УДК 517.5

О. І. Степанець, А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДНУ ЕКСТРЕМАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДОДАТНИХ РЯДІВ

In the series of works, O. I. Stepanets' and his successors study approximation properties of the spaces S^p_φ introduced by Stepanets'. Problems of finding exact values of n-term approximations of q-ellipsoids in the spaces considered are reduced to some extremal problems for series with terms that are determined as a product of elements of two nonnegative sequences one of which is fixed and another varies on certain set.

Since solutions of these extremal problems may be of an independent interest, in the present paper, the authors propose a new method of finding these solutions ,which leads to the required result by essentially shorter and more transparent way.

У циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників вивчаються апроксимаційні властивості введених ним просторів S^p_φ. При цьому задачі, пов'язані із знаходженням точних значень n-членних наближень q-еліпсоїдів у цих просторах, зводяться до певних екстремальних задач для рядів із членами, що є добутком елементів двох невід'ємних послідовностей, одна з яких є фіксованою, а інша варіюється на певній множині.

Зважаючи на те, що розв'язки цих екстремальних задач можуть складати і самостійний інтерес, у даній роботі запропоновано новий метод знаходження їх розв'язків, який приводить до мети суттєво коротшим і прозорішим шляхом.

Вступ. Нехай $\mathcal{M}$ — множина всіх послідовностей $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ невід'ємних чисел, $m_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, таких, що $|m| \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1$.

Нехай, далі, r — деяке додатне число і $\mathcal{A}_r$ — множина всіх незростаючих послідовностей $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ додатних чисел, $\alpha_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. При цьому у випадку, коли $r \in (0, 1)$, вимагається, щоб $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)} < \infty$.

Позначимо через $\gamma_n = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ довільний набір із n різних натуральних чисел і покладемо для будь-яких $m \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{A}_r$ і $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{E}_n(m) = \mathscr{E}_n(\alpha, r, m) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \tag{1}$$

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\alpha, r) \overset{\text{df}}{=} \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(\alpha, r, m). \tag{2}$$

З означення множин $\mathcal{M}$ і $\mathcal{A}_r$ випливає, що ряд у правій частині співвідношення (1) збігається, і тому величини $\mathscr{E}_n(\alpha, r, m)$ і $\mathscr{E}_n(\alpha, r)$ мають зміст.

У циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників (див., наприклад, [1 – 19]) вивчаються апроксимаційні властивості введених ним просторів S^p_φ. При цьому задачі, пов'язані із знаходженням точних значень найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів у цих просторах, базуються на наступних твердженнях.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 1$, *і* $\mathscr{E}_n(\alpha, r)$ *— величина, яка визначається рівністю* (2). *Тоді для будь-якого натурального* n *існує число* $s^* > n$ *таке, що*

$$\mathscr{E}_n(\alpha, r) = (s^* - n) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}. \tag{3}$$

Число s^* *визначається рівністю*

$$\sup_{s>n}(s-n)\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} = (s^*-n)\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}. \qquad (4)$$

При цьому точну верхню межу у правій частині співвідношення (2) *реалізує послідовність* $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, *в якій*

$$m_k^* = \begin{cases} \left(\alpha_k^{1/r}\sum_{i=1}^{s^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-1}, & k \in [1, s^*], \\ 0, & k > s^*. \end{cases} \qquad (5)$$

Теорема 2. *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}_r$, $r \in (0, 1)$, *і* $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ — *величина, яка визначається рівністю* (2). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha, r) = \left((s^*-n)^{1/(1-r)}\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{r/(r-1)} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty}\alpha_k^{1/(1-r)}\right)^{1-r}, \qquad (6)$$

у якій s^*, $s^* > n$, — *найбільше натуральне число, яке задовольняє умову*

$$s-n \le \alpha_s^{1/r}\sum_{k=1}^{s}\alpha_k^{-1/r} \quad \textit{для всіх } s \in (n, s^*]. \qquad (7)$$

Таке число s^* *завжди існує. Точну верхню межу у правій частині співвідношення* (2) *реалізує послідовність* $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ *з* $\mathcal{M}$, *в якій*

$$m_k^* = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r}(s^*-n)^{1/(1-r)}\left(\sum_{i=1}^{s^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{1/(r-1)}\mathcal{E}_n^{1/(r-1)}, & k \in [1, s^*], \\ \alpha_k^{1/(1-r)}\mathcal{E}_n^{1/(r-1)}, & k > s^*. \end{cases} \qquad (8)$$

Ці теореми доведено відповідно в [2, 4]. Зважаючи на те, що ці твердження можуть мати і самостійний інтерес, у даній роботі наводяться нові доведення згаданих теорем, які є значно коротшими та прозорішими.

1. Доведення теореми 1. Спочатку встановимо наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}_r$, $r > 0$, *і* $\mathcal{M}'$ — *множина всіх послідовностей* m *з множини* $\mathcal{M}$, *для яких числа* $\alpha_k m_k^r$ *не зростають. Тоді справджується рівність*

$$\mathcal{E} = \sup_{m\in\mathcal{M}'}\mathcal{E}(m). \qquad (9)$$

Доведення. Покажемо, що для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}$ знайдеться послідовність $m' \in \mathcal{M}'$ така, що $\mathcal{E}_n(m') \ge \mathcal{E}_n(m)$ і $|m'| \le |m|$. З цією метою покладемо $m_k' = \left(\dfrac{\overline{\alpha_k m_k^r}}{\alpha_k}\right)^{1/r}$, $k \in \mathbb{N}$, де $\overline{\alpha_k m_k^r}$ — перестановка послідовності $\alpha_k m_k^r$ за незростанням (за означенням множин $\mathcal{A}_r$ і $\mathcal{M}$ така перестановка завжди існує). Тоді очевидно, що $\mathcal{E}_n(m') = \mathcal{E}_n(m)$. Крім того, на підставі теореми 368 із монографії [20]

$$|m'| = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\overline{\alpha_k m_k^r}}{\alpha_k}\right)^{1/r} \le \sum_{k=1}^{\infty}m_k = |m|,$$

тобто послідовність m' належить множині $\mathcal{M}'$.

Твердження 1 доведено.

Згідно з означенням множини $\mathcal{M}'$ для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}'$ $\sup\limits_{\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m_k^r$, а тому $\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k m_k^r$. Звідси випливає, що при відшуканні величин $\mathcal{E}_n$ достатньо обмежитися послідовностями $m \in \mathcal{M}'$, для яких числа $\alpha_k m_k^r$ є рівними при всіх $k \in [1, n+1]$. Оскільки при цьому

$$\alpha_k m_k^r = \left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}, \quad k \in [1, n+1],$$

то

$$\mathcal{E}_n(m) = ((n+1)-n)\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} + \alpha_{n+2} m_{n+2}^r + \sum_{k=n+3}^{\infty} \alpha_k m_k^r .$$

Покладемо

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n+1} m_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n+2} m_k,$$
$$a_1 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}, \quad a_2 = \alpha_{n+2}, \quad b = (n+1)-n \tag{10}$$

і на відрізку $[0, c]$ розглянемо функцію $f(x) = a_1 b x^r + a_2 (c-x)^r$ за умови, що $a_1 x^r \geq a_2 (c-x)^r$, яку можна записати у вигляді $c \geq x \geq a_2^{1/r} c (a_1^{1/r} + a_2^{1/r})^{-1} \stackrel{\mathrm{df}}{=}$ $\stackrel{\mathrm{df}}{=} x_0$. Внаслідок того, що $f''(x) > 0$ для будь-яких $x \in [0, c]$, єдина критична точка цієї функції, яка має вигляд $x_* = c a_2^{1/(r-1)} ((a_1 b)^{1/(r-1)} + a_2^{1/(r-1)})^{-1}$, є точкою мінімуму.

Звідси випливає, що дана функція досягає свого найбільшого на відрізку $[x_0, c]$ значення на одному з кінців цього відрізка. Тому

$$f(x) \leq \max\{f(x_0), f(c)\} \qquad \forall x \in [x_0, c]. \tag{11}$$

Оскільки внаслідок означення множини $\mathcal{M}'$ $x_1 \in [x_0, c]$, то, враховуючи позначення в (10), отримуємо

$$\mathcal{E}(m) = f(x_1) + \sum_{k=n+3}^{\infty} \alpha_k m_k^r \leq \max\{f(x_0), f(c)\} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \alpha_k m_k^r =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+2} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \alpha_k m_k^r, \quad \xi_s = (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Далі, покладемо

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n+2} m_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n+3} m_k, \quad a_1 = \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}, \quad a_2 = \alpha_{n+3}, \quad b = l-n,$$

де l — натуральне число, для якого $\xi_l = \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\}$. З того, що $m \in \mathcal{M}'$, випливає

$$a_1 x_1^r \geq \left(\sum_{k=1}^{n+2} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} \geq \alpha_{n+3} m_{n+3}^r = a_2 (c-x_1)^r,$$

тобто точка x_1 знову належить відрізку $[x_0, c]$. Звідси на підставі (11) отримуємо

$$\mathcal{E}(m) \le \left(\sum_{k=1}^{n+2} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \alpha_k m_k^r = f(x_1) + \sum_{k=n+4}^{\infty} \alpha_k m_k^r \le$$

$$\le \max\{f(x_0), f(c)\} + \sum_{k=n+4}^{\infty} \alpha_k m_k^r =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+3} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\} + \sum_{k=n+4}^{\infty} \alpha_k m_k^r .$$

Проводячи аналогічні міркування далі, встановлюємо, що для довільної послідовності $m \in \mathcal{M}'$

$$\mathcal{E}(m) \le |m|^r \sup_{s>n} \xi_s \le \sup_{s>n} (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}. \qquad (12)$$

Згідно з означенням множини $\mathcal{A}_r$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$, і в даному випадку $r \ge 1$, тому

$$\lim_{s\to\infty} (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} = 0.$$

Звідси випливає, що знайдеться принаймні одне натуральне число s^*, яке задовольняє співвідношення (4). Таким чином, з урахуванням (12) маємо

$$\mathcal{E}_n \le (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}, \qquad (13)$$

і для завершення доведення теореми залишилося показати, що в цьому співвідношенні строгої нерівності бути не може. З цією метою зауважимо, що послідовність $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ вигляду (5) належить множині $\mathcal{M}'$ і

$$\mathcal{E}_n(m^*) = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Об'єднуючи останнє співвідношення зі співвідношенням (13), завершуємо доведення теореми 1.

2. Доведення теореми 2. На підставі твердження 1 для відшукання величини $\mathcal{E}_n$ і в цьому випадку достатньо обмежитися множиною $\mathcal{M}'$ всіх послідовностей m з множини $\mathcal{M}$, для яких числа $\alpha_k m_k^r$ не зростають.

Для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}'$

$$\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha_k m_k^r, \qquad \nu_k \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 0, & k \in [1, n], \\ 1, & k > n. \end{cases} \qquad (14)$$

Тепер зазначимо, що нерівність (7) рівносильна нерівностям

$$(s-n-1)\left(\sum_{k=1}^{s-1}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1} \le \alpha_s^{1/r},$$
$$(s-1-n)\left(\sum_{k=1}^{s-1}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1} \le (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1}, \tag{15}$$

і оскільки $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{s\to\infty}(s-n)\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1} \le \lim_{s\to\infty} s\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1} = 0.$$

Тому завжди знайдеться найбільше число $s^* = s^*(\alpha, n)$ таке, що при всіх $s \in$ $\in (n, s^*]$ будуть виконуватися нерівності (15), а отже, і (7).

Твердження 2. *Нехай $\mathcal{M}''$ — множина всіх послідовностей m з множини $\mathcal{M}'$, для яких числа $\alpha_k m_k^r$ є рівними при всіх $k \in [1, s^*]$. Тоді справджується рівність*

$$\mathcal{E}_n = \sup_{m\in\mathcal{M}''}\mathcal{E}_n(m). \tag{16}$$

Доведення. Як і при доведенні твердження 1, покажемо, що для кожної послідовності $m \in \mathcal{M}'$ знайдеться послідовність $m'' \in \mathcal{M}'$ така, що $|m''| \le$ $\le |m|$ і

$$\mathcal{E}_n(m'') \ge \mathcal{E}_n(m). \tag{17}$$

З цією метою розглянемо послідовність m'' таку, що при $k > s^*$ $m_k'' = m_k$, а при $k \in [1, s^*]$ значення m_k'' визначаються співвідношенням

$$\alpha_k(m_k'')^r = \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{18}$$

Для цієї послідовності

$$|m''| = \sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right)\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-1} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} m_k = |m|. \tag{19}$$

Для доведення нерівності (17) достатньо показати, що

$$\sum_{k=1}^{s^*}\nu_k\alpha_k m_k^r \le \sum_{k=1}^{s^*}\nu_k\left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right)^r\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{20}$$

Покажемо спочатку, що

$$\sum_{k=1}^{s^*}\nu_k\alpha_k m_k^r \le \sum_{k=1}^{s^*}\nu_k\left(\sum_{i=1}^{s^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{s^*}\alpha_j^{(r-1)/r} m_j^r. \tag{21}$$

Тоді, застосувавши до останньої суми нерівність Гельдера, отримаємо (20). При цьому використаємо прийом, який було запропоновано для доведення відомої нерівності Чебишова для інтегралів у монографії [21, с. 246]. Оскільки

$$\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-1/r}\left(\nu_k\alpha_k^{1/r} - (s^*-n)\left(\sum_{i=1}^{s^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-1}\right) = 0,$$

то рівність

$$\sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \alpha_k m_k^r - \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \left(\sum_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-1/r} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{s^*} \alpha_j^{(r-1)/r} m_j^r =$$

$$= \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} (\alpha_k m_k^r - c) \left(\nu_k \alpha_k^{1/r} - (s^* - n) \left(\sum_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-1/r} \right)^{-1} \right) \tag{22}$$

виконується для будь-якого дійсного числа c.

Покладаючи $c^* = \alpha_{n+1} m_{n+1}^r$, на підставі (7) та означення множини $\mathcal{M}'$, для всіх $k \in [1, s^*]$ маємо

$$(\alpha_k m_k^r - c^*) \left(\nu_k \alpha_k^{1/r} - (s^* - n) \left(\sum_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-1/r} \right)^{-1} \right) \le 0,$$

звідки випливає співвідношення (21), а разом з ним, на підставі означення послідовності m'', і нерівність (17).

З означення множини $\mathcal{M}''$ випливає, що для кожної послідовності $m \in \mathcal{M}''$ при всіх $k \in [1, s^*]$

$$\alpha_k m_k^r = \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k \right)^r \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}. \tag{23}$$

Тому

$$\mathcal{E}_n(m) = (s^* - n) \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k \right)^r \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \alpha_k m_k^r. \tag{24}$$

Застосовуючи до виразу в правій частині (24) нерівність Гельдера, маємо

$$\mathcal{E}_n(m) \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k \right)^r \left((s^* - n)^{1/(1-r)} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{r/(r-1)} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}.$$

Звідси внаслідок того, що $\|m\| \le 1$, отримуємо потрібну оцінку зверху величини $\mathcal{E}_n$.

Розглянемо тепер послідовність m^*, яка визначається співвідношенням (8), і покажемо, що $m^* \in \mathcal{M}''$. Справді, внаслідок (8) при кожному $k \in [1, s^*]$

$$\alpha_k (m_k^*)^r = (s^* - n)^{r/(1-r)} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{r/(r-1)} \mathcal{E}_n^{r/(r-1)}, \tag{25}$$

а при $k > s^*$

$$\alpha_k (m_k^*)^r = \alpha_k^{1/(1-r)} \mathcal{E}_n^{r/(r-1)}, \tag{26}$$

тобто послідовність $\alpha_k (m_k^*)^r$ на проміжку $[1, s^*]$ є сталою, а на проміжку $[s^*, \infty)$ — не зростає. Тому достатньо показати, що

$$\alpha_{s^*} (m_{s^*}^*)^r \ge \alpha_{s^*+1} (m_{s^*+1}^*)^r, \tag{27}$$

або

$$(s^* - n)^{r/(1-r)} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{r/(r-1)} \ge \alpha_{s^*+1}^{1/(1-r)}.$$

Остання нерівність випливає з означення числа s^*. Таким чином, послідовність m^* належить множині $\mathcal{M}''$. Крім того, внаслідок (25) – (27)

$$\mathscr{E}_n(m^*) \;=\; \left((s^* - n)^{1/(1-r)} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{r/(r-1)} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}.$$

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
3. *Войцехівський В. Р.* Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 33 – 46.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – С. 333 – 368.
5. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 208 – 226.
6. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
7. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах S^p $(1 \le p < \infty)$ // Воронеж. зим. мат. школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 26 янв. – 2 февр. 2003 г.). – Воронеж: Воронеж. ун-т, 2003. – С. 47 – 48.
8. *Войцехівський В. Р.* Поперечники деяких класів з простору S^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 17 – 26.
9. *Рукасов В. И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
10. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 229 – 248.
11. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 10. – С. 1392 – 1423.
12. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Там же. – 2002. – **54**, № 2. – С. 264 – 277.
13. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Наилучшие „сплошные" n-членные приближения в пространствах S_φ^p // Там же. – 2003. – **55**, № 5. – С. 663 – 670.
14. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Наилучшие n-членные приближения Λ-методами в пространствах S_φ^p // Там же. – № 8. – С. 1107 – 1126.
15. *Шидліч А. Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S_φ^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 283 – 306.
16. *Вакарчук С. Б.* Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p, $1 \le p < \infty$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 595 – 605.
17. *Степанец А. И.* Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ // Там же. – № 10. – С. 1378 – 1383.
18. *Шидліч А. Л.* Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S_φ^p // Там же. – № 1. – С. 133 – 138.
19. *Степанец А. И.* Наилучшие n-членные приближения с ограничениями // Там же. – 2005. – **57**, № 4. – С. 533 – 553.
20. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
21. *Mitrimovic D. S., Pečaric J. E., Fink A. M.* Classical and new inequalities in analysis. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 740 p.

Одержано 23.06.2005