

При $s = 1$ лемма 2.1 доказана в [6] (лемма 2), а при $s = 2$ — в [5] (лемма 11). Доказательство леммы 2.1 при всех $s \in \mathbb{N}$ имеется в [4] (лемма 4).

В следующей лемме и далее для функций $x : I \mapsto \mathbb{R}$, имеющих в точке t из интервала I конечные односторонние производные $x_-^{(k)}(t)$ и $x_+^{(k)}(t)$ порядка $k \in \mathbb{N}$, полагаем

$$x^{(k)}(t) := \frac{1}{2}\Big(x_-^{(k)}(t) + x_+^{(k)}(t)\Big).$$

Ясно, что если в какой-либо точке интервала I существует обычная производная порядка $k \in \mathbb{N}$, то она совпадает с так определяемой обобщенной производной. При $k = 0$ полагаем $x^{(0)}(t) := x(t)$, $t \in I$.

Лемма 2.2. *Пусть* $I := (-1, 1)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, *а также*

$$\pi_s(t; x; 0) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \qquad t \in I,$$

и

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x; 0), \qquad t \in I.$$

Тогда существует $c = c(s, p)$ *такое, что*

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \le c\|x\|_{L_p(I)}.$$

Эта лемма доказана в [4] (лемма 3).

Лемма 2.3. *Пусть* I *— произвольный конечый интервал,* $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $1 \le q \le \infty$. *Тогда существует* $c = c(s, q)$ *такое, что для всех алгебраических многочленов* π_s *порядка* $\le s$ *выполняется неравенство*

$$\|\pi_s\|_{L_\infty(I)} \le c|I|^{-1/q}\|\pi_s\|_{L_q(I)}.$$

Утверждение леммы 2.3 — частный случай теоремы 2.7 из [9] (гл. 4, § 2).

Если $n \in \mathbb{N}$ и $1 \le p \le \infty$, то через l_p^n обозначим, как обычно, пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{l_p^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

где $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\infty\right)^{1/\infty} := \max_{i=1,\ldots,n}|x_i|$, через b_p^n — единичный шар в пространстве l_p^n.

Лемма 2.4. *Если* $2 < q < \infty$, *то при всех* $n, m \in \mathbb{N}$ *таких, что* $m < n$, *имеет место неравенство*

$$d_m(b_1^n)_{l_q^n}^{\mathrm{lin}} \le cn^{1/q}m^{-1/2},$$

где $c = c(q)$.

Лемма 2.4 — непосредственное следствие теоремы 2 из [10].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\Xi^n := \left\{\xi^i\right\}_{i=1}^n$ — произвольная система векторов в вещественном линейном пространстве X. Если $1 \le p \le \infty$, то множество

$$S_p^+(\Xi^n) := \left\{\xi := \sum_{i=1}^n a_i\xi^i,\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i \ge 0,\ 1 \le i \le n,\ \|a\|_{l_p^n} \le 1\right\}$$

будем называть (неотрицательным) p-сектором по системе Ξ^n в X.

Лемма 2.5. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $m < n$, *и* $1 \le q \le \infty$. *Если* $E^n := \left\{e^i\right\}_{i=1}^n$ *— стандартная система единичных векторов* $e^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e^n = (0, \ldots, 0, 1)$ *в* $\mathbb{R}^n$, *то*

$$d_m(S_1^+(E^n))_{l_q^n}^{\text{kol}} \ \geq \ \max\left\{(2n)^{-1}(n-m)^{1/q},\ (1-(m+1)/n)^{1/2}\right\}n^{-(1/2-1/q)_+},$$

где $a_+ := \max\{a, 0\}$.

Лемма 2.5 является частным случаем леммы 1 из [6].

3. Доказательство оценок сверху в теореме 1.1. При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $\beta \geq 1$ разобьем интервал $I := (-1, 1)$ точками

$$t_{\beta,n,i} := \begin{cases} 1 - ((n-i)/n)^{\beta}, & i = 0, 1, \ldots, n, \\ -1 + ((n+i)/n)^{\beta}, & i = -1, \ldots, -n, \end{cases} \tag{3.1}$$

на $2n$ промежутков

$$I_{\beta,n,i} := \begin{cases} [t_{\beta,n,i-1}\ t_{\beta,n,i}), & i = 1, \ldots, n, \\ (t_{\beta,n,i}\ t_{\beta,n,i+1}], & i = -1, \ldots, -n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Если $s = 1$, то для каждой функции $x : I \mapsto \mathbb{R}$ при каждом $\tau \in I$ полагаем

$$\pi_1(t; x; \tau) := x(\tau), \quad t \in I. \tag{3.3}$$

Если же $s > 1$, то для каждой функции $x : I \mapsto \mathbb{R}$, имеющей конечные односторонние производные $x_-^{(s-1)}(\tau)$ и $x_+^{(s-1)}(\tau)$ в точке $\tau \in I$, полагаем

$$\pi_s(t; x; \tau) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(\tau)}{k!}(t-\tau)^k, \quad t \in I, \tag{3.4}$$

где $x^{(s-1)}(\tau)$, вообще говоря, обобщенные производные порядка $s-1$. Очевидно, что при фиксированном $\tau \in I$ функции $\pi_s(t; x; \tau)$, $t \in I$, являются обобщенными многочленами Тейлора порядка $\leq s$ (т. е. степени $\leq s-1$) по t, построенными для функции x относительно точки τ.

Для каждой функции $x \in \Delta_+^s L_p(I)$ и заданных разбиений интервала I на промежутки $I_{\beta,n,i}$ вида (3.2) полагаем

$$\pi_s(t; x; I_{\beta,n,i}) := \begin{cases} \pi_s(t; x; t_{\beta,n,i-1}), & t \in I, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \pi_s(t; x; t_{\beta,n,i+1}), & t \in I, \quad i = -1, \ldots, -n, \end{cases} \tag{3.5}$$

где многочлены $\pi_s(\cdot; x; t_{\beta,n,i-1})$ определены согласно (3.1), (3.3) и (3.4). Теперь определим на I кусочно-полиномиальные сплайны

$$\sigma_{\beta,s,n}(t; x; I) := \pi_s(t; x; t_{\beta,n,i}), \quad t \in I_{\beta,n,i}, \quad i = \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{3.6}$$

порядка $\leq s$ с узлами в точках $t_{\beta,n,i}$.

Оценим уклонение сплайнов $\sigma_{\beta,s,n}(\cdot; x; I)$ от функций $x \in \Delta_+^s L_p(I)$ в метрике $L_q(I)$ при условии, что $1 \leq q < p \leq \infty$. Вначале будем рассматривать функции $\tilde{x} \in \Delta_+^s L_p(I)$ такие, что

$$\tilde{x}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, s-1. \tag{3.7}$$

Легко убедиться, что в этом случае при всех $k = 0, \ldots, s-1$ будут выполняться неравенства $\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $t \in I_+ := [0, 1)$. Если же $t \in I_- := (-1, 0]$, то $(-1)^{s-k}\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, \ldots, s-1$. Отметим также, что все производные $\tilde{x}^{(k)}$, $k = 0, \ldots, s-1$, являются неубывающими функциями на промежутке I_+, а на промежутке I_- происходит чередование монотонности производных $\tilde{x}^{(k)}$. Далее будем рассматривать также промежуток I_+, поскольку для промежутка I_- рассуждения аналогичны.

Отправляясь от сплайнов $\sigma_{\beta,s,n}(\cdot;\tilde{x};I)$, определенных для функции $\tilde{x}$ согласно (3.1) – (3.6), полагаем

$$\sigma_{\beta,s,n}(t;\tilde{x};I_+) := \sigma_{\beta,s,n}(t;\tilde{x};I), \quad t\in I_+, \tag{3.8}$$

и

$$\sigma_{\beta,s,n}(t;\tilde{x};I_-) := \sigma_{\beta,s,n}(t;\tilde{x};I), \quad t\in I_-. \tag{3.9}$$

В дальнейшем число β будет зависеть лишь от параметров s, p и q. Поэтому иногда будем опускать индекс β, чтобы несколько упростить обозначения.

Если $n = 1$, то из (3.1) – (3.8) следует

$$\sigma_{s,1}(t;\tilde{x};I_+) = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\tilde{x}^{(k)}(t_{1,0})}{k!}(t-t_{1,0})^k = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\tilde{x}^{(k)}(0)}{k!}t^k = 0, \qquad t\in I_+.$$

Но тогда очевидно, что $\tilde{x}(t)-\sigma_{s,1}(t;\tilde{x};I_+) = \tilde{x}(t)$, $t\in I_+$. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,1}(\cdot;\tilde{x};I_+)\right\|_{L_q(I_+)} \le \|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}. \tag{3.10}$$

Далее будем рассматривать случай $n>1$. Если $s = 1$, то

$$\tilde{x}(t)-\sigma_{1,n}(t;\tilde{x};I_+) = \tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_{n,i-1}), \qquad t\in I_{n,i}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.11}$$

Если же $s>1$, то для $t\in I_{n,i}$, $1\le i\le n$, из (3.1) – (3.8) и формулы Тейлора следуют равенства

$$\tilde{x}(t)-\sigma_{s,n}(t;\tilde{x};I_+) = \frac{1}{(s-2)!}\int\limits_{t_{n,i-1}}^{t}\left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau)-\tilde{x}^{(s-1)}(t_{n,i-1})\right)(t-\tau)^{s-2}d\tau. \tag{3.12}$$

Полагая

$$\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_{n,i}\right) := \tilde{x}^{(s-1)}(t_{n,i})-\tilde{x}^{(s-1)}(t_{n,i-1}), \qquad i = 1,\dots,n-1,$$

замечаем, что производная $\tilde{x}^{(s-1)}$ является неотрицательной и неубывающей функцией на промежутке I_+. Поэтому из (3.11) и (3.12) легко получаем оценки

$$\left\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)\right\|_{L_q(I_{n,i})} \le \frac{\left|I_{n,i}\right|^{s-1/q'}}{(s-1)!}\omega(\tilde{x}^{(s-1)};I_{n,i}), \quad i = 1,\dots,n-1, \tag{3.13}$$

где $1/q+1/q' = 1$ и $s\ge 1$.

Если же $i = n$, то, учитывая, что $\tilde{x}^{(k)}(t_{n,n-1})\ge 0$, $k = 0,\dots,s-1$, имеем

$$0 \le \tilde{x}(t)-\sigma_{s,n}(t;\tilde{x};I_+) \le \tilde{x}(t), \qquad t\in I_{n,n}.$$

Снова используя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)\right\|_{L_q(I_{n,n})} \le \left|I_{n,n}\right|^{1/q-1/p}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}. \tag{3.14}$$

Из оценок (3.13), (3.14) и известного неравенства $\left(\sum_{i=1}^m|a_i|^q\right)^{1/q} \le \sum_{i=1}^m|a_i|$, $1\le$ $\le q\le\infty$, следует

$$\left\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)\right\|_{L_q(I_+)} \le \check{c}\sum_{i=1}^{n-1}\left|I_{n,i}\right|^{s-1/q'}\omega(\tilde{x}^{(s-1)};I_{n,i}) + \left|I_{n,n}\right|^{1/q-1/p}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}, \tag{3.15}$$

где $\check{c} = ((s-1)!)^{-1}$. Очевидно, что если $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} = 0$, то из (3.15) следует равенство

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)\|_{L_q(I_+)} = 0. \tag{3.16}$$

Далее будем предполагать, что $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} > 0$. Зафиксировав произвольное число $\beta := \beta(s,p,q)$, удовлетворяющее неравенству

$$\beta > \max\left\{1 + s(s-1/q')^{-1},\ 1 + (s-1/p')(1/q-1/p)^{-1}\right\}, \tag{3.17}$$

нетрудно проверить, что существуют $c_1 = c_1(\beta)$ и $c_2 = c_2(\beta)$ такие, что

$$c_1 n^{-\beta}(n-i)^{\beta-1} \le |I_{n,i}| \le c_2 n^{-\beta}(n-i)^{\beta-1}, \quad i = 1,\ldots,n-1, \quad n > 1. \tag{3.18}$$

Ясно также, что $|I_{n,n}| = n^{-\beta}$. Но тогда из (3.15) и (3.18) следует неравенство

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)\|_{L_q(I_+)} \le c^* \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)^{(\beta-1)(s-1/q')}}{n^{\beta(s-1/q')}}\,\omega(\tilde{x}^{(s-1)};I_{n,i}) + $$

$$+ \|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-\beta(1/q-1/p)}, \tag{3.19}$$

где $c^* = c^*(\beta,s,q)$. Кроме того, из доказанных в [5] неравенств (3.25) – (3.29) и (3.31) следует

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{c_*(n-i)^{(\beta-1)(s-1/p')}}{\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{\beta(s-1/p')}} \sum_{j=1}^{i} (i-j+1)_s\,\omega(\tilde{x}^{(s-1)};I_j)\right)^p\right)^{1/p} \le 1, \tag{3.20}$$

где $c_* = c_*(\beta,s,q)$, а числа $(i-j+1)_s$ определены согласно (2.1).

Таким образом, задачу о приближении функций $\tilde{x}$ сплайнами $\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I_+)$, благодаря неравенствам (3.19) и (3.20), мы свели к экстремальной задаче вида

$$f_{n-1}(\omega;a) \to \sup, \qquad \omega \in \Omega_{s,p,n-1}(b), \tag{3.21}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, где функция $f_{n-1}(\cdot;a)$ и множество $\Omega_{s,p,n-1}(b)$ определены в соответствии с (2.2) и (2.3), а координаты фиксированных векторов $a = (a_1,\ldots,a_{n-1})$ и $b = (b_1,\ldots,b_{n-1})$ определяются следующим образом:

$$a_i := (n-i)^{(\beta-1)(s-1/q')} n^{-\beta(s-1/q')}, \quad i = 1,\ldots,n-1, \tag{3.22}$$

$$b_i := c_* \|\tilde{x}\|^{-1}_{L_p(I_+)} (n-i)^{(\beta-1)(s-1/p')} n^{-\beta(s-1/p')}, \quad i = 1,\ldots,n-1. \tag{3.23}$$

Полагая $a_i := 0$, $i = n,\ldots,n-1+s$, и применяя лемму 2.1 (с заменой n на $n-1$), имеем

$$\max_{\omega\in\Omega_{s,p,n-1}(b)} f_{n-1}(\omega;a) \le \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right| b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'}. \tag{3.24}$$

Пусть $n > s+1$ и $c^\star := \prod_{k=1}^{s}(\beta-1)(s-1/q') - k + 1$. Тогда при $i = 1,\ldots,n-1-s$ получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}(n-i-k)^{(\beta-1)(s-1/q')}\right| =$$

$$= c^{\star}\left|\int_0^1 \ldots \int_0^1 (n-i-\tau_1-\ldots-\tau_s)^{(\beta-1)(s-1/q')-s}\, d\tau_1 \ldots d\tau_s\right| \le$$

$$\le c^{\star}(n-i)^{(\beta-1)(s-1/q')-s}. \tag{3.25}$$

Если же $i = n-s, \ldots, n-1$, то очевидно, что

$$\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\max\{n-i-k,\ 0\}^{(\beta-1)(s-1/q')}\right| \le 2^s s^{(\beta-1)(s-1/q')}. \tag{3.26}$$

Используя при $i = 1, \ldots, n-1-s$ соотношения (3.22), (3.23) и (3.25), имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right| b_i^{-1} \le \frac{c^{\star}}{c_*}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}\frac{(n-i)^{(\beta-1)(1/q-1/p)-s}}{n^{\beta(1/q-1/p)}}. \tag{3.27}$$

Полагая $c_{\star} := 2^s s^{(\beta-1)(s-1/q')}$ и используя при $i = n-s, \ldots, n-1$ соотношения (3.22), (3.23) и (3.26), получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right| b_i^{-1} \le \frac{c_{\star}}{c_*}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-\beta(1/q-1/p)}. \tag{3.28}$$

Но тогда из (3.27) следует

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right| b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \le$$

$$\le \frac{c^{\star}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}}{c_* n^{\beta(1/q-1/p)}}\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left((n-i)^{(\beta-1)(1/q-1/p)-s}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \le$$

$$\le \dot{c}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-\beta(1/q-1/p)+(\beta-1)(1/q-1/p)-s+1/p'} =$$

$$= \dot{c}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-s+1/q'}, \tag{3.29}$$

где $\dot{c} = \dot{c}(\beta, s, p, q)$. Отметим, что здесь использовано условие (3.17) для β. Кроме того, из (3.28) следует

$$\left(\sum_{i=n-s}^{n-1}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right| b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \le$$

$$\le \frac{c_{\star}}{c_*}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}\left(\sum_{i=n-s}^{n-1}1\right)^{1/p'} n^{-\beta(1/q-1/p)} \le$$

$$\le \ddot{c}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-\beta(1/q-1/p)}, \tag{3.30}$$

где $\ddot{c} := c^{\star}(c_*)^{-1}s^{1/p'}$. Поэтому при $n > s+1$ в силу неравенств (3.24), (3.29) и (3.30) получаем

$$\max_{\omega\in\Omega_{s,p,n-1}(b)} f_{n-1}(\omega; a) \le \|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}\left(\dot{c}n^{-s+1/q'} + \ddot{c}n^{-\beta(1/q-1/p)}\right). \tag{3.31}$$

Остается оценить сверху функцию $f_{n-1}(\cdot\,; a)$ в случае $1 < n \le s+1$. Легко убедиться, что в этом случае из (3.22) – (3.24) следует оценка

$$\max_{\omega\in\Omega_{s,p,n-1}(b)} f_{n-1}(\omega; a) \le \breve{c}\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)}, \tag{3.32}$$

где $\breve{c} = \breve{c}(\beta, s, p, q)$. Очевидно также, что при условии (3.17) имеет место неравенство

$$n^{-\beta(1/q-1/p)} \le n^{-s+1/q'}. \tag{3.33}$$

Тогда из (3.19) – (3.21) и (3.31) – (3.33) следует

$$\left\| \tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+) \right\|_{L_q(I_+)} \le c \|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-s+1/q'}, \tag{3.34}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$, $n > 1$, и $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} > 0$. Но в силу (3.16) неравенство (3.34) будет выполняться и в случае, когда $n > 1$ и $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} = 0$. Если же $n = 1$ и $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} \ge 0$, то оценка (3.34) следует из (3.10). Таким образом, неравенство (3.34) доказано для всех $n \ge 1$ и функций $\tilde{x}$ таких, что $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} \ge 0$.

Аналогично получаем оценку

$$\left\| \tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_-) \right\|_{L_q(I_-)} \le c \|\tilde{x}\|_{L_p(I_-)} n^{-s+1/q'}, \tag{3.35}$$

где сплайн $\sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_-)$ определен согласно (3.9), а $c = c(\beta, s, p, q)$. Объединяя оценки (3.34) и (3.35), имеем

$$\left\| \tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I) \right\|_{L_q(I)} \le c \|\tilde{x}\|_{L_p(I)} n^{-s+1/q'}, \tag{3.36}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$.

Оценка сверху (3.36) доказана лишь для функций $\tilde{x}$, которые удовлетворяют условию (3.7). Рассмотрим теперь общий случай, не предполагая, что функция $x \in \Delta_+^s L_p(I)$ удовлетворяет условию (3.7). Полагаем

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x; 0), \qquad t \in I,$$

где

$$\pi_s(t; x; 0) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \qquad t \in I.$$

Очевидно, что $\tilde{x}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots, s-1$. Используя лемму 2.2, имеем

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \le \tilde{c} \|x\|_{L_p(I)}, \tag{3.37}$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s, p)$. Пусть

$$\tilde{\sigma}_{s,n}(t; x; I) := \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I) + \pi_s(t; x; 0), \qquad t \in I.$$

Ясно, что в силу (3.36) и (3.37) выполняется неравенство

$$\left\| x(\cdot) - \tilde{\sigma}_{s,n}(\cdot; x; I) \right\|_{L_q(I)} \le c \|x\|_{L_p(I)} n^{-s+1/q'},$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$. Также очевидно, что сплайны $\tilde{\sigma}_{s,n}(\cdot; x; I)$ совпадают со сплайнами $\sigma_{s,n}(\cdot; x; I)$, определенными согласно (3.6). Тогда в общем случае будет справедлива оценка

$$\left\| x(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; x; I) \right\|_{L_q(I)} \le c n^{-s+1/q'}, \quad n \ge 1, \quad x \in \Delta_+^s B_p(I), \tag{3.38}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$.

Обозначим через $\dot{\Sigma}_{s,n} := \dot{\Sigma}_{\beta,s,n}(I)$ пространство кусочно-полиномиальных функций $\sigma_{s,n} : I \mapsto \mathbb{R}$, имеющих в точке $t_0 := 0$ производную $\sigma_{s,n}^{(s-1)}(0)$ порядка $s-1$ и совпадающих на каждом из промежутков $I_{n,i}$, $i = \pm 1, \ldots, \pm n$, с алгебраическими многочленами $\pi_s(\cdot; I_{n,i})$ порядка $\le s$. Очевидно, что постоенные выше сплайны $\sigma_{s,n}(\cdot; x; I_+)$, $x \in \Delta_+^s B_p(I)$, принадлежат пространству $\dot{\Sigma}_{s,n}$. Ясно также, что $\operatorname{aff}(\Delta_+^s B_p) = \operatorname{span}(\Delta_+^s B_p)$. Это следует из того, что множество $\Delta_+^s B_p(I)$ содержит функцию $x_0(t) \equiv 0$, $t \in I$. При этом отображения $A : \operatorname{span}(\Delta_+^s B_p) \mapsto \dot{\Sigma}_{s,n}$, определенные согласно (3.1) – (3.6), являются линейными, а $\dim(\dot{\Sigma}_{s,n}) = s(2n-1)$. Но тогда из (3.38) следует, что

$$E\Big(\Delta_+^s B_p, \dot{\Sigma}_{s,n}\Big)_{L_q}^{\mathrm{lin}} \le cn^{-s+1/q'}, \quad n \ge 1, \quad 1 \le q < p \le \infty,$$

где $c = c(s, p, q)$. Ясно, что из этой оценки легко получить соотношения

$$d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \le d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\mathrm{lin}} \le cn^{-s+1/q'}, \quad n \ge 1, \quad 1 \le q < p \le \infty, \tag{3.39}$$

где $c = c(s, p, q)$. На этом заканчивается доказательство оценок сверху в соотношении (1.1) для случая $1 \le q \le 2$.

Если же $2 < q < p \le \infty$, то оценки (3.39) необходимо усилить. Этого можно добиться за счет использования техники дискретизации.

Положив

$$w_n(t) := w_{\beta,n}(t) := n^{-1}\Big(1 - |t| + n^{-\beta}\Big)^{(\beta-1)/\beta}, \quad t \in I, \quad n \ge 1,$$

покажем, прежде всего, что

$$\Big\|(x(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; x; I))\, w_n^{-1/q'}\Big\|_{L_1(I)} \le cn^{-s+1/q'}, \quad n \ge 1, \quad x \in \Delta_+^s B_p(I), \tag{3.40}$$

где $\sigma_{s,n}(\cdot; x; I)$ — сплайны, построенные выше, а $c = c(\beta, s, p, q)$.

Если $n = 1$, то оценка (3.40) является тривиальной. В случае $n > 1$ мы вновь сведем задачу об оценке сверху приближения сплайнами к экстремальной задаче в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Вычисления проведем на интервале I_+ и предположим, что $\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} > 0$, где $\tilde{x}$ удовлетворяет условию (3.7).

Нетрудно убедиться в существовании чисел $c_1 = c_1(\beta)$ и $c_2 = c_2(\beta)$ таких, что будут выполняться неравенства

$$c_1 \big|I_{n,i}\big| \le w_n(t) \le c_2 \big|I_{n,i}\big|, \quad t \in I_{n,i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \ge 1, \tag{3.41}$$

и

$$c_1 w_{2n}(t) \le w_n(t) \le c_2 w_{2n}(t), \quad t \in I, \quad n \ge 1. \tag{3.42}$$

Полагая $q = 1$ в неравенствах (3.13) и (3.14) и учитывая (3.41), имеем

$$\Big\|(\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+))\, w_n^{-1/q'}\Big\|_{L_1(I_{n,i})} \le c_3 \big|I_{n,i}\big|^{s-1/q'} \omega\Big(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{n,i}\Big),$$

если $i = 1, \dots, n-1$, и

$$\Big\|(\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+))\, w_n^{-1/q'}\Big\|_{L_1(I_{n,n})} \le c_3 \big|I_{n,n}\big|^{1/q-1/p},$$

где $c_3 = c_3(\beta, s, p, q)$. Рассуждая далее, как при доказательстве оценки (3.19), получаем неравенство

$$\Big\|(\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+))\, w_n^{-1/q'}\Big\|_{L_1(I_+)} \le c^* \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)^{(\beta-1)(s-1/q')}}{n^{\beta(s-1/q')}}\, \omega(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{n,i}) + {}$$
$$+\, c^* \Big\|\tilde{x}^{(r)}\Big\|_{L_p(I_+)} n^{-\beta(1/q-1/p)},$$

где $c^* = c^*(\beta, s, p, q)$. Учитывая неравенство (3.20), вновь приходим к экстремальной задаче вида (3.21) для функции $f_{n-1}(\cdot; a)$ на множестве $\Omega_{s,p,n-1}(b)$, где коэффициенты векторов a и b определяются равенствами (3.22) и (3.23). А поскольку уже доказано (см. (3.31) – (3.33)), что

$$\max_{\omega\in\Omega_{s,p,n-1}(b)} f_{n-1}(\omega; a) \le c\|\tilde{x}\|_{L_p(I_+)} n^{-s+1/q'},$$

получаем

$$\left\|(\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+)) w_n^{-1/q'}\right\|_{L_1(I_+)} \le cn^{-s+1/q'},$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$. Аналогичное неравенство имеет место и для интервала I_-. Освобождаясь, как и выше, от ограничений (3.7), доказываем оценку (3.40) в общем случае.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\Sigma_{+,s,n} := \Sigma_{\beta,s,n}(I_+)$ пространство функций $\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)\colon I_+ \mapsto \mathbb{R}$, которые являются алгебраическими многочленами $\pi_s(\cdot; I_{n,i})$ порядка $\le s$ на промежутках $I_{n,i}$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что построенные выше сплайны $\sigma_{s,n}(\cdot; x; I_+)$, $x \in \Delta_+^s B_p(I)$, принадлежат этому пространству. Легко проверить, что $\dim(\Sigma_{+,s,n}) = sn$ и $\Sigma_{+,s,n} \subseteq \Sigma_{+,s,2n}$, $n \ge 1$.

Пусть точки $t_{sn,i} := t_{\beta,sn,i}$, $i = 0, 1, \ldots, sn$, определены согласно (3.1), с заменой n на sn. Установим взаимно однозначные соответствия между пространствами $\Sigma_{+,s,n}$ и $\mathbb{R}^{sn}$ с помощью линейных операторов дискретизации

$$T_{+,sn} := T_{+,\beta,sn} : \Sigma_{+,s,n} \ni \sigma_{s,n}(\cdot; I_+) \to (\tau_1, \ldots, \tau_{sn}) \in \mathbb{R}^{sn},$$

где

$$\tau_i := (sn)^{-\beta/q}(sn - i + 1)^{(\beta-1)/q}\sigma_{s,n}(t_{sn,i-1}; I_+), \qquad i = 1, \ldots, sn.$$

В обратных отображениях

$$T_{+,sn}^{-1} := T_{+,\beta,sn}^{-1} : \mathbb{R}^{sn} \ni \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{sn}) \to \sigma_{s,n}(\cdot; I_+) \in \Sigma_{+,s,n}$$

сплайны $\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)$ определяются однозначно, в силу условий интерполяции

$$\sigma_{s,n}(t_{sn,i-1}; I_+) := (sn)^{\beta/q}(sn - i + 1)^{-(\beta-1)/q}\tau_i, \qquad i = 1, \ldots, sn. \tag{3.43}$$

Нетрудно убедиться в существовании чисел $c_1 = c_1(\beta, s, q)$ и $c_2 = c_2(\beta, s, q)$ таких, что для всех $\sigma_{s,n}(\cdot; I_+) \in \Sigma_{+,s,n}$ будут выполняться неравенства

$$c_1\left\|T_{+,sn}\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)\right\|_{l_q^{sn}} \le \left\|\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)\right\|_{L_q(I_+)} \le c_2\left\|T_{+,sn}\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)\right\|_{l_q^{sn}}. \tag{3.44}$$

Действительно, пусть

$$\sigma_{s,n}(t; I_+) := \pi_s(t; I_{n,i}), \qquad t \in I_{n,i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\pi_s(\cdot; I_{n,i})$ — произвольные многочлены на $I_{n,i}$ порядка $\le s$. Очевидно, что

$$\left\|\sigma_{s,n}(\cdot; I_+)\right\|_{L_q(I_+)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\pi_s(\cdot; I_{n,i})\right\|_{L_q(I_{n,i})}^q\right)^{1/q}. \tag{3.45}$$

Ясно также, что

$$\left\|\pi_s(\cdot; I_{n,i})\right\|_{L_q(I_{n,i})} \le \left|I_{n,i}\right|^{1/q}\left\|\pi_s(\cdot; I_{n,i})\right\|_{L_\infty(I_{n,i})}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.46}$$

Отметив, что точки $t_{sn,s(i-1)+j-1}$, $j = 1, \ldots, s$, принадлежат промежутку $I_{n,i}$, представим многочлены $\pi_s(\cdot; I_{n,i})$ в следующем виде:

$$\pi_s(t; I_{n,i}) = \sum_{j=1}^{s} \pi_s(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) l_{s,j}(t; I_{n,i}), \quad t \in I_{n,i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.47}$$

где $l_{s,j}(\cdot; I_{n,i})$ — фундаментальные многочлены Лагранжа порядка s такие, что $l_{s,j}(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) = 1$ и $l_{s,j}(t_{sn,s(i-1)+k-1}; I_{n,i}) = 0$, $k \neq j$. Воспользовавшись представлениями (3.47), нетрудно проверить, что

$$\left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_\infty(I_{n,i})} \leq \check{c} \left(\sum_{j=1}^{s} \left| \pi_s(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) \right|^q \right)^{1/q}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.48}$$

где $\check{c} = \check{c}(\beta, s, q)$. Также нетрудно проверить, что

$$\hat{c}_1 \frac{(sn - s(i-1) - j + 1)^{\beta - 1}}{(sn)^\beta} \leq \left| I_{n,i} \right| \leq \hat{c}_2 \frac{(sn - s(i-1) - j + 1)^{\beta - 1}}{(sn)^\beta}, \tag{3.49}$$

где $\hat{c}_1 = \hat{c}_1(\beta, s)$ и $\hat{c}_2 = \hat{c}_2(\beta, s)$, а $j = 1, \ldots, s$ и $i = 1, \ldots, n$. Но тогда из (3.46), (3.48) и (3.49) легко получаем оценки

$$\left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_q(I_{n,i})} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{(sn - s(i-1) - j + 1)^{(\beta-1)/q}}{(sn)^{\beta/q}} \left| \pi_s(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) \right|^q \right)^{1/q},$$

где $c_2 = c_2(\beta, s, q)$ и $i = 1, \ldots, n$. Подставляя эти оценки в равенство (3.45), доказываем справедливость правой части неравенств (3.44).

Остается убедиться в справедливости левой части неравенств (3.44). Используя лемму 2.3, имеем

$$\left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_q(I_{n,i})} \geq c \left| I_{n,i} \right|^{1/q} \left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_\infty(I_{n,i})}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.50}$$

где $c = c(s, q)$. Кроме того, ясно, что при всех $i = 1, \ldots, n$ выполняются неравенства

$$\left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_\infty(I_{n,i})} \geq s^{-1/q'} \left(\sum_{j=1}^{s} \left| \pi_s(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) \right|^q \right)^{1/q}. \tag{3.51}$$

Но тогда из (3.49) – (3.51) следует

$$\left\| \pi_s(\cdot; I_{n,i}) \right\|_{L_q(I_{n,i})} \geq$$

$$\geq c_1 \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{(sn - s(i-1) - j + 1)^{(\beta-1)/q}}{(sn)^{\beta/q}} \left| \pi_s(t_{sn,s(i-1)+j-1}; I_{n,i}) \right|^q \right)^{1/q},$$

где $c_1 = c_1(\beta, s, q)$ и $i = 1, \ldots, n$. Подставляя эти оценки в равенство (3.45), устанавливаем справедливость левой части неравенств (3.44).

С помощью неравенств (3.41) аналогично доказываем, что

$$\dot{c} \left\| T_{+,sn} \sigma_{s,n}(\cdot; I_+) \right\|_{l_1^{sn}} \leq \left\| \sigma_{s,n}(\cdot; I_+) w_n^{-1/q'} \right\|_{L_1(I_+)} \leq \ddot{c} \left\| T_{+,sn} \sigma_{s,n}(\cdot; I_+) \right\|_{l_1^{sn}}, \tag{3.52}$$

где $\dot{c} = \dot{c}(\beta, s, q)$ и $\ddot{c} = \ddot{c}(\beta, s, q)$.

Обозначая $\sigma_{s,n}(t; x; I_+) := \sigma_{s,n}(t; x; I)$, $t \in I_+$, и $n_\nu := 2^\nu$, $\nu \geq 0$, полагаем

$$\delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+) := \begin{cases} \delta_{s,1}(t; x; I_+), & \nu = 0, \\ \delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+) - \delta_{s,n_{\nu-1}}(t; x; I_+), & \nu \geq 1, \end{cases} \quad t \in I_+. \tag{3.53}$$

Очевидно, что $\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\in\Sigma_{+,s,n_\nu}$, $\nu\geq 0$. Кроме того, из (3.40), (3.42) и (3.53) следует, что для каждой функции $x\in\Delta_+^s B_p(I)$ при каждом $\nu\geq 1$ будут выполняться неравенства

$$\left\|\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)w_{n_\nu}^{-1/q'}\right\|_{L_1(I_+)} \leq \check{c}\left\|(x(\cdot)-\sigma_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+))w_{n_\nu}^{-1/q'}\right\|_{L_1(I_+)} +$$
$$+ \hat{c}\left\|(x(\cdot)-\sigma_{s,n_{\nu-1}}(\cdot;x;I_+))w_{n_{\nu-1}}^{-1/q'}\right\|_{L_1(I_+)} \leq$$
$$\leq \bar{c}\,2^{-(s-1/q')\nu}, \tag{3.54}$$

где $\check{c}=\check{c}(\beta,s,p,q)$, $\hat{c}=\hat{c}(\beta,s,p,q)$ и $\bar{c}=\bar{c}(\beta,s,p,q)$.

Используя неравенства (3.52) и (3.54), имеем

$$\left\|T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right\|_{l_1^{sn_\nu}} \leq c_*2^{-(s-1/q')\nu}, \quad \nu\geq 1, \quad x\in\Delta_+^s B_p(I), \tag{3.55}$$

где $c_*=c_*(\beta,s,p,q)$. Но тогда из (3.55) следует, что при каждом $\nu\geq 1$ образ $T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)$ в $\mathbb{R}^{sn_\nu}$ каждого из сплайнов $\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)$, $x\in\Delta_+^s B_p(I)$, принадлежит октаэдру

$$c_*2^{-(s-1/q')\nu}b_1^{sn_\nu} := \left\{\tau \mid \tau\in l_1^{sn_\nu},\ \|\tau\|_{l_1^{sn_\nu}}\leq c_*2^{-(s-1/q')\nu}\right\}.$$

Далее будем использовать стандартные, для методов дискретизации, рассуждения. Зафиксируем произвольное число $c^*>1$ и последовательность натуральных чисел m_ν, $\nu\geq 0$, таких, что $m_\nu\leq sn_\nu$, $\nu\geq 0$. Очевидно, что существует последовательность подпространств $M^{m_\nu}\subseteq\mathbb{R}^{sn_\nu}$, $\nu\geq 1$, имеющих следующие свойства:

$$\dim(M^{m_\nu})\leq m_\nu, \quad \nu\geq 1, \tag{3.56}$$

и

$$E\left(b_1^{sn_\nu}, M^{m_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}} \leq c^* d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}}, \quad \nu\geq 1. \tag{3.57}$$

Зафиксируем произвольное $c_\star>c^*$. Ясно, что существует последовательность линейных отображений $A_{m_\nu}:\mathbb{R}^{sn_\nu}\to M^{m_\nu}$, $\nu\geq 1$, таких, что

$$\sup_{\tau\in b_1^{sn_\nu}}\left\|\tau-A_{m_\nu}\tau\right\|_{l_q^{sn_\nu}} \leq c_\star E\left(b_1^{sn_\nu}, M^{m_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}}, \quad \nu\geq 1. \tag{3.58}$$

Но тогда в силу (3.56) – (3.58) для каждого $\tau\in c_*2^{-(s-1/q')\nu}b_1^{sn_\nu}$ имеем

$$\left\|\tau-A_{m_\nu}\tau\right\|_{l_q^{sn_\nu}} \leq c^\star 2^{-(s-1/q')\nu}d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}}, \quad \nu\geq 1, \tag{3.59}$$

где $c^\star=c_*c^*c_\star$.

Пусть $m_0\leq s$ — фиксированное натуральное число, а M^{m_0} — фиксированное подпространство из $\mathbb{R}^s$ такое, что $\dim(M^{m_0})\leq s$. Полагаем

$$M^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}} := \operatorname{span}\left(\bigcup_{\nu=0}^{\nu^*}M^{m_\nu}\right), \quad \nu^*\geq 0.$$

Тогда очевидно, что $\dim(M^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}})\leq\sum_{\nu=0}^{\nu^*}m_\nu$, $\nu^*\geq 0$.

Пусть

$$\Sigma_{+,s,n_\nu}^{m_\nu} := T_{+,sn_\nu}^{-1}M^{m_\nu}, \quad \nu^*\geq 0, \tag{3.60}$$

где T^{-1}_{+,sn_ν} — отображения, определенные в (3.43). Ясно, что $\Sigma^{m_\nu}_{+,s,n_\nu} \subseteq \Sigma_{+,s,n_\nu}$ и $\dim(\Sigma^{m_\nu}_{+,s,n_\nu}) = \dim(M^{m_\nu})$, $\nu \ge 0$. Определив с помощью пространств $\Sigma^{m_\nu}_{+,s,n_\nu}$ пространства сплайнов

$$\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+,s,n_{\nu^*}} := \operatorname{span}\left(\bigcup_{\nu=0}^{\nu^*} \Sigma^{m_\nu}_{+,s,n_\nu}\right), \qquad \nu^* \ge 0, \tag{3.61}$$

отметим, что $\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+,s,n_{\nu^*}} \subseteq \Sigma_{+,s,n_{\nu^*}}$, $\nu^* \ge 0$, и

$$\dim(\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+,s,n_{\nu^*}}) \le \sum_{\nu=0}^{\nu^*} m_\nu, \qquad \nu^* \ge 0. \tag{3.62}$$

Пусть $A_{m_0} : \mathbb{R}^s \to M^{m_0}$ — фиксированное линейное отображение. Если $\sigma_{s,n_\nu}(\cdot; I_+) \in \Sigma_{+,s,n_\nu}$, $\nu \ge 0$, то полагаем

$$A^{m_\nu}_{+}\sigma_{s,n_\nu}(\cdot; I_+) := T^{-1}_{+,sn_\nu} A_{m_\nu} T_{+,sn_\nu}\sigma_{s,n_\nu}(\cdot; I_+), \qquad \nu \ge 0, \tag{3.63}$$

где $A_{m\nu}$, $\nu \ge 1$, — линейные отображения, удовлетворяющие неравенствам (3.58). Ясно, что все отображения $A^{m_\nu}_{+} : \Sigma_{+,s,n_\nu} \to \Sigma^{m_\nu}_{+,s,n_\nu}$, $\nu \ge 0$, являются линейными.

Обозначим через $\Delta^s_+ B_p \,|\, I_+$ сужение класса $\Delta^s_+ B_p(I)$ на промежуток I_+. Легко убедиться, что $\operatorname{aff}(\Delta^s_+ B_p \,|\, I_+) = \operatorname{span}(\Delta^s_+ B_p \,|\, I_+)$. Очевидно также, что каждая функция $x \in \operatorname{span}(\Delta^s_+ B_p \,|\, I_+)$ представима на I_+ в виде

$$x(t) = (x(t) - \sigma_{s,n_{\nu^*}}(t; x; I_+)) + \sum_{\nu=0}^{\nu^*} \delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+), \qquad \nu^* \ge 0. \tag{3.64}$$

На подпространстве $\operatorname{span}(\Delta^s_+ B_p \,|\, I_+)$ определим линейные операторы

$$A^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+} x(t) := \sum_{\nu=0}^{\nu^*} A^{m_\nu}_{+} \delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+), \qquad t \in I_+, \quad \nu^* \ge 0, \tag{3.65}$$

где отображения $A^{m_\nu}_{+}$ определены согласно (3.63). Ясно, что образы $A^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+} x$ функций $x \in \Delta^s_+ B_p \,|\, I_+$ принадлежат пространству $\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+,s,n_{\nu^*}}$, определенному согласно (3.60) и (3.61), а сами отображения $A^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+}$, определенные согласно (3.63) и (3.65), являются линейными. Очевидно, что в силу (3.63) – (3.65) для всех $x \in \Delta^s_+ B_p \,|\, I_+$, $t \in I_+$ и $\nu^* \ge 0$ имеют место равенства

$$x(t) - A^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+} x(t) = (x(t) - \sigma_{s,n_{\nu^*}}(t; x; I_+)) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu^*} (\delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+) - T^{-1}_{+,sn_\nu} A_{m_\nu} T_{+,sn_\nu} \delta_{s,n_\nu}(t; x; I_+)).$$

Но тогда для $x \in \Delta^s_+ B_p \,|\, I_+$ и $\nu^* \ge 0$ будут выполняться неравенства

$$\left\| x(\cdot) - A^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}_{+} x(\cdot) \right\|_{L_q(I_+)} \le \left\| x(\cdot) - \sigma_{s,n_{\nu^*}}(\cdot; x; I_+) \right\|_{L_q(I_+)} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu^*}\left\|\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-T_{+,sn_\nu}^{-1}A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right\|_{L_q(I_+)}. \tag{3.66}$$

Используя оценку (3.38), имеем

$$\left\|x(\cdot)-\sigma_{s,n_{\nu^*}}(\cdot;x;I_+)\right\|_{L_q(I_+)}\le c2^{-(s-1/q')n_{\nu^*}},\quad \nu^*\ge 0,\quad x\in\Delta_+^s B_p(I), \tag{3.67}$$

где $c=c(\beta,s,p,q)$. Кроме того, при всех $\nu\ge 0$ справедливы равенства

$$T_{+,sn_\nu}\left(\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-T_{+,sn_\nu}^{-1}A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right)=$$

$$=T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+). \tag{3.68}$$

Учитывая соотношения (3.44), (3.55), (3.59) и (3.68), для каждой функции $x\in\Delta_+^s B_p(I)$ при каждом $\nu\ge 1$ получаем

$$\left\|\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-T_{+,sn_\nu}^{-1}A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right\|_{L_q(I_+)}\le$$

$$\le c_2\left\|T_{+,sn_\nu}\left(\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-T_{+,sn_\nu}^{-1}A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right)\right\|_{l_q^{sn_\nu}}=$$

$$=c_2\left\|T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)-A_{m_\nu}T_{+,sn_\nu}\delta_{s,n_\nu}(\cdot;x;I_+)\right\|_{l_q^{sn_\nu}}\le$$

$$\le c2^{-(s-1/q')\nu}d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}}, \tag{3.69}$$

где c_2 — постоянная из правой части (3.44), а $c=c(\beta,s,p,q)$. Если же $\nu=0$, то из (3.44) и (3.68) следует

$$\left\|\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)-T_{+,s}^{-1}A_{m_0}T_{+,s}\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)\right\|_{L_q(I_+)}\le$$

$$\le c_2\left\|T_{+,s}\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)-A_{m_0}T_{+,s}\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)\right\|_{l_q^s}. \tag{3.70}$$

Но тогда для $x\in\Delta_+^s B_p(I)$ и $\nu^*\ge 1$ из (3.66), (3.67), (3.69) и (3.70) следуют неравенства

$$\left\|x(\cdot)-A_+^{m_0,\ldots,m_{\nu^*}}x(\cdot)\right\|_{L_q(I_+)}\le$$

$$\le c2^{-(s-1/q')\nu^*}+c\left\|T_{+,s}\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)-A_{m_0}T_{+,s}\delta_{s,1}(\cdot;x;I_+)\right\|_{l_q^s}+$$

$$+c\sum_{\nu=1}^{\nu^*}2^{-(s-1/q')\nu^*}d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)_{l_q^{sn_\nu}}^{\mathrm{lin}}, \tag{3.71}$$

где $c=c(\beta,s,p,q)$.

При всех $\nu^*\ge 0$ полагаем $m_0:=s$ и определяем оператор $A_{m_0}:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ как тождественное отображение. Тогда при $\nu^*=0$ в силу (3.53), (3.66) и (3.70) имеет место неравенство

$$\left\|x(\cdot)-A_+^{m_0}x(\cdot)\right\|_{L_q(I_+)}\le c, \tag{3.72}$$

где $c=c(\beta,s,p,q)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $s>1$ и $\nu^*=2n$, $n\ge 1$. В этом случае числа m_ν определяем, полагая

$$m_\nu \;:=\; \begin{cases} s\,2^\nu, & \nu = 0,\ldots,n, \\ s\,2^{2n-\nu}, & \nu = n+1,\ldots,2n. \end{cases} \tag{3.73}$$

Легко проверить, что

$$\sum_{\nu=0}^{2n} m_\nu \;\le\; 3s\,2^n, \qquad n \ge 1, \quad s > 1. \tag{3.74}$$

Кроме того, отметим, что так как $m_\nu = sn_\nu$, $\nu = 0, \ldots, n$, то

$$d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)^{\text{lin}}_{l_q^{sn_\nu}} \;=\; d_{sn_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)^{\text{lin}}_{l_q^{sn_\nu}} \;=\; 0, \qquad \nu = 0, \ldots, n. \tag{3.75}$$

Используя соотношения (3.71) и (3.75), получаем

$$\left\| x(\cdot) - A_+^{m_0,\ldots,m_{2n}} x(\cdot) \right\|_{L_q(I_+)} \;\le\; c\,2^{-(s-1/q')2n} \;+$$

$$+\; c \sum_{\nu=n+1}^{2n} 2^{-(s-1/q')\nu} d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)^{\text{lin}}_{l_q^{sn_\nu}}, \tag{3.76}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$. При этом ясно, что

$$2^{-(s-1/q')2n} \;\le\; 2^{-(s-1/2)n}, \qquad n \ge 1. \tag{3.77}$$

Кроме того, из леммы 2.4 и соотношений (3.73) следует

$$d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)^{\text{lin}}_{l_q^{sn_\nu}} \;\le\; \tilde{c}\,2^{-n}\,2^{(1/q+1/2)\nu}, \qquad \nu = n+1, \ldots, 2n,$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}\,(s, q)$. Но тогда

$$\sum_{\nu=n+1}^{2n} 2^{-(s-1/q')\nu} d_{m_\nu}\left(b_1^{sn_\nu}\right)^{\text{lin}}_{l_q^{sn_\nu}} \;\le\; \tilde{c}\,2^{-n} \sum_{\nu=n+1}^{2n} 2^{-(s-3/2)\nu} \;\le\; \bar{c}\,2^{-(s-1/2)n}, \tag{3.78}$$

где $\bar{c} = \bar{c}\,(s, q)$. Подставляя оценки (3.77) и (3.78) в (3.76), получаем

$$\left\| x(\cdot) - A_+^{m_0,\ldots,m_{2n}} x(\cdot) \right\|_{L_q(I_+)} \;\le\; c\,2^{-(s-1/2)n}, \qquad n \ge 1, \quad s > 1, \tag{3.79}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$.

Из неравенств (3.72) и (3.79) сразу же следует

$$E\left(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{+,s,2^{2n}}^{m_0,\ldots,2n}\right)^{\text{lin}}_{L_q(I_+)} \;\le\; c\,2^{-(s-1/2)n}, \qquad n \ge 0, \quad s > 1, \tag{3.80}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$. При этом в силу (3.62) и (3.74) имеем

$$\dim\left(\Sigma_{+,s,2^{2n}}^{m_0,\ldots,m_{2n}}\right) \;\le\; 3s\,2^n, \qquad n \ge 0, \quad s > 1. \tag{3.81}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $s = 1$ и $\nu^* = \lambda n$, $n \ge 1$, где $\lambda :=$ $:= [q/2 + 1]$ — целая часть числа $q/2 + 1$. В этом случае числа m_ν определяем, полагая

$$m_\nu \;:=\; \begin{cases} 2^\nu, & \nu = 0,\ldots,n, \\ 2^{2n}, & \nu = n+1,\ldots,\lambda n. \end{cases} \tag{3.82}$$

Тогда ясно, что

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda n} m_\nu \;\le\; \lambda(n+1)2^n, \qquad n \ge 1. \tag{3.83}$$

Очевидно также, что

$$d_{m_\nu}\left(b_1^{n_\nu}\right)_{l_q^{n_\nu}}^{\text{lin}} = d_{n_\nu}\left(b_1^{n_\nu}\right)_{l_q^{n_\nu}}^{\text{lin}} = 0, \quad \nu = 0, \dots, n. \tag{3.84}$$

Используя соотношения (3.71) и (3.84), получаем

$$\left\| x(\cdot) - A_+^{m_0,\dots,m_{\lambda n}} x(\cdot) \right\|_{L_q(I_+)} \le c\, 2^{-\lambda n/q} + c \sum_{\nu=n+1}^{\lambda n} 2^{-\nu/q} d_{m_\nu}\left(b_1^{n_\nu}\right)_{l_q^{n_\nu}}^{\text{lin}}, \tag{3.85}$$

где $c = c(\beta, p, q)$. При этом ясно, что

$$2^{-\lambda n/q} \le 2^{-n/2}, \quad n \ge 1. \tag{3.86}$$

Кроме того, из леммы 2.4 и соотношений (3.82) следует

$$d_{m_\nu}\left(b_1^{n_\nu}\right)_{l_q^{n_\nu}}^{\text{lin}} \le \tilde{c}\, 2^{-n/2}\, 2^{\nu/q}, \quad \nu = n+1, \dots, \lambda n,$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(q)$. Но тогда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n} 2^{-\nu/q} d_{m_\nu}\left(b_1^{n_\nu}\right)_{l_q^{n_\nu}}^{\text{lin}} \le \bar{c}\, \lambda n\, 2^{-n/2}, \tag{3.87}$$

где $\bar{c} = \bar{c}(q)$. Подставляя оценки (3.86) и (3.87) в (3.85), получаем

$$\left\| x(\cdot) - A_+^{m_0,\dots,m_{\lambda n}} x(\cdot) \right\|_{L_q(I_+)} \le c n\, 2^{-n/2}, \quad n \ge 1, \quad s = 1, \tag{3.88}$$

где $c = c(\beta, p, q)$. А из неравенств (3.72) и (3.88) сразу же следует, что в случае $s = 1$ будет справедлива оценка

$$E\left(\Delta_+^1 B_p,\, \Sigma_{+,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}\right)_{L_q(I_+)}^{\text{lin}} \le c(n+1)2^{-n/2}, \quad n \ge 0, \tag{3.89}$$

где $c = c(\beta, p, q)$. При этом в силу (3.62) и (3.83) имеем

$$\dim\left(\Sigma_{+,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}\right) \le \lambda(n+1)2^n, \quad n \ge 0. \tag{3.90}$$

Отметим, что подпространства $\Sigma_{+,s,2^{2n}}^{m_0,\dots,m_{2n}}$ и $\Sigma_{+,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}$ определены лишь на промежутке I_+. Аналогично мы определим подпространства $\Sigma_{-,s,2^{2n}}^{m_0,\dots,m_{2n}}$ и $\Sigma_{-,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}$ для промежутка I_-. Ясно, что тогда будут выполняться неравенства

$$E\left(\Delta_+^s B_p,\, \Sigma_{-,s,2^{2n}}^{m_0,\dots,m_{2n}}\right)_{L_q(I_-)}^{\text{lin}} \le c\, 2^{-(s-1/2)n}, \quad n \ge 0, \quad s > 1, \tag{3.91}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$, и

$$\dim\left(\Sigma_{-,s,2^{2n}}^{m_0,\dots,m_{2n}}\right) \le 3s\, 2^n, \quad n \ge 0, \quad s > 1. \tag{3.92}$$

Если же $s = 1$, то

$$E\left(\Delta_+^1 B_p,\, \Sigma_{-,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}\right)_{L_q(I_-)}^{\text{lin}} \le c(n+1)2^{-n/2}, \quad n \ge 0, \tag{3.93}$$

где $c = c(\beta, p, q)$, и

$$\dim\left(\Sigma_{-,1,2^{\lambda n}}^{m_0,\dots,m_{\lambda n}}\right) \le \lambda(n+1)2^n, \quad n \ge 0. \tag{3.94}$$

Теперь можно определить необходимые подпространства сплайнов на всем интервале I. Пусть $\sigma_+ \in \Sigma^{m_0,\ldots,m_{2n}}_{+,s,2^{2n}}(I_+)$ и $\sigma_- \in \Sigma^{m_0,\ldots,m_{2n}}_{-,s,2^{2n}}(I_-)$, или $\sigma_+ \in \Sigma^{m_0,\ldots,m_{\lambda n}}_{+,1,2^{\lambda n}}(I_+)$ и $\sigma_- \in \Sigma^{m_0,\ldots,m_{\lambda n}}_{-,1,2^{\lambda n}}(I_-)$. Полагая $\sigma(t) := \sigma_+(t)$ для $t \in (0,1)$, $\sigma(t) := \sigma_-(t)$ для $t \in (-1,0)$ и $\sigma(0) := (\sigma_+(0) + \sigma_-(0))/2$, определяем подпространства $\Sigma^{m_0,\ldots,m_{2n}}_{s,2^{2n}}(I)$ и $\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\lambda n}}_{1,2^{\lambda n}}(I)$ на всем интервале I. Тогда из (3.80), (3.81), (3.91) и (3.92) следуют неравенства

$$E\left(\Delta^s_+ B_p,\, \Sigma^{m_0,\ldots,m_{2n}}_{s,2^{2n}}\right)^{\mathrm{lin}}_{L_q(I)} \le c\, 2^{-(s-1/2)n}, \quad n \ge 0, \quad s > 1, \tag{3.95}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$, и

$$\dim\left(\Sigma^{m_0,\ldots,m_{2n}}_{s,2^{2n}}\right) \le 6s\, 2^n + 1, \quad n \ge 0, \quad s > 1. \tag{3.96}$$

Если же $s = 1$, то из (3.89), (3.90), (3.93) и (3.94) будут следовать неравенства

$$E\left(\Delta^1_+ B_p,\, \Sigma^{m_0,\ldots,m_{\lambda n}}_{1,2^{\lambda n}}\right)^{\mathrm{lin}}_{L_q(I)} \le c(n+1)2^{-n/2}, \quad n \ge 0, \tag{3.97}$$

где $c = c(\beta, p, q)$, и

$$\dim\left(\Sigma^{m_0,\ldots,m_{\lambda n}}_{1,2^{\lambda n}}\right) \le 2\lambda(n+1)2^n + 1, \quad n \ge 0. \tag{3.98}$$

Но тогда при $2 < q < p \le \infty$ из (3.95) и (3.96) легко получаем оценки

$$d_n(\Delta^s_+ B_p)^{\mathrm{kol}}_{L_q} \le d_n(\Delta^s_+ B_p)^{\mathrm{lin}}_{L_q} \le cn^{-s+1/2}, \quad n \ge 1, \quad s \ge 1, \tag{3.99}$$

где $c = c(\beta, s, p, q)$, а из (3.97) и (3.98) — оценки

$$d_n(\Delta^1_+ B_p)^{\mathrm{kol}}_{L_q} \le d_n(\Delta^1_+ B_p)^{\mathrm{lin}}_{L_q} \le cn^{-1/2}(\ln(n+1))^{3/2}, \quad n \ge 1, \tag{3.100}$$

где $c = c(\beta, p, q)$. Необходимые оценки сверху в соотношениях (1.1) и (1.2) следуют из оценок (3.39), (3.99) и (3.100).

4. Доказательство оценок снизу в теореме 1.1. Для того чтобы получить необходимые оценки снизу в соотношениях (1.1) и (1.2), вновь воспользуемся техникой дискретизации. Разбивая интервал $I = (-1, 1)$ точками

$$t^*_{n,i} := -1 + i/(2n), \quad i = 0, 1, \ldots, 4n,$$

на интервалы

$$I^*_{n,i} := (t^*_{n,i-1}, t^*_{n,i}), \quad i = 1, \ldots, 4n,$$

полагаем

$$I^*_{s,n,i} := (t^*_{n,i-1}, t^*_{n,i} + (2(s+1)n)^{-1}), \quad i = 1, \ldots, 4n.$$

Очевидно, что $\left|I^*_{n,i}\right| = (2n)^{-1}$ и $\left|I^*_{s,n,i}\right| = (2(s+1)n)^{-1}$, $i = 1, \ldots, 4n$.

При $s, n \in \mathbb{N}$ и $1 \le q \le \infty$ определяем операторы дискретизации

$$T^*_{s,n} := T^*_{s,q,n} : L_q \ni x \to \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{4n}) \in \mathbb{R}^{4n},$$

задавая координаты τ_i, $i = 1, \ldots, 4n$, вектора τ с помощью $4n$ равенств

$$\tau_i := 2^{-s}\left|I^*_{s,n,i}\right|^{-1/q'} \int\limits_{I^*_{s,n,i}} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k}\binom{s}{k} x\left(t + k\left|I^*_{s,n,i}\right|\right)\right) dt. \tag{4.1}$$

Если воспользоваться неравенством Гельдера, то нетрудно убедиться, что

$$\|x\|_{L_q(I)} \geq \left\|T_{s,n}^* x\right\|_{l_q^{4n}}, \qquad x \in L_q(I), \quad 1 \leq q \leq \infty. \tag{4.2}$$

Полагая

$$\varphi_{0,n,i}(t) := \begin{cases} 1, & t \in I_{n,i}^*, \\ 0, & t \in I \setminus I_{n,i}^*, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 4n, \tag{4.3}$$

определяем при $s \in \mathbb{N}$ следующие функции:

$$\varphi_{s,n,i}(t) := \int_{-1}^{t} \varphi_{s-1,n,i}(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I, \quad i = 1, \ldots, 4n. \tag{4.4}$$

При $s \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\psi_{s,n,i}(t) := \left\|\varphi_{s,n,i}\right\|_{L_\infty(I)}^{-1} \varphi_{s,n,i}(t), \qquad t \in I, \quad i = 1, \ldots, 4n, \tag{4.5}$$

и обозначаем через $\Psi_s^{4n} := \{\psi_{s,n,i}\}_{i=1}^{4n}$ соответствующий набор из $4n$ функций $\psi_{s,n,i}$. Через $S_1^+(\Psi_s^{4n})$ обозначим 1-сектор по системе Ψ_s^{4n}. Напомним, что определение (неотрицательных) p-секторов по заданным системам функций приведено перед формулировкой леммы 2.5.

Очевидно, что $\Delta_+^s B_\infty \supset S_1^+(\Psi_s^{4n})$ и, следовательно,

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \geq d_n(S_1^+(\Psi_s^{4n}))_{L_q}^{\mathrm{kol}}. \tag{4.6}$$

Полагая $T_{s,n}^* \Psi_s^{4n} := \{T_{s,n}^* \psi_{s,n,i}\}_{i=1}^{4n}$, через $S_1^+(T_{s,n}^* \Psi_{r,s}^{4n})$ обозначаем 1-сектор, порождаемый системой $T_{s,n}^* \Psi_{r,s}^{4n}$. Ясно, что в силу (4.2) выполняется неравенство

$$d_n(S_1^+(\Psi_s^{4n}))_{L_q}^{\mathrm{kol}} \geq d_n(S_1^+(T_{s,n}^* \Psi_{r,s}^{4n}))_{l_q^{4n}}^{\mathrm{kol}}. \tag{4.7}$$

Учитывая соотношения (4.3) – (4.5), имеем

$$\int_{I_{s,n,j}^*} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \psi_{s,n,i}\left(t + k\left|I_{s,n,j}^*\right|\right) \right) dt =$$

$$= \int_{I_{s,n,j}^*} \int_0^{\left|I_{s,n,j}^*\right|} \ldots \int_0^{\left|I_{s,n,j}^*\right|} \psi_{s,n,i}^{(s)}(t + t_1 + \ldots + t_s)\, dt\, dt_1 \ldots dt_s =$$

$$= \int_{I_{s,n,j}^*} \int_0^{\left|I_{s,n,j}^*\right|} \ldots \int_0^{\left|I_{s,n,j}^*\right|} \frac{\varphi_{0,n,i}(t + t_1 + \ldots + t_s)}{\left\|\varphi_{s,n,i}\right\|_{L_\infty(I)}}\, dt\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Но тогда

$$\int_{I_{s,n,i}^*} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \psi_{s,n,i}\left(t + k\left|I_{s,n,i}^*\right|\right) \right) dt = \frac{\left|I_{s,n,i}^*\right|^{s+1}}{\left\|\varphi_{s,n,i}\right\|_{L_\infty(I)}}, \qquad i = j, \tag{4.8}$$

и

$$\int_{I_{s,n,j}^*} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \psi_{s,n,i}\left(t + k\left|I_{s,n,j}^*\right|\right) \right) dt = 0, \qquad i \neq j. \tag{4.9}$$

Пусть $E^{4n} := \{e^i\}_{i=1}^{4n}$ — стандартная система векторов $e^1 := (1, 0, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e^{4n} := (0, \ldots, 0, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{4n}$. Тогда из (4.1), (4.8) и (4.9) следует

$$T_{s,n}^* \psi_{s,n,i} = 2^{-2s-1/q}(s+1)^{-s-1/q} \left\| \varphi_{s,n,i} \right\|_{L_\infty(I)}^{-1} n^{-s-1/q} e^i, \quad i = 1, \ldots, 4n. \tag{4.10}$$

Кроме того, из (4.3) и (4.4) следуют неравенства

$$\left\| \varphi_{s,n,i} \right\|_{L_\infty(I)} \le 2^{s-2} n^{-1}, \quad i = 1, \ldots, 4n. \tag{4.11}$$

Пусть $c^* := 2^{-3s+2-1/q}(s+1)^{-s-1/q}$ и $a := (a_1, \ldots, a_{4n}) \in \mathbb{R}^{4n}$. Тогда из (4.10) и (4.11) следует, что множество

$$c^* n^{-s+1/q'} S_1^+(E^{4n}) := \left\{ \tau \mid \tau := \sum_{i=1}^{4n} a_i e^i, \ \|a\|_{l_1^{4n}} \le c^* n^{-s+1/q'} \right\}$$

содержится в 1-секторе $S_1^+ \ (T_{s,n}^* \Psi_s^{4n})$, порождаемом системой $T_{s,n}^* \Psi_s^{4n}$. Поэтому

$$d_n(S_1^+(T_{s,n}^* \Psi_s^{4n}))_{l_1^{4n}}^{\text{kol}} \ge c^* n^{-s+1/q'} d_n(S_1^+(E^{4n}))_{l_q^{4n}}^{\text{kol}}. \tag{4.12}$$

Воспользовавшись леммой 2.5, в которой заменим n на $4n$, и положив $m = n$, получим

$$d_n(S_1^+(E^{4n}))_{l_q^{4n}}^{\text{kol}} \ge c_* n^{-(1/2-1/q)_+}, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{4.13}$$

где $c_* = c_*(q)$. Но тогда из (4.6), (4.7), (4.12) и (4.13) следует неравенство

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty^r)_{L_q}^{\text{kol}} \ge c n^{-s+\min\{1/q', 1/2\}}, \quad n \ge 1, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{4.14}$$

где $c = c(s, q)$. Если же $1 \le q < p \le \infty$, то оценки

$$d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\text{lin}} \ge d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_q}^{\text{kol}} \ge c n^{-s+\min\{1/q', 1/2\}}, \quad n \ge 1, \quad s \ge 1, \tag{4.15}$$

где $c = c(s, p, q)$, непосредственно следуют из (4.14). На этом доказательство оценок снизу в соотношениях (1.1) и (1.2) завершено. Остается лишь объединить оценки сверху, установленные в третьем пункте, с оценками снизу (4.15), чтобы завершить доказательство теоремы 1.1.

1. *Bullen P. S.* A criterion for n-convexity // Pacif. J. Math. – 1971. – **36**. – P. 81 – 98.
2. *Roberts A. W., Varberg D. E.* Convex functions. – New York: Acad. Press, 1973. – 300 p.
3. *Pečarić J. E., Proschan F., Tong Y. L.* Convex functions, partial orderings, and statistical applications // Math. Sci. and Eng. – Boston: Acad. Press, 1992. – **187**.
4. *Коновалов В. Н.* Формосохраняющие поперечники типа Колмогорова классов s-монотонных интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 2004. – **55**, № 7. – С. 901 – 926.
5. *Konovalov V. N.* Shape preserving widths of Kolmogorov-type of the classes of positive, monotone, and convex integrable functions // E. J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 93 – 117.
6. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval, II // J. Approxim. Theory. – 2001. – **113**. – P. 266 – 297.
7. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on a finite interval // Constr. Approxim. – 2003. – **19**. – P. 23 – 58.
8. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Isr. J. Math. – 2003. – **133**. – P. 239 – 268.
9. *De Vore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 449 p.
10. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. – 1986. – **120**, № 1. – С. 180 – 189.

Получено 26.10.2004