УДК 517.9

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК*

We establish new properties of $C^1(0,+\infty)$-solutions of the functional-differential equation $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt)$ in neighborhoods of the singular points $t = 0$ and $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості $C^1(0,+\infty)$-розв'язків лінійного диференціально-функціонального рівняння $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt)$ в околі особливих точок $t = 0$ і $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается линейное дифференциально-функциональное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, $t \in (0, +\infty)$. Различные частные случаи таких уравнений изучались многими математиками, и в настоящее время имеется ряд интересных результатов, касающихся изучения свойств его решений. Так, в [1] достаточно полно исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $c = 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $a = 0$, $c = 0$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения (1) при $c = 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $|c| > 1$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] определены мажоранты для решений уравнения (1). Несмотря на обилие результатов, посвященных исследованию асимптотических свойств решений широких классов дифференциально-функциональных уравнений и их важные приложения [7], многие вопросы теории дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены недостаточно. Особенно это касается свойств решений уравнения (1) в окрестностях особых точек $t = 0$ и $t = +\infty$, исследование которых является основной целью настоящей работы. Полученные в ней результаты дополняют и развивают известные результаты многих математиков (см. [1, 8 – 10] и приведенную в них библиографию), посвященные исследованию асимптотических свойств решений линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа с переменными и постоянными отклонениями аргумента.

Рассмотрим сначала случай, когда $t \in (0, 1]$.

Для исследования поведения решений уравнения (1) в окрестности нуля выполним замену переменных

$$x(t) = z\left(\frac{1}{t}\right), \quad x(qt) = z\left(\frac{1}{qt}\right), \quad \frac{d}{dt}x(t) = z'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

$$x'(qt) = z'\left(\frac{1}{qt}\right)\left(-\frac{1}{q^2t^2}\right), \quad t = \frac{1}{q\tau}.$$

В результате получим уравнение

$$z'(\tau) = \frac{1}{c\tau^2}(az(q\tau) + bz(\tau)) + \frac{q^2}{c}z'(q\tau), \tag{2}$$

* Виконано при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України з питань науки і технологій.

которое можно записать в виде

$$z(\tau) = \frac{q}{c}z(q\tau) + \left(z(1) - \frac{q}{c}z(q) \right) e^{\frac{b}{c}(1-1/\tau)} + \frac{ac+bq}{c^2} e^{\frac{b}{c}(1-1/\tau)} \int_1^\tau e^{-\frac{b}{c}(1-1/s)} \frac{z(qs)}{s^2} ds.$$

Обозначая

$$f(\tau) \overset{\text{df}}{=} \left(z(1) - \frac{q}{c}z(q) \right) e^{\frac{b}{c}(1-1/\tau)} + \frac{ac+bq}{c^2} e^{\frac{b}{c}(1-1/\tau)} \int_1^\tau e^{-\frac{b}{c}(1-1/s)} \frac{z(qs)}{s^2} ds, \qquad (3)$$

получаем уравнение

$$z(\tau) = \frac{q}{c}z(q\tau) + f(\tau). \qquad (4)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{a, b, c\} \subset R,\ 0 < q < 1$. *Тогда*:

1) *при* $0 < |c| < q$ *решение уравнения* (1) *имеет правосторонний предел в нуле тогда и только тогда, когда оно ограничено в окрестности нуля*;

2) *при* $|c| > q$ *все решения уравнения* (1) *имеют правосторонний предел в нуле*.

Докажем первое утверждение теоремы. Существование правостороннего предела в нуле у решения $x(t)$ очевидным образом подразумевает его ограниченность в окрестности нуля.

Обратно, пусть $x(t)$, а значит, и $z(\tau)$ ограничены на отрезках $(0, 1]$ и $[q^{-1}, +\infty)$ соответственно. Тогда легко показать, что интеграл в (3) сходится абсолютно при $\tau \to +\infty$, т. е. существует конечный предел $\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) \overset{\text{df}}{=} M$. Поскольку коэффициенты уравнения (1) являются действительными числами, без ограничения общности считаем, что $x(t) \in R$ для любого $t > 0$ и, следовательно, $M \in R$.

Из уравнения (4) следует

$$z(q^{-j}\tau) = \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} z(q\tau) + \left(\frac{q}{c}\right)^{j} f(\tau) + \left(\frac{q}{c}\right)^{j-1} f(q^{-1}\tau) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q}{c} f(q^{-j+1}\tau) + f(q^{-j}\tau), \qquad j \geq 1.$$

Предположим, что $q > c > 0$. Тогда из определения предела $\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) = M$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L: \tau > L \Rightarrow M + \varepsilon > f(\tau) > M - \varepsilon$$

и

$$z(q^{-j}\tau) = \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} z(q\tau) + \left(\frac{q}{c}\right)^{j} f(\tau) + \left(\frac{q}{c}\right)^{j-1} f(q^{-1}\tau) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q}{c} f(q^{-j+1}\tau) + f(q^{-j}\tau) > \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} z(q\tau) +$$

$$+ \left(\left(\frac{q}{c}\right)^{j} + \left(\frac{q}{c}\right)^{j-1} + \ldots + \frac{q}{c} + 1 \right)(M - \varepsilon) =$$

$$= \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} z(q\tau) + \frac{(q/c)^{j+1} - 1}{q/c - 1}(M - \varepsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} \left(z(q\tau) + \frac{M-\varepsilon}{q/c-1} \right) - \frac{M-\varepsilon}{q/c-1}.$$

Итак,

$$z(q^{-j}\tau) > \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} \left(z(q\tau) + \frac{M-\varepsilon}{q/c-1} \right) - \frac{M-\varepsilon}{q/c-1}.$$

Учитывая, что $z(\tau)$ — ограниченная на отрезке $[1, +\infty)$ функция, получаем

$$z(q\tau) + \frac{M-\varepsilon}{q/c-1} \leq 0,$$

т. е.

$$z(q\tau) \leq \frac{-M}{q/c-1} + \frac{\varepsilon}{q/c-1}$$

при $\tau > L$. В противном случае $z(\tau)$ — неограниченная на $[1, +\infty)$ функция, что противоречит предположению. Аналогично имеем

$$z(q^{-j}\tau) < \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1} z(q\tau) + \frac{(q/c)^{j+1}-1}{q/c-1}(M+\varepsilon) =$$

$$= \left(\frac{q}{c}\right)^{j+1}\left(z(q\tau) + \frac{M+\varepsilon}{q/c-1}\right) - \frac{M+\varepsilon}{q/c-1},$$

откуда (в силу ограниченности $z(\tau)$)

$$z(q\tau) + \frac{M+\varepsilon}{q/c-1} \geq 0$$

или

$$z(q\tau) \geq \frac{-M}{q/c-1} - \frac{\varepsilon}{q/c-1}$$

при $\tau > L$. Суммируя результаты, получаем

$$-\frac{M}{q/c-1} - \frac{\varepsilon}{q/c-1} \leq z(q\tau) \leq -\frac{M}{q/c-1} + \frac{\varepsilon}{q/c-1}$$

при $\tau > L$.

Рассмотрим случай $-q < c < 0$. Тогда

$$z(\tau) = \frac{q}{c} z(q\tau) + f(\tau) =$$

$$= \left(\frac{q}{c}\right)^2 z(q^2\tau) + \frac{q}{c} f(q\tau) + f(\tau) = \left(\frac{q}{c}\right)^2 z(q^2\tau) + f_1(\tau),$$

где

$$f_1(\tau) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{q}{c} f(q\tau) + f(\tau) \to \left(\frac{q}{c} + 1\right) M$$

при $\tau \to +\infty$. Следовательно, мы свели задачу к только что рассмотренному случаю $q > c > 0$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем второе утверждение теоремы. Из уравнения (2) непосредственно следует

$$|z'(\tau)| \leq \frac{1}{\tau^2 |c|}(|b||z(\tau)| + |a||z(q\tau)|) + \frac{q^2}{|c|}|z'(q\tau)|.$$

Интегрируя последнее неравенство на отрезке $[1, t]$, находим

$$\int_1^t |z'(\tau)| d\tau \leq \frac{|b|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(\tau)|}{\tau^2} d\tau + \frac{|a|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(q\tau)|}{\tau^2} d\tau + \frac{q}{|c|}\int_q^{qt} |z'(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{|b|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(\tau)|}{\tau^2} d\tau + \frac{|a|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(q\tau)|}{\tau^2} d\tau + \frac{q}{|c|}\int_q^1 |z'(\tau)| d\tau + \frac{q}{|c|}\int_1^{qt} |z'(\tau)||d\tau|. \qquad (5)$$

Обозначим

$$\int_1^u |z'(\tau)||d\tau| \overset{\text{df}}{=} s(u),$$

где $u > 0$. Тогда при $\tau > 0$ имеем

$$\left|z(\tau)\right| \le s(\tau) + \left|z(1)\right|.$$

Если $1 \le t \le q^{-1}$, то

$$s(qt) = \int_1^{qt} |z'(\tau)||d\tau| \le \int_q^{qt} |z'(\tau)|d\tau + \int_{qt}^1 |z'(\tau)|d\tau =$$

$$= \int_q^1 |z'(\tau)|d\tau \overset{\text{df}}{=} N \le N + s(t).$$

При $t \ge q^{-1}$ находим

$$s(qt) = \int_1^{qt} |z'(\tau)|d\tau \le \int_1^t |z'(\tau)|d\tau = s(t) \le s(t) + N.$$

Таким образом, при $t \ge 1$ имеем $s(qt) \le s(t) + N$.

Из (5) следует

$$s(t) \le \frac{|b|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(1)| + s(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{|a|}{|c|}\int_1^t \frac{|z(1)| + N + s(\tau)}{\tau^2}d\tau +$$

$$+ \frac{q}{|c|}N + \frac{q}{|c|}(N + s(t)) \le K + \frac{|b| + |a|}{|c|}\int_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{q}{|c|}s(t),$$

где

$$K = \frac{|b||z(1)| + |a||z(1)| + |a|N}{|c|}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\tau^2}d\tau + \frac{2q}{|c|}N,$$

или (в силу того, что $q < \left|c\right|$)

$$s(t) \le \left(1 - \frac{q}{|c|}\right)^{-1} K + \left(1 - \frac{q}{|c|}\right)^{-1}\frac{|b| + |a|}{|c|}\int_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau = F + M\int_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau,$$

где

$$F = \left(1 - \frac{q}{|c|}\right)^{-1} K, \quad M = \left(1 - \frac{q}{|c|}\right)^{-1}\frac{|b| + |a|}{|c|}.$$

Отсюда и из леммы Гроноулла – Беллмана следует

$$s(t) \le Fe^{M\int_1^t \frac{1}{s^2}ds} \le Fe^{M\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2}ds},$$

т. е.

$$\int_1^{+\infty} |z'(\tau)||d\tau| = \int_0^1 |\dot{x}(t)|dt \le Fe^{M\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2}ds}.$$

Теорема доказана.

Перейдем к исследованию устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. *Если* $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, $a < 0$ *и* $\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{q}\right| < 1$, *то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Запишем уравнение (1) в эквивалентной (в классе $C^1(0, +\infty)$-решений) интегральной форме

$$x(t) = \frac{c}{q}x(qt) + \left(x(1) - \frac{c}{q}x(q)\right)e^{a(t-1)} + \frac{bq+ac}{q}\int_1^t e^{a(t-s)}x(qs)\,ds. \tag{6}$$

Покажем, что нулевое решение уравнения (6) асимптотически устойчиво в классе $C[q, +\infty)$-решений. С этой целью решим задачу

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{q}x(qt) + \left(g(1) - \dfrac{c}{q}g(q)\right)e^{a(t-1)} + \dfrac{bq+ac}{q}\displaystyle\int_1^t e^{a(t-s)}x(qs)\,ds, & t > 1, \\ g(t), & t \in [q, 1], \end{cases} \tag{7}$$

где $g(t)$ — некоторая функция из класса $C[q, 1]$, с помощью метода последовательных приближений, которые определим соотношениями

$$x_m(t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c}{q}x_{m-1}(qt) + \left(g(1) - \dfrac{c}{q}g(q)\right)e^{a(t-1)} + \dfrac{bq+ac}{q}\displaystyle\int_1^t e^{a(t-s)}x_{m-1}(qs)\,ds, & t > 1, \\ g(t), & t \in [q, 1], \end{cases} \tag{8}$$

$$m \geq 1,$$

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 2, \\ g(1)(2-t), & 1 < t < 2, \\ g(t), & t \in [q, 1]. \end{cases}$$

В силу (8) при $t \geq 2q^{-1}$ имеем

$$\left|x_1(t) - x_0(t)\right| = \left|x_1(t)\right| =$$

$$= \left|\left(g(1) - \frac{c}{q}g(q)\right)e^{a(t-1)} + \frac{bq+ac}{q}\int_1^{2q^{-1}} e^{a(t-s)}x_0(qs)\,ds\right| = K_1 e^{at},$$

где

$$K_1 = \left|\left(g(1) - \frac{c}{q}g(q)\right)e^{-a} + \frac{bq+ac}{q}\int_1^{2q^{-1}} e^{-as}x_0(qs)\,ds\right|.$$

Тогда, очевидно, $\left|x_1(t) - x_0(t)\right| \leq Ke^{at}$, $t \geq q$, где K — некоторая константа. Поскольку $a < 0$, то при всех $t > 1$ находим

$$\left|x_2(t) - x_1(t)\right| \leq \left|\frac{c}{q}\right|\left|x_1(qt) - x_0(qt)\right| + \left|\frac{bq+ac}{q}\right|\int_1^t e^{a(t-s)}\left|x_1(qs) - x_0(qs)\right|ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{c}{q}\right|Ke^{aqt} + \left|\frac{bq+ac}{q}\right|\int_1^t e^{a(t-s)}Ke^{aqs}\,ds =$$

$$= \left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{bq+ac}{q}\right|\frac{1 - e^{a(q-1)(1-t)}}{|a|(1-q)}\right)Ke^{aqt} \leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{bq+ac}{q}\right|\frac{1}{|a|(1-q)}\right)Ke^{aqt}.$$

Рассуждая по индукции, получаем

$$\left|x_{m+1}(t)-x_m(t)\right| \le K\left(\left|\frac{c}{q}\right|+\left|\frac{bq+ac}{q}\right|\frac{1}{|a|(1-q)}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\left|\frac{c}{q}\right|+\left|\frac{bq+ac}{q}\right|\frac{1}{|a|(1-q^m)}\right)e^{aq^m t} \overset{\text{df}}{=} K_m e^{aq^m t}, \quad m \ge 1. \tag{9}$$

Поскольку $a<0$, $\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| < 1$, из (9) непосредственно следует, что последовательность непрерывных функций $\{x_m(t)\}$ равномерно сходится при $t \in \in [q, +\infty)$ к непрерывному решению $x_*(t)$ уравнения (7), для которого справедлива оценка

$$\left|x_*(t)\right| \le \sum_{m=0}^{+\infty}|x_{m+1}(t)-x_m(t)| \le Ke^{at} + \sum_{m=1}^{+\infty}K_m e^{aq^m t}, \quad t \ge 2.$$

Легко показать, что функция $x_*(t)$ является единственным решением задачи (7). Следовательно, она непрерывна при $t \in [q, +\infty)$ и стремится к нулю, когда $t \to +\infty$.

Множество $C[q, +\infty)$-решений уравнения (6) является множеством решений задачи (7) при различных „начальных" функциях $g(t)$ из класса $C[q, 1]$. Следовательно, решения уравнения (6) стремятся к нулю, когда $t \to +\infty$. Поскольку константа K в изложенных выше рассуждениях зависит лишь от величины $\sup_{t\in[q,1]}|g(t)|$, имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения.

Теорема доказана.

Исследуем свойства ограниченных на отрезке $[1, +\infty)$ решений уравнения (1) при $t \to +\infty$.

Теорема 3. *Если* $\{a, b, c\} \subset R$, $0<q<1$, $b/c>0$ *и* $\left|\frac{q}{c}\right| + 2\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| < 1$, *то ограниченные на отрезке* $[1, +\infty)$ *решения* (1) *удовлетворяют соотношению*

$$\left|x(t)\right| \le \left(1-\left|\frac{q}{c}\right|-\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right)^{-1}\left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right| e^{\left(-\frac{b}{c}+\left(1-\left|\frac{q}{c}\right|-\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\right)(t-1)}$$

при $t \ge 1$, *где*

$$-\frac{b}{c} + \left(1-\left|\frac{q}{c}\right|-\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right| < 0.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \frac{q}{c}x(q^{-1}t) + \left(x(1)-\frac{c}{q}x(q^{-1})\right)e^{-\frac{b}{c}(t-1)} -$$

$$-\left(\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right)\int_1^t e^{-\frac{b}{c}(t-s)}x(q^{-1}s)\,ds, \tag{10}$$

эквивалентное уравнению (1) в классе $C^1(0, +\infty)$-решений. Предположим, что $x(t)$ ограничено на отрезке $[1, +\infty)$. Из (10) получаем

$$\left|x(t)\right| \le \left|\frac{q}{c}\right|\left|x(q^{-1}t)\right| + \left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right|e^{-\frac{b}{c}(t-1)} +$$

$$+\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\int_1^t e^{-\frac{b}{c}(t-s)}\left|x(q^{-1}s)\right|ds.$$

Определим $\nu(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{s\ge t}|x(s)|$ (в силу ограниченности $x(t)$ функция $\nu(t)$ определена).

Поскольку $b/c>0$, для $t_1 \ge t \ge 1$ находим

$$|x(t_1)| \le \left|\frac{q}{c}\right|\nu(t) + \left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right|e^{-\frac{b}{c}(t_1-1)} +$$

$$+ \left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\int_1^t e^{-\frac{b}{c}(t_1-s)}\left|x(q^{-1}s)\right|ds + \left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\int_1^{t_1} e^{-\frac{b}{c}(t_1-s)}\left|x(q^{-1}s)\right|ds \le$$

$$\le \left|\frac{q}{c}\right|\nu(t) + \left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right|e^{-\frac{b}{c}(t-1)} +$$

$$+ \left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\int_1^t e^{-\frac{b}{c}(t-s)}\nu(s)\,ds + \left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\frac{c}{b}\nu(t).$$

Отсюда следует, что $|x(t_1)|$ можно заменить на $\nu(t)$. Учитывая, что

$$L \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| < 1,$$

имеем

$$\nu(t)e^{\frac{b}{c}(t-1)} \le (1-L)^{-1}\left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right| + (1-L)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\int_1^t e^{\frac{b}{c}(s-1)}\nu(s)\,ds,$$

и в силу леммы Гронуолла – Беллмана получаем

$$\nu(t) \le (1-L)^{-1}\left|x(1)-\frac{q}{c}x(q^{-1})\right|e^{\left(-\frac{b}{c}+(1-L)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right|\right)(t-1)}.$$

Покажем, что из условий теоремы следует

$$-\frac{b}{c} + (1-L)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right| < 0.$$

Действительно,

$$-\frac{b}{c} + (1-L)^{-1}\left|\frac{a}{c}+\frac{bq}{c^2}\right| = -\frac{b}{c} + (1-L)^{-1}\left(L-\left|\frac{q}{c}\right|\right)\frac{b}{c} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2L - \left|\frac{q}{c}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{q}{c}\right| + 2\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| < 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $\{a,b,c\}\subset R$, $0<q<1$, $a>0$ *и* $\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right| < 1$, *то решения уравнения* (1), *ограниченные на отрезке* $[1,+\infty)$, *удовлетворяют условию* $x(t)=O(t^u)$, $t\to+\infty$, *где*

$$u = \frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\left|\frac{c}{q}\right|+\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right|\right).$$

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$\dot{x}(t+s) = ax(t+s) + bx\big(q(t+s)\big) + c\dot{x}(q(t+s)), \tag{11}$$

где $s\ge 0$. Пусть решение $x(t)$ ограничено на отрезке $[1,+\infty)$ и $a>0$. Умножая уравнение (11) на e^{-as} и интегрируя его по s на отрезке $[0,+\infty)$, получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-as}\dot{x}(t+s)\,ds = a\int_0^{+\infty} e^{-as}x(t+s)\,ds +$$

$$+\; b\int_0^{+\infty} e^{-as}x(q(t+s))\,ds + c\int_0^{+\infty} e^{-as}\dot{x}(q(t+s))\,ds,$$

$$x(t) = \frac{c}{q}x(qt) - \left(b+\frac{ca}{q}\right)\int_0^{+\infty} e^{-as}x(q(t+s))\,ds. \tag{12}$$

Определим $\nu(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{s\geq t}|x(s)|$ (в силу ограниченности $x(t)$ функция $\nu(t)$ определена). Для любого $t_1 \geq t \geq 1$ из (12) находим

$$|x(t_1)| \leq \left|\frac{c}{q}\right||x(qt_1)| + \left(b+\frac{ca}{q}\right)\int_0^{+\infty} e^{-as}|x(q(t_1+s))|\,ds \leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right|\right)\nu(qt).$$

Следовательно,

$$\nu(t) \leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right|\right)\nu(qt).$$

Поскольку

$$\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right| < 1,$$

$\nu(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Оценим „скорость”, с которой $\nu(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Для оценки функции $\nu(t)$ выполним замену переменной $\nu(t) = t^u y(t)$, где

$$u = \frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right|\right).$$

В результате получим неравенство

$$t^u y(t) \leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{q}\right|\right) q^u t^u y(qt) \Leftrightarrow y(t) \leq y(qt).$$

Следовательно, $y(t)$ ограничена на $[1, +\infty)$.

Теорема доказана.

Найдем достаточное условие единственности ограниченного на отрезке $[1, +\infty)$ ненулевого решения уравнения (1).

Теорема 5. *Если* $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, $b/c > 0$ *и* $2\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| < 1$, *то*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-\frac{b}{c}q^{-k}t},$$

где

$$x_k = \frac{ac + bq^{-k+1}}{bc(q^{-k}-1)}x_{k-1}, \qquad k \geq 1,$$

x_0 — *произвольно, будет единственным с точностью до* x_0 *ненулевым ограниченным на отрезке* $[1, +\infty)$ *решением уравнения* (1).

Доказательство. Пусть (H, ρ) — полное метрическое пространство ограниченных функций из класса $C[1, +\infty)$ с метрикой $\rho(x, y) = \sup_{1\leq t}|x(t) - y(t)|$. Определим оператор F на основании уравнения (10), эквивалентного уравнению (1) (в классе $C^1[1, +\infty)$-решений):

$$(Fx)(t) = \frac{q}{c}x(q^{-1}t) + \left(g_1 - \frac{q}{c}x(q^{-1})\right)e^{-\frac{b}{c}(t-1)} -$$

$$- \left(\frac{a}{c} + \frac{bq}{c^2}\right)\int_1^t e^{-\frac{b}{c}(t-s)} x(q^{-1}s)\,ds, \qquad t \geq 1,$$

где g_1 — произвольное комплексное число. Поскольку $b/c > 0$, то $F: H \to H$ и

$$\rho(Fx, Fy) \leq \left(2\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right|\right)\rho(x, y).$$

Согласно предположению

$$2\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| < 1,$$

следовательно, F — оператор сжатия, для которого в H существует единственная неподвижная точка.

Теорема доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta}F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Math. – 1953. – **15**. – P. 449 – 464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. – 1971. – **243**. – P. 249 – 254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 119 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 12 – 16.
6. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 1. – С. 48 – 52.
7. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. – 1980. – **809**. – 267 p.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
9. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Воронеж. ун-т, 1990. – 168 с.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. – 288 с.

Получено 10.10.2003,
после доработки — 28.01.2005