УДК 517.9

**О. М. Денисенко, І. О. Парасюк** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ФЛОКЕ – БЛОХА І ОЦІНКА ДОВЖИН РЕЗОНАНСНИХ ЗОН ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З ГЛАДКИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

With the help of KAM-theory methods, we investigate a one-dimensional Schrödinger equation whose potential is characterized by certain rate of approximation by trigonometric polynomials. We obtain estimates of resonance energy zones. We analyze the case where the potential belongs to the Gevrey class.

Методами КАМ-теорії досліджено одновимірне рівняння Шредінгера з потенціалом, який характеризується певною швидкістю наближення тригонометричними поліномами. Одержано оцінки резонансних енергетичних зон. Проаналізовано випадок, коли потенціал належить класу Жевре.

**1. Вступ.** Розглянемо квазіперіодичне стаціонарне рівняння Шредінгера (рівняння Штурма – Ліувілля)

$$\mathcal{L}y := -\frac{d^2y}{dx^2} + u(\omega x)y = Ey. \tag{1}$$

Тут $u(\varphi)$ — дійсна функція на $m$-вимірному торі $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$, $\omega \in \mathbb{R}^m$ — вектор з раціонально незалежними компонентами, $E$ — спектральний параметр (енергія). Одним з головних в теорії рівняння (1) є питання про існування квазіперіодичних розв'язків Флоке – Блоха $y = e^{i\lambda(E)x}\chi(\omega x, E)$, де $\lambda(E) \in \mathbb{R}$ — так званий квазіімпульс, $\chi(\cdot, E) \in C^1(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{C})$.

Методи звідності лінійних квазіперіодичних систем, запропоновані в [1], відкрили шлях до вивчення зазначеного питання засобами КАМ-теорії [2, 3], що й було з успіхом продемонстровано в циклі робіт [4 – 13]. Основну увагу було приділено випадку, коли функція $u(\varphi)$ є дійсно-аналітичною. У роботах [7, 8] результати статті [4] розповсюджено на потенціали класу $C^l(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$ і при цьому встановлено оцінки залежності від $l$ довжин резонансних зон — інтервалів енергії, на яких рівняння (1) не має квазіперіодичної фундаментальної системи розв'язків. У той же час випадок, коли функція $u(\varphi)$ належить класу $C^\infty(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$, $m > 1$, до останнього часу залишався недослідженим.

Зауважимо, що для рівняння (1) з періодичним потенціалом $(m = 1)$ внутрішні точки резонансних зон збігаються з лакунами в спектрі оператора Шредінгера, породженого в $L_2(\mathbb{R})$ операцією $\mathcal{L}$ [14]. Цього не можна стверджувати в загальному випадку, коли $m > 1$. Наскільки нам відомо, найбільш точні оцінки довжин лакун оператора Шредінгера з обмеженим потенціалом класу $C^l(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ одержано в [15].

Мета даної роботи полягає в тому, щоб на основі методів КАМ-теорії, розроблених в [1, 4 – 9, 11, 16 – 21], розвинути техніку побудови розв'язків Флоке – Блоха для рівняння (1) з потенціалом, який характеризується певною швидкістю наближення тригонометричними поліномами, і на цій основі одержати оцінки розмірів резонансних енергетичних зон. Нас також цікавило питання про характер залежності квазіімпульсу $\lambda(E)$ від енергії. У зв'язку з цим зазначимо, що в роботі [6] у випадку досить малого аналітичного потенціалу проведено дослідження властивостей оберненої до $\lambda(E)$ функції і показано, що енергія є моногенною функцією Бореля від квазіімпульсу. Характер залежності розв'язків Флоке – Блоха від енергії з позицій теорії Вітні у випадку аналітичного квазіперіодичного потенціалу, близького до періодичного, досліджувався в [11].

Структура даної роботи така. У п. 2 визначено поняття характеристики апроксимації потенціалу тригонометричними поліномами і наведено основний результат. Його суть полягає в тому, що резонансну множину значень енергії при $E > E_0 >> 1$ можна занурити в об'єднання інтервалів вигляду

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^m} \left\{E > E_0 \colon \left|\langle n, \omega\rangle - 2\lambda(E)\right| < E_0^{-\alpha/2} g(|n|)\right\}.$$

Тут $\alpha$ — довільно вибране число з інтервалу $(0, 1)$, $g(r)$ — додатна монотонно спадна до нуля при $r \to \infty$ функція, виражена певним чином через характеристику апроксимації потенціалу $u(\varphi)$ тригонометричними поліномами, а $\lambda(E)$ — неперервно диференційовна функція, яка є продовженням квазіімпульсу з деякої канторової множини на всю дійсну вісь у відповідності з теорією Вітні. Для великих значень енергії оцінено також відстань від точки $E$ до найближчої нерезонансної точки.

У пп. 3 – 5 містяться технічні деталі обґрунтування описаного результату, а у п. 6 на прикладі потенціалів з класу Жевре продемонстровано методику оцінювання довжин резонансних зон рівняння (1) з нескінченно диференційовним потенціалом на основі інформації про швидкість росту при $s \to \infty$ функції

$$A_u(s) := \begin{cases} \max\limits_{1\le j\le m} \max\limits_{\varphi\in\mathbb{T}^m} \left|\dfrac{\partial^s u(\varphi)}{\partial\varphi_j^s}\right|, & s \in \mathbb{Z}_+; \\ \max\limits_{1\le j\le m} \sup\limits_{(\varphi,t)\in\mathbb{R}^{m+1}} \left|\dfrac{1}{t^{\{s\}}}\left(\dfrac{\partial^{[s]}u(\varphi+te_j)}{\partial\varphi_j^{[s]}} - \dfrac{\partial^{[s]}u(\varphi)}{\partial\varphi_j^{[s]}}\right)\right|, & s \in (0,\infty)\setminus\mathbb{N}, \end{cases} \tag{2}$$

де $[s]$ позначає цілу, а $\{s\}$ — дробову частини числа $s$.

Домовимося про використання деяких позначень. Для $m$-вимірного вектора $z$ з дійсними або комплексними компонентами $z_1, \ldots, z_m$ покладемо

$$|z| = \max_{1\le j\le m} |z_j|, \quad \|z\| := \sum_{j=1}^{m} |z_j|.$$

Норму $(m \times m)$-вимірної матриці $A$ визначимо рівністю $\|A\| := \max_{\|z\|=1}\|Az\|$. Якщо $w = (w_1, \ldots, w_m)$, то $\langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^{m} z_j w_j$. Верхній індекс $*$ позначає операцію комплексного спряження в $\mathbb{C}^n$. Через $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ будемо позначати сукупність усіх матриць розміру $2\times 2$ з комплексними елементами. Якщо $f(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^k)$, то $\bar{f} := (2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{T}^m} f(\varphi)\, d\varphi$. Для будь-якої множини $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ позначимо через $\mathcal{M} + \delta$ її $\delta$-окіл.

**2. Умова тригонометричної апроксимації та основні теореми.**

**Означення 1.** *Будемо говорити, що функція $u(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$ задовольняє умову тригонометричної апроксимації (УТА) з характеристикою $p(\cdot)$, де $p(\cdot)\colon [1,\infty) \mapsto (0,\infty)$, якщо існує стала $C = C(m) > 0$ і для кожного $r \ge 1$ знайдеться тригонометричний поліном*

$$T_{[r]}(\varphi) = \sum_{|n|\le r} T^{(n)} e^{i\langle n,\varphi\rangle},$$

*де* $n \in \mathbb{Z}^m$, $T^{(n)} \in \mathbb{C}$, $(T^{(n)})^* = T^{(-n)}$, *такі, що*

$$\left|u(\varphi) - T_{[r]}(\varphi)\right| \le Ce^{-p(r)} \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^m.$$

Досліджуючи рівняння (1) з потенціалом, який задовольняє УТА, надалі без обмеження загальності домовимось вважати, що $C = 1$. Цього можна легко досягти відповідними розтягами незалежної змінної, вектора $\omega$ та параметра $E$.

Покладемо

$$q(r) := \frac{p(r)}{r}.$$

У подальшому будемо розглядати класи функцій, що задовольняють УТА з характеристикою $p(r) \in C^1([1, \infty) \mapsto (0, \infty))$, яка має такі властивості:

A) $\inf\limits_{r \ge 1} rp'(r) > 0$;

B) $q'(r) < 0$ для всіх досить великих $r \ge 1$;

C) для всіх досить великих $r \ge 1$ функція $\dfrac{|q'(r)|}{q(r)}$ строго монотонно спадна;

D) існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{r\to\infty} \dfrac{|q'(r)|r^2}{\ln r} := l_* > m + 1$.

Зауважимо, що функція, яка задовольняє УТА з характеристикою $p(r) = l \ln r$, де $l > 1$ не є цілим числом, належить класу $C^{[l]}(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$ [22, 16].

З властивості C) випливає, що для всіх досить великих $r$ функція $H(r) := \dfrac{q(r)}{|q'(r)|}$ має обернену $h(r) := H^{-1}(r)$, і оскільки $1/H(r) < 1/r$, то $\lim_{r\to\infty} h(r) = \infty$.

З властивості D) випливає, що для кожного $l \in (m + 1, l_*)$ знайдеться число $r_l \ge 1$ таке, що для всіх $r > r_l$ виконується нерівність

$$q(r) > q(\infty) + \frac{l(\ln r + 1)}{r}. \tag{3}$$

Якщо $q(\infty) > 0$, то функція, яка задовольняє відповідну УТА, є аналітичною. У даній роботі основну увагу буде приділено випадку, коли $q(\infty) = 0$ і $l_* = \infty$. Тоді $u(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$.

Легко перевірити, що умови A) – D) з $l_* = \infty$ задовольняють, наприклад, характеристики вигляду $p(r) = r^{1/\kappa}$, $\kappa \ge 1$, та $p(r) = r / \ln^\kappa(r+1)$, $\kappa > 0$.

Перейдемо до формулювання основного результату. Нехай $l$ — число, що фігурує у (3). Зафіксуємо додатні числа $\alpha$, $a$, $\beta$, $\sigma$ і $\theta$ так, щоб виконувались нерівності $\alpha < \beta < 1$ і

$$\begin{gathered} \theta > 1, \quad a + (\theta+1)\sigma + \theta/l < 1 - m/l, \\ a + \theta(\theta - 1) + (2\theta+1)\sigma < 1 - m/l. \end{gathered} \tag{4}$$

Покладемо

$$\nu := \frac{m\theta(\theta - 1 + \sigma + m/l)}{\sigma(\theta - 1)}$$

і визначимо функцію

$$g(r) := |r|^{-m} \exp\big(-ap(h(r/\nu)/\theta)\big).$$

Тепер сформулюємо основну теорему.

**Теорема 1.** *Нехай у рівнянні* (1) *потенціал* $u(\varphi)$ *задовольняє УТА з характеристикою* $p(r)$, *яка має властивості* A) – D), *а для вектора частот* $\omega$ *виконуються діофантові умови*

$$|\langle n, \omega\rangle| \geq \gamma g(|n|) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$$

*з деякою сталою* $\gamma > 0$.

*Тоді для кожного досить великого* $E_0 > 0$ *існує така функція* $\lambda(E) \in \in C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$, *що*:

1) $\left|\lambda(E) - \sqrt{E}\right| < \dfrac{\left(\sqrt{E_0}\right)^\beta}{\sqrt{E}}$ *для всіх* $E > E_0$;

2) $\left|\dfrac{d\lambda(E)}{d\sqrt{E}} - 1\right| < \dfrac{\left(\sqrt{E_0}\right)^\beta}{\sqrt{E}}$ *для всіх* $E > E_0$;

3) *якщо* $E \in (E_0, \infty) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \left\{E \in \mathbb{R} : |\langle n, \omega\rangle - 2\lambda(E)| < E_0^{-\alpha/2} g(|n|)\right\}$, *то рівняння* (1) *має фундаментальну систему розв'язків Флоке – Блоха*

$$y_1(x) := e^{i\lambda(E)x}\chi(\omega x, E), \quad y_2(x) = e^{-i\lambda(E)x}\chi^*(\omega x, E),$$

*де* $\chi(\cdot, E) \in C^1(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{C})$ *для кожного* $E > E_0$.

Доведення цього результату випливає з міркувань, наведених у пп. 3 – 5, і істотно спирається на таку лему.

**Лема 1.** *Нехай* $u(\varphi)$ *задовольняє УТА з характеристикою* $p(\cdot)$, *яка має властивості* A), B). *Для довільного* $r_0$ *визначимо послідовності чисел*

$$r_k := r_0 \theta^k, \quad \rho_k := \frac{\sigma q(r_k)}{m\theta}, \quad M_k := e^{-p(r_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

*Тоді послідовність функцій* $u_k(\varphi) := T_{[r_k]}(\varphi)$ *задовольняє нерівності*

$$|u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)| \leq 2M_k^{1-\sigma} \quad \forall \varphi \in \Pi_k := \left\{\varphi \in \mathbb{C}^m : |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k\right\}, \tag{5}$$

$$|u_1(\varphi)| \leq c_0 M_1 \quad \forall \varphi \in \Pi_1, \tag{6}$$

*де* $c_0 = c_0(\sigma, \theta, r_0) := e^{\theta\sigma r_0 q(\theta r_0)}\left(e^{p(\theta r_0)} \max_{\varphi \in \mathbb{T}^m} |u(\varphi)| + 1\right)$.

***Доведення.*** Зрозуміло, що $|u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)| \leq 2M_k$ для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Скориставшись нерівністю Бернштейна для тригонометричних поліномів, одержимо

$$|u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)| \leq e^{m\rho_k r_{k+1}} \max_{\varphi \in \mathbb{T}^m} |u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)| \quad \forall \varphi \in \Pi_k.$$

Оскільки $m\rho_k r_{k+1} = \sigma p(r_k)$, то звідси й випливають оцінки (5). Оцінка (6) встановлюється аналогічно.

Лему доведено.

Покладемо

$$\Omega(r) := g(r) + r^{1-m}\int_r^\infty s^{m-1} g(s) d(s), \qquad N(E) := \left[\frac{2\lambda(E)}{\|\omega\|}\right] - 1.$$

Легко бачити, що $N(E) \sim 2\sqrt{E}/\|\omega\|$, $E \to \infty$.

**Теорема 2.** *Нехай у рівнянні* (1) *потенціал* $u(\varphi)$ *задовольняє УТА з характеристикою* $p(r)$, *яка має властивості* A) – D), *а для вектора частот* $\omega$ *виконуються діофантові умови*

$$|\langle n, \omega\rangle| \geq \gamma\Omega(|n|) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$$

*з деякою сталою* $\gamma > 0$.

*Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $E_* > 0$ *таке, що для кожного* $E > E_*$ *знайдеться значення енергії* $E' > E$, *для якого рівняння* (1) *має фундаментальну систему розв'язків Флоке – Блоха і при цьому*

$$\sqrt{E'} - \sqrt{E} < E^{-1/2+\varepsilon}\Omega(N(E)). \tag{7}$$

***Доведення.*** Для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо в теоремі 1 $\alpha > 1 - \varepsilon$. Скориставшись тим, що згідно з цією теоремою для великих $E$ відображення $\sqrt{E} \mapsto \mapsto \lambda(E)$ є дифеоморфізмом з коефіцієнтом стиску, близьким до 1, перейдемо від змінної $\sqrt{E}$ до змінної $\lambda = \lambda(E)$. Покладемо $\lambda(E_0) = \lambda_0$, $\Delta(E_0) := := E_0^{-1/2+\varepsilon}\Omega(N(E_0))$ і

$$I_n := \left\{\lambda \in \mathbb{R} : |\langle n, \omega\rangle - 2\lambda| < E_0^{-\alpha/2} g(|n|)\right\}.$$

Нехай $n(\lambda_0)$ — один з тих векторів $n \in \mathbb{Z}^m$, для якого $\langle n, \omega\rangle < 2\lambda_0$, і проміжок $I_n \cap (\lambda_0, \infty)$ має найбільшу довжину. Зрозуміло, що $\langle n(\lambda_0), \omega\rangle \ge 2\lambda_0 - - E_0^{-\alpha/2} g(|n(\lambda_0)|)$. А тому для досить великих $E_0$ буде виконуватись нерівність

$$|n(\lambda_0)| \ge 2\lambda_0 / \|\omega\| - E_0^{-\alpha/2} \ge N(E_0), \tag{8}$$

і, отже,

$$\left|I_{n(\lambda_0)} \cap (\lambda_0, \lambda_0 + \Delta(E_0))\right| \le \frac{1}{2} E_0^{-\alpha/2} g(N(E_0)). \tag{9}$$

Так само оцінимо найбільший інтервал вигляду $I_n \cap (\lambda_0, \lambda_0 + \Delta(E_0))$, де $\langle n, \omega\rangle > 2(\lambda_0 + \Delta(E_0))$.

Тепер оцінимо міру тих інтервалів $I_n$, центри яких належать проміжку $(\lambda_0, \lambda_0 + \Delta(E_0))$. Якщо $I_{n'}$, $I_{n''}$ — пара таких інтервалів, то вектори $n'$, $n''$ задовольняють нерівності

$$\gamma\Omega(|n' - n''|) \le |\langle n', \omega\rangle - \langle n'', \omega\rangle| \le E_0^{-1/2+\varepsilon}\Omega(N(E_0)),$$

$$\min(|n'|, |n''|) \ge \frac{2\lambda_0}{\|\omega\|} \ge N(E_0) + 1.$$

Звідси випливає, що $|n' - n''| > N(E_0)$ при великих $E_0$.

Число цілочислових векторів $n$, для яких $|n| = j \ge N(E_0) + 1$ і відстань між якими за нормою $|\cdot|$ більша за $N(E_0)$, не перевищує числа відкритих неперетинних кубів з ребром довжини $N(E_0)$, центри яких належать $|x| = j$. Число таких кубів не перевищує відношення різниці об'ємів двох кубів — з ребром $2j + N(E_0)$ та ребром $2j - N(E_0)$ — до об'єму куба з ребром $N(E_0)$. Отже, міра тих інтервалів $I_n$, центри яких належать проміжку $(\lambda_0, \lambda_0 + \Delta(E_0))$, не перевищує

$$\sum_{j=N(E_0)+1}^{\infty} \frac{(2j + N(E_0))^m - (2j - N(E_0))^m}{N^m(E_0)} E_0^{-\alpha/2} g(j) \le$$

$$\le \frac{2m\,3^{m-1}}{E_0^{\alpha/2} N^{m-1}(E_0)} \sum_{j=N(E_0)+1}^{\infty} j^{m-1} g(j) \le \frac{2m\,3^{m-1}}{E_0^{\alpha/2} N^{m-1}(E_0)} \int_{N(E_0)}^{\infty} s^{m-1} g(s)\, ds.$$

(Ми скористались тим, що функція $r^{m-1} g(r)$ монотонно спадає.) З наведених міркувань випливає, що міра резонансних точок в інтервалі $(\lambda_0, \lambda_0 + \Delta(E_0))$ не перевищує

$$E_0^{-\alpha/2}\left(g(N(E_0)) + 2m\,3^{m-1}N^{1-m}(E_0)\int\limits_{N(E_0)}^{\infty} s^{m-1}g(s)\,ds\right),$$

і, таким чином, для всіх досить великих $E_0$ ця міра менша за довжину $\Delta(E_0)$ зазначеного інтервалу.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо додатково до A) – D) вимагати, щоб $p(r) \in C^2([1,\infty) \mapsto (0,\infty))$ і

$$\liminf_{r\to\infty} H'(r) > 0,$$

то теорема 2 залишиться правильною, якщо (7) замінити нерівністю

$$\sqrt{E'} - \sqrt{E} < E_0^{-(m-1)/2+\varepsilon} \int\limits_{\sqrt{E}/\|\omega\|}^{\infty} s^{m-1}g(s)\,ds.$$

Відзначимо також, що для $p(r) = l(\ln r + 1)$, де $l > m+1$, при великих $r$ маємо

$$\frac{q(r)}{|q'(r)|} = r\left(1 + \ln^{-1} r\right) < \theta r,$$

звідки випливає $h(r) > r/\theta$. Тепер для довільного $\varepsilon > 0$ у формулі для функції $g(r)$ виберемо настільки мале $\sigma$, щоб при $\theta = 1 + \sigma$ можна було покласти

$$a = 1 - \frac{m+1}{l} - \frac{\varepsilon}{l}.$$

Тоді будемо мати результат, одержаний у роботі [8]:

$$g(r) = O\left(|n|^{-l+1+\varepsilon}\right) \quad \text{і} \quad E^{-1/2+\varepsilon}\Omega(N(E)) = O\left(E^{(-l+1)/2+2\varepsilon}\right).$$

**3. Опис ітераційного процесу.** Як і в [4], ввівши нові комплексні змінні $z_1$ та $z_2$ за формулами

$$y = z_1 + z_2, \qquad y' = i\sqrt{E}z_1 - i\sqrt{E}z_2,$$

перейдемо від рівняння (1) до еквівалентної системи

$$z' = \left[\sqrt{E}J + \frac{1}{\sqrt{E}}V(\omega x)\right]z, \tag{10}$$

де $J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $V(\varphi) := \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & i \end{pmatrix} u(\varphi)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

У роботі [4] відмічено важливу особливість системи (10): її матриця належить кільцю $K \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, утвореному матрицями вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$, де $a$, $b \in \mathbb{C}$. До того ж

$$\operatorname{tr} J = 0, \qquad \overline{\operatorname{tr} V(\varphi)} = 0.$$

Аналізуючи систему (10), будемо використовувати таке просте твердження.

**Лема 2.** *Якщо матриця системи* $z' = A(\omega x)z$ *задовольняє умови* $A(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m \mapsto K)$, *то таку ж властивість має й матриця системи, одержаної внаслідок перетворення* $z \mapsto S(\omega x)z$, *де* $S(\varphi) \in C^1(\mathbb{T}^m \mapsto K)$ *і* $\min_{\varphi\in\mathbb{T}^m} |\det S(\varphi)| > 0$.

Для побудови множини значень енергії $E$, на якій система (10) має фундаментальну систему $(m+1)$-частотних квазіперіодичних розв'язків, і відшукання цих розв'язків ми синтезуємо три методи КАМ-теорії: метод прискореної збіжності [2, 1, 16], метод аналітичного згладжування [16] і модифікацію методу штучних параметрів [1, 3], запропоновану М. Б. Севрюком та М. Ерманом (див. [20]). Ідея такого синтезу полягає в тому, що система (10) спочатку занурюється в трипараметричну сім'ю

$$z' = [(\lambda+\mu)J + \varepsilon P(\omega x)]\, z, \tag{11}$$

де $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — штучні параметри, $\varepsilon := 2c_0/\sqrt{E}$, $P(\varphi) := V(\varphi)/2c_0$ (константу $c_0$ визначено в лемі 1). Далі ми показуємо, що для кожного досить малого $\varepsilon_0 > 0$ існує обмежена функція $F(\lambda, \varepsilon)$ з такими властивостями: 1) при кожному фіксованому $\lambda$ функція $F(\lambda, \cdot)$ аналітична в околі нуля і $F(\lambda, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, $F'_\lambda(\lambda, \varepsilon) = O(\varepsilon)$; 2) для кожного $\lambda$ з канторової множини

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \left\{\lambda > 2\varepsilon_0^\alpha : |\langle n, \omega\rangle - 2\lambda| \ge C_0\varepsilon_0^\alpha g(\|n\|)\right\},$$

де $C_0 > 0$ — деяка стала, система (11) при $\mu = F(\lambda, \varepsilon)$ квазіперіодичним перетворенням Ляпунова з базисом частот $\omega$ зводиться до системи $z' = \lambda Jz$. Відтак для опису множини значень параметра $E$, на якій система (10) допускає зведення до системи зі сталою матрицею, пропорційною $J$, досить знайти неявну функцію, визначену рівнянням

$$\lambda + F\left(\lambda, 2c_0/\sqrt{E}\right) = \sqrt{E}.$$

Згадане вище квазіперіодичне перетворення Ляпунова знаходимо за схемою, наведеною в роботах [7, 18], істотно використовуючи ту обставину, що система (11) є границею послідовності систем

$$z' = [(\lambda+\mu)J + \varepsilon P_k(\omega x)]\, z, \tag{12}$$

де матриці $P_k(\varphi) := \dfrac{u_k(\varphi)}{4c_0}\begin{pmatrix} -i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$, як це випливає з леми 1, задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} \|P_1(\varphi)\| \le M_1 \quad \forall\, \varphi \in \Pi_1, \\ \left\|P_{k+1}(\varphi) - P_k(\varphi)\right\| \le M_k^{1-\sigma} \quad \forall\, \varphi \in \Pi_k, \\ k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{13}$$

і кожна з цих матриць є аналітичною у відповідній смузі $\Pi_k$.

Наведемо рекурентний опис ітераційного процесу побудови функції $F(\lambda, m)$ та зазначеного перетворення Ляпунова.

Зауважимо, що коли виконуються умови (4), то

$$\eta := 1 - a - \sigma - m/l > 1/l \tag{14}$$

та існує число $b \in (0, 1)$ таке, що

$$1 - \eta/\theta < b < \min(1 - \sigma - 1/l,\ 2 - \theta - 2\sigma). \tag{15}$$

Покладемо

$$N_k := \frac{\nu q(r_k)}{|q'(r_k)|} = \nu h^{-1}(r_k).$$

З умови D) випливає, що для кожного $\delta > 0$ число $r_0$ можна вибрати так, щоб

$$N_k \le \begin{cases} (1+\delta)\nu r_k, & \text{якщо} \quad l_* < \infty; \\ \delta r_k^2, & \text{якщо} \quad l_* = \infty, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Тепер уведемо послідовність множин

$$L_1 := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \varepsilon_0^\alpha\right\},$$

$$L_{k+1} := L_k \setminus \bigcup_{0<|n|\le N_{k+1}} \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\langle n, \omega\rangle - 2\lambda| < \varepsilon_0^\alpha M_k^\alpha |n|^{-m}\right\},$$

$$D_k := L_k \times \left\{(\mu, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2 : |\mu| < |\varepsilon|^\beta M_k^b, |\varepsilon| < \varepsilon_0\right\}, \quad G_k := \Pi_k \times D_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

покладемо $W_1 = 0 \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $F_1 = 0$, $M_0 = 0$ і припустимо, що на $k$-му кроці ітеративного процесу вже побудовано аналітичні відображення $F_k : D_k \mapsto \mathbb{C}$, $W_k : G_k \mapsto \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ з такими властивостями:

1) $|F_k| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{\partial F_k}{\partial \mu}\right| < \dfrac{1}{2}$ в $D_k$ і $\|W_k\| < \dfrac{1}{2}$ в $G_k$;
2) $W_k : \mathrm{Re}\, G_k \mapsto K$, $F_k : \mathrm{Re}\, D_k \mapsto \mathbb{R}$;
3) заміна параметра $\mu$ і змінних $z$ вигляду

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_k + F_k(\lambda, \mu_k, \varepsilon), \\ z &= (I + W_k(\omega x, \lambda, \mu_k, \varepsilon))z, \end{aligned} \tag{17}$$

де $I$ — одиниця в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, зводить систему (11) для всіх $(\lambda, \mu_k, \varepsilon) \in \mathrm{Re}\, D_k$ до системи

$$z' = [(\lambda + \mu)J + Q_k(\omega x, \lambda, \mu_k, \varepsilon)]z,$$

матриця $Q_k$ якої задовольняє нерівність $\|Q_k\| < |\varepsilon| M_k$ в $G_k$.

За цих умов опишемо $(k+1)$-й крок ітераційного процесу.

Застосуємо перетворення (17) до системи, яка одержується з (12) заміною $k$ на $k+1$. Дістанемо систему

$$z_k' = \left[(\lambda + \mu_k)J + \hat{Q}_k(\omega x, \lambda, \mu_k, \varepsilon)\right] z_k, \tag{18}$$

в якій $\hat{Q}_k = Q_k + \varepsilon(I + W_k)^{-1}(P_{k+1} - P_k)(I + W_k)$. З урахуванням леми 2 і оцінок (13) маємо

$$\hat{Q}_k : \mathrm{Re}\, G_k \mapsto K, \quad \overline{\mathrm{tr}\, \hat{Q}_k} = 0 \quad \forall (\lambda, \mu_k, \varepsilon) \in \mathrm{Re}\, D_k$$

і

$$\left\|\hat{Q}_k\right\| \le |\varepsilon| M_k + 3|\varepsilon| M_k^{1-\sigma} \le 4|\varepsilon| M_k^{1-\sigma} \quad \forall (\varphi, \lambda, \mu_k, \varepsilon) \in G_k. \tag{19}$$

Крім того, позначивши елементи матриці $\hat{Q}_k$ через $(\hat{Q}_k)_{ij}$ і поклавши $f_k(\lambda, \mu, \varepsilon) := i\,\overline{(\hat{Q}_k)_{11}(\varphi, \lambda, \mu, \varepsilon)}$, одержимо

$$\mathrm{diag}\left(\overline{(\hat{Q}_k)_{11}}, \overline{(\hat{Q}_k)_{22}}\right) = -f_k J \quad \forall (\lambda, \mu_k, \varepsilon) \in \mathrm{Re}\, D_k.$$

Нехай $w_k(\varphi, \lambda, \mu, \varepsilon) = \sum_{|n| \le N_{k+1}} w_k^{(n)}(\lambda, \mu, \varepsilon) e^{i\langle n, \varphi\rangle}$ — тригонометричний поліном з матричними коефіцієнтами $w_k^{(n)} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, який задовольняє гомологічне рівняння

$$\left\langle \frac{\partial w_k}{\partial \varphi}, \omega \right\rangle + \lambda[w_k, J] = S_{N_{k+1}} \hat{Q}_k - f_k J$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $(\lambda, \mu, \varepsilon) \in \operatorname{Re} D_k$, $\lambda \neq \dfrac{\langle n, \omega \rangle}{2}$, $0 < |n| \le N_{k+1}$. Тут $[\cdot, \cdot]$ — матричний комутатор, а $S_{N_{k+1}} \hat{Q}_k$ — відрізок ряду Фур'є для $\hat{Q}_k$, який включає всі гармоніки з номерами $|n| \le N_{k+1}$. Поліном $w_k$ можна вибрати так, щоб у дійсній області справджувалась рівність

$$w_k \big|_{\varphi = \omega x} = e^{\lambda x J} \int^{x} e^{-\lambda s J} \left[ S_{N_{k+1}} \hat{Q}_k \big|_{\varphi = \omega_s} - f_k J \right] e^{\lambda s J} \, ds \, e^{-\lambda x J},$$

де $\int^x e^{as} ds := \dfrac{e^{ax}}{a}$. Тому $w_k \colon \operatorname{Re} G_{k+1} \mapsto K$, і це відображення допускає аналітичне продовження $w_k \colon G_{k+1} \mapsto \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Виконаємо в системі (18) заміну параметрів і шуканої вектор-функції

$$\mu_k = \mu_{k+1} + f_k(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon),$$

$$z_k = (I + w_k(\omega x, \lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon)) z_{k+1}.$$

Тоді перетворена система при $(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon) \in \operatorname{Re} D_{k+1}$ буде мати вигляд

$$z'_{k+1} = [(\lambda + \mu_{k+1}) J + Q_{k+1}(\omega x, \lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon)] z_{k+1}, \tag{20}$$

де

$$Q_{k+1} := (I + w_k)^{-1} \Big( \mu_{k+1}[J, w_k] + f_k J w_k + \hat{Q}_k w_k + f_k \hat{Q}'_k (I + w_k) + R_{N_{k+1}} \hat{Q}_k \Big),$$

$$\hat{Q}'_k := \int_0^1 \frac{\partial \hat{Q}_k(\varphi, \lambda, \mu_{k+1} + s f_k, \varepsilon)}{\partial \mu} ds, \qquad R_{N_{k+1}} \hat{Q}_k = \hat{Q}_k - S_{N_{k+1}} \hat{Q}_k.$$

Таким чином, ми побудували перетворення $(k+1)$-го кроку ітераційного процесу у вигляді

$$W_{k+1}(\varphi, \lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon) := (I + W_k(\varphi, \lambda, \mu_{k+1} + f_k(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon), \varepsilon)) \times$$
$$\times (I + w_k(\varphi, \lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon)) - I,$$

$$F_{k+1}(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon) := f_k(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon) + F_k(\lambda, \mu_{k+1} + f_k(\lambda, \mu_{k+1}, \varepsilon), \varepsilon).$$

**4. Збіжність ітераційного процесу.** Перш ніж формулювати результат про збіжність описаного вище процесу, наведемо модифіковану у порівнянні з [2] оцінку залишку ряду Фур'є аналітичної функції.

**Лема 3.** *Нехай* $f \colon \Pi_\rho \mapsto \mathbb{C}$ — *аналітична періодична з періодом* $2\pi$ *за кожною змінною* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *функція, для якої* $|f(\varphi)| \le M$ *в* $\Pi_\rho$. *Тоді для довільного* $\delta \in (0, \rho)$ *і кожного* $N$ *такого, що* $2N + 1 > (m-1)/\delta$, *в області* $\Pi_{\rho - \delta}$ *справджується нерівність*

$$|R_N f(\varphi)| \le 2^{m/2} \sqrt{em!} \, \frac{e^{-\delta N} M}{\delta} (2N+1)^{(m-1)/2}.$$

***Доведення.*** Як показано в [17], коефіцієнти ряду Фур'є $\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} f^{(n)} e^{i\langle n, \varphi \rangle}$ функції $f(\varphi)$ мають властивість

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \left| f^{(n)} \right|^2 e^{2\|n\|} \le 2^m M^2.$$

Тоді якщо $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho - \delta$, то

$$|R_N f(\varphi)| \le 2^{m/2} M \sqrt{\sum_{|n|>N} e^{-2\delta|n|}} \le 2^{m/2} M \sqrt{2m \sum_{j>N} e^{-2\delta j}(2j+1)^{m-1}}.$$

Оскільки при $2x+1 > (m-1)/\delta$ функція $e^{-2\delta x}(2x+1)^{m-1}$ монотонно спадає, то

$$\sum_{j>N} e^{-2\delta j}(2j+1)^{m-1} \le \int_N^{\infty} e^{-2\delta s}(2s+1)^{m-1} ds \le \frac{e^{-2\delta N}}{\delta^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\delta(2N+1))^k}{k!},$$

звідки й випливає потрібна оцінка.

**Твердження 1.** *Існують таке досить велике $r_0 > 0$ і таке досить мале $\varepsilon_* > 0$, що для довільного $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_*)$ послідовність $W_k(\varphi, \lambda, 0, \varepsilon)$ рівномірно збігається на множині $\mathbb{T}^m \times L_\infty \times \{\varepsilon \in \mathbb{C}: |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ разом з похідними першого порядку щодо $\varphi$, а послідовність $F_k(\lambda, 0, \varepsilon)$ рівномірно збігається на $L_\infty \times \{\varepsilon \in \mathbb{C}: |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$.*

***Доведення.*** Спочатку встановимо кілька допоміжних оцінок. З вимоги А) випливає, що знайдеться число $\tau > 0$ таке, що

$$p(\theta r) - p(r) = \int_{1/\theta}^{1} \frac{d}{ds} p(s\theta r) ds \ge \int_{1/\theta}^{1} \frac{\tau}{s} ds = \tau \ln\theta.$$

Тоді

$$M_k^b - M_{k+1}^b \ge M_k^b\left(1 - e^{-b\tau\ln\theta}\right). \tag{21}$$

Оскільки $q(r_k) > q(r_{k+1})$, то

$$M_k^\theta \le M_{k+1}. \tag{22}$$

З огляду на властивість D) для досить великого $r_0$ і всіх $k = 1, 2, \ldots$ маємо нерівність

$$\rho_k - \rho_{k+1} = \frac{\sigma}{m\theta} \int_1^{1/\theta} q'(s\theta r_k) ds\, \theta r_k \ge \frac{\sigma l(\theta-1)\ln r_k}{m\theta^2 r_k}, \tag{23}$$

а з (3) випливає, що

$$r_k \le e^{p(r_k)/l} = M_k^{-1/l}. \tag{24}$$

Однак якщо $l_* = \infty$, то при досить великому $r_0$ можна замінити $l$ на $2l$. У цьому випадку будемо використовувати оцінку

$$r_k \le M_k^{-1/2l}. \tag{25}$$

Оцінки, які наводяться нижче, мають місце для досить великого $r_0 > 0$ і досить малого $\varepsilon_* > 0$, причому ці числа не залежать від $k$.

Скориставшись результатами роботи [17] та врахувавши оцінки (19), (23), (24), дістанемо

$$\| w_k(\varphi, \lambda, \mu, \varepsilon) \| \le \frac{8\sqrt{(2m!)}|\varepsilon| M_k^{1-\sigma}}{\varepsilon_0^\alpha M_k^a (\rho_k - \rho_{k+1})^m} \le |\varepsilon|^{1-\alpha} M_k^\eta,$$

якщо $|\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_{k+1}$, $\lambda \in L_{k+1}$, $|\mu| < |\varepsilon|^\beta M_k^b$.

Очевидно, що в $D_k$ виконується нерівність

$$|f_k(\lambda, \mu, \varepsilon)| \le \left\| \widehat{\overline{Q}_k} \right\| \le 4|\varepsilon| M_k^{1-\sigma}. \tag{26}$$

Тепер в області $G_{k+1}$ маємо

$$\|\mu[J, w_k]\| \leq 4|\varepsilon|^\beta M_{k+1}^b |\varepsilon|^{1-\alpha} M_k^\eta \leq 4|\varepsilon|^{1-\alpha+\beta} M_{k+1},$$

оскільки з (15) випливає $b\theta + \eta > \theta$,

$$\|f_k J w_k\| \leq 8|\varepsilon|^{2-\alpha} M_k^{1-\sigma+\eta} \leq 8|\varepsilon|^{2-\alpha} M_{k+1},$$

$$\left\|\hat{Q}_k w_k\right\| \leq 4|\varepsilon|^{2-\alpha} M_k^{1-\sigma+\eta} \leq 4|\varepsilon|^{2-\alpha} M_{k+1},$$

оскільки з (15) випливає $1 - \sigma + \eta > \theta$.

З урахуванням нерівності Коші і (21) дістанемо

$$\left\|f_k \hat{Q}_k'(I + w_k)\right\| \leq 24|\varepsilon| M_k^{1-\sigma} \frac{|\varepsilon| M_k^{1-\sigma}}{|\varepsilon|^\beta (M_k^b - M_{k+1}^b) - 4|\varepsilon| M_k^{1-\sigma}} \leq$$

$$\leq \frac{24|\varepsilon|^{1-\beta}}{1 - e^{-b\tau \ln\theta}} |\varepsilon| M_{k+1},$$

оскільки $1 - \sigma - b > 1/l$ і $2 - 2\sigma - b > \theta$.

Оцінимо $\left\|R_{N_{k+1}} \hat{Q}_k\right\|$ в $D_{k+1}$. Зауваживши, що з властивості C) випл нерівність

$$\frac{(\rho_k - \rho_{k+1}) q(r_{k+1})}{|q'(r_{k+1})|} \geq \frac{\sigma}{m\theta} \int_{1/\theta}^{1} \frac{|q'(s\theta r_k)|}{q(s\theta r_k)} ds \frac{q(r_{k+1})}{|q'(r_{k+1})|} p(r_{k+1}) \geq \frac{\sigma(\theta - 1)}{m\theta^2} p(r_{k+1}),$$

врахувавши (16), (23) та взявши до уваги лему 3, дістанемо

$$\left\|R_{N_{k+1}} \hat{Q}_k\right\| \leq \frac{|\varepsilon|}{4} M_{k+1}^{\frac{1-\sigma}{\theta} + \frac{\nu\sigma(\theta-1)}{m\theta^2} - \frac{m}{l\theta}} = \frac{|\varepsilon|}{4} M_{k+1}.$$

На основі одержаних оцінок в області $G_{k+1}$ будемо мати

$$\|Q_{k+1}\| \leq |\varepsilon| M_{k+1}.$$

Крім того, в $G_{k+1}$ виконується

$$\|W_{k+1}\| \leq \|W_k\| + (1 + \|W_k\|)\|w_k\| \leq \|W_k\| + \frac{3}{2}|\varepsilon|^{1-\alpha} M_k^\eta.$$

Звідси за індукцією встановлюємо, що $r_0$ і $\varepsilon_*$ можна вибрати так, що для к ного натурального $k$ в $G_k$ буде виконуватись нерівність

$$\|W_k\| \leq \frac{3}{2}|\varepsilon|^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} M_j^\eta < \frac{1}{2}.$$

Аналогічні міркування дозволяють довести, що

$$|F_k| \leq 4|\varepsilon| \sum_{j=0}^{k-1} M_j^{1-\sigma} < |\varepsilon|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Оскільки з (26) та нерівності Коші в $D_{k+1}$ випливають оцінки

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial \mu_{k+1}}\right| \leq \frac{4|\varepsilon|^{1-\beta} M_k^{1-\sigma-b}}{(1 - e^{-b\tau \ln\theta})}$$

і

$$\left|\frac{\partial F_{k+1}}{\partial \mu_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{\partial F_k}{\partial \mu_k}\right| + \left(1 + \left|\frac{\partial F_k}{\partial \mu_k}\right|\right)\left|\frac{\partial f_k}{\partial \mu_{k+1}}\right|,$$

то за індукцією встановлюємо оцінку

$$\left|\frac{\partial F_k}{\partial \mu_k}\right| \le \frac{6|\varepsilon|^{1-\beta}}{1-e^{-b\tau\ln\theta}}\sum_{j=0}^{k-1} M_j^{1-\sigma-\beta} < \frac{1}{2} \quad \forall(\lambda,\mu_k,\varepsilon)\in D_k, \quad k=1,2,\ldots .$$

Далі,

$$\|W_{k+1}(\varphi,\lambda,0,\varepsilon)-W_k(\varphi,\lambda,0,\varepsilon)\| \le \|w_k\|(1+\|W_k\|) +$$
$$+\ \|W_k(\varphi,\lambda,f_k,\varepsilon)-W_k(\varphi,\lambda,0,\varepsilon)\| \le \frac{3}{2}|\varepsilon|^{1-\alpha}M_k^{\eta}+2|\varepsilon|^{1-\beta}M_k^{1-\sigma-b},$$

якщо $\varphi\in\Pi_{k+1}$, $\lambda\in L_{k+1}$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, і

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varphi_j}(W_{k+1}(\varphi,\lambda,0,\varepsilon)-W_k(\varphi,\lambda,0,\varepsilon))\right\| \le$$
$$\le \frac{3}{2}\left\|\frac{\partial w_k}{\partial\varphi_j}\right\|+\|w_k\|\left\|\frac{\partial W_k}{\partial\varphi_j}\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial\varphi_j}(W_k(\varphi,\lambda,f_k,\varepsilon)-W_k(\varphi,\lambda,0,\varepsilon))\right\| \le$$
$$\le 2|\varepsilon|^{1-\beta}\left(M_k^{\eta}+M_k^{1-\sigma-b}\right)\frac{m\theta}{\sigma q(r_k)} \le |\varepsilon|^{1-\beta}\left(M_k^{\eta-1/l}+M_k^{1-\sigma-b-1/l}\right),$$

якщо додатково вимагати, щоб $\varphi\in\mathbb{R}^m$.

Нарешті,

$$|F_{k+1}(\lambda,0,\varepsilon)-F_k(\lambda,0,\varepsilon)| \le$$
$$\le |F_k(\lambda,f_k,\varepsilon)-F_k(\lambda,0,\varepsilon)|+|f_k| \le 6|\varepsilon|M_k^{1-\sigma} \quad \forall\lambda\in L_k, \quad |\varepsilon|<\varepsilon_0. \tag{27}$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}M_k^{\delta}$ збігається для довільного $\delta>0$, то одержані оцінки і доводять твердження 1.

**5. Існування функції $\lambda(\cdot)$.** Покладемо

$$\Lambda := (2\varepsilon_0^{\alpha},\infty)\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{0<|n|\le N_{k+1}}\left\{\lambda\in\mathbb{R}:|\langle n,\omega\rangle-2\lambda|<3\varepsilon_0^{\alpha}M_k^{a}|n|^{-m}\right\}.$$

**Твердження 2.** *Якщо $\varepsilon_*>0$ досить мале, то для кожного $\varepsilon_0\in(0,\varepsilon_*)$ існує функція $F(\lambda,\varepsilon)\in C(\mathbb{R}\times\{\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|<\varepsilon_0\}\mapsto\mathbb{C})$ з такими властивостями:*

1) *для кожного $\lambda\in\Lambda$ має місце рівність $F(\lambda,\varepsilon)=F_\infty(\lambda,0,\varepsilon):=$ $:=\lim_{k\to\infty}F_k(\lambda,0,\varepsilon)$;*

2) *існує неперервна похідна $F'_\lambda(\lambda,\varepsilon)\in C(\mathbb{R}\times\{\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|<\varepsilon_0\}\mapsto\mathbb{C})$;*

3) *для кожного $\lambda\in\mathbb{R}$ функція $F(\lambda,\cdot)$ є дійсно-аналітичною, причому знайдеться стала $c>0$ така, що*

$$|F(\lambda,\varepsilon)|+|F'_\lambda(\lambda,\varepsilon)| \le \frac{c|\varepsilon|}{\varepsilon_0^{\beta}}, \qquad |F'_\varepsilon(\lambda,\varepsilon)| \le \frac{c}{\varepsilon_0^{\beta}}, \qquad (\lambda,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\left(-\frac{\varepsilon_0}{2},\frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

***Доведення.*** Покладемо $\kappa_1=\varepsilon_0^{\beta_1}$, $\kappa_{k+1}=\varepsilon_0^{\beta_1}M_k^{1-\sigma-\eta}$, $k=1,2,\ldots$, де $\beta_1$ вибирається з інтервалу $(\alpha,\beta)$. Зрозуміло, що $\Lambda+\kappa_1\subset L_1$. Покажемо, що з припущення $\Lambda+\kappa_k\subset L_k$ випливає $\Lambda+\kappa_{k+1}\subset L_{k+1}$.

Дійсно, з огляду на (16), (24), (25) можна вважати, що

$$\varepsilon_0^{\alpha}M_k^{a}|n|^{-m} \ge \varepsilon_0^{\alpha}M_k^{a}N_{k+1}^{-m} \ge \varepsilon_0^{\beta_1}M_k^{a+m/l} = \varepsilon_0^{\beta_1}M_k^{1-\sigma-\eta} = \kappa_{k+1}$$

для всіх $k=1,2,\ldots$ і всіх $n\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}$ таких, що $|n|\le N_{k+1}$.

Виберемо тепер довільне $\lambda \in \Lambda$. Тоді $|\langle n, \omega \rangle - 2\lambda| \geq 3\varepsilon_0^\alpha M_k^a |n|^{-m}$, як тільки $|n| \leq N_{k+1}$. Якщо тепер $\lambda'$ належить $\kappa_{k+1}$-околу точки $\lambda$ в $\mathbb{C}$, а отже, $|\lambda' - \lambda| < \kappa_{k+1}$, то $\lambda' \in L_k$ і

$$|\langle n, \omega \rangle - 2\lambda'| \geq |\langle n, \omega \rangle - 2\lambda| - 2|\lambda' - \lambda| \geq$$
$$\geq 3\varepsilon_0^\alpha M_k^a |n|^{-m} - 2\kappa_{k+1} \geq \varepsilon_0 M_k^a |n|^{-m} \quad \forall\, |n| \leq N_{k+1}.$$

Це означає, що $\lambda' \in L_{k+1}$.

Покладемо тепер $F_k^{(j)}(\lambda) := \dfrac{\partial^j F_k(\lambda, 0, 0)}{\partial \varepsilon^j}$, $j = 0, 1, \ldots$. З (4) і нерівності Коші випливає

$$\left| F_{k+1}^{(j)}(\lambda) - F_k^{(j)}(\lambda) \right| \leq 6j\,!\varepsilon_0^{1-j} M_k^{1-\sigma}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

для всіх $\lambda \in L_k$. Крім того, $F_k^{(0)}(\lambda) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Але тоді в $\Lambda + \kappa_k$ виконується нерівність

$$\left| F_k^{(j)}(\lambda) - F_{k-1}^{(j)}(\lambda) \right| \leq 6j\,!\varepsilon_0^{1-\beta-j} \kappa_{k+1}^{\xi}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

де $\xi := \min\left(\dfrac{\beta}{\beta_1}, \dfrac{1-\sigma}{1-\sigma-\eta}\right) > 1$. Скориставшись відомими результатами про диференційовність в сенсі Вітні функцій, заданих на канторових множинах (див., наприклад, [19, 20]), можемо стверджувати, що знайдеться стала $c_1 > 0$ така, що для кожного $j = 1, 2, \ldots$ існує функція $F^{(j)}(\lambda) \in C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ з такими властивостями:

1) $F^{(j)}(\lambda) = \lim_{k \to \infty} F_k^{(j)}(\lambda, 0, 0) \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$;

2) $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| F^{(j)}(\lambda) \right| \leq c_1 j\,!\varepsilon_0^{1-\beta-j}, \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{dF^{(j)}(\lambda)}{d\lambda} \right| \leq c_1 j\,!\varepsilon_0^{1-\beta-j}$.

Тоді при кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ функції

$$F(\lambda, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F^{(j)}(\lambda)}{j\,!} \varepsilon^j \quad \text{і} \quad F_\lambda'(\lambda, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\,!} \frac{dF^{(j)}(\lambda)}{d\lambda} \varepsilon^j$$

аналітичні в крузі $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, а при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 / 2$ вони задовольняють нерівності

$$|F(\lambda, \varepsilon)| \leq 2c_1 \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_0^\beta}, \quad \left| \frac{\partial F(\lambda, \varepsilon)}{\partial \lambda} \right| \leq 2c_1 \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_0^\beta}, \quad |F_\varepsilon'(\lambda, \varepsilon)| \leq \frac{4c_1}{\varepsilon_0^\beta}.$$

Зрозуміло, що

$$F(\lambda, \varepsilon) = \lim_{k \to \infty} F_k(\lambda, 0, \varepsilon) \quad \forall\, \lambda \in \Lambda, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Твердження доведено.

З доведеного твердження і теореми про неявну функцію випливає існування функції $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot) \in \dot{C}^1((0, \infty) \times (-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2) \mapsto \mathbb{R})$, для якої виконується тотожність

$$\tilde{\lambda}(\sqrt{E}, \varepsilon) + F\left(\tilde{\lambda}(\sqrt{E}, \varepsilon), \varepsilon\right) = \sqrt{E}.$$

Покладемо $\lambda(E) := \tilde{\lambda}\left(\sqrt{E}, \dfrac{2c_0}{\sqrt{E}}\right)$. Тоді

$$\left|\lambda(E)-\sqrt{E}\right| + \left|\frac{d\lambda(E)}{d\sqrt{E}}-1\right| = O\left(\frac{\sqrt{E_0}^{\,\beta}}{\sqrt{E}}\right).$$

Нарешті, зауважимо, що з нерівності $|n| \leq N_{k+1}$ випливає нерівність $r_{k+1} \geq$ $\geq h(|n|/\nu)$, а з нею і нерівність $M_k \leq \exp(-p(h(|n|/\nu)/\theta))$.

Тепер для того, щоб остаточно переконатися у правильності теореми 1, досить лише в разі потреби дещо збільшити число $\beta < 1$ і зменшити число $\alpha > 0$.

**6. Оцінки довжин резонансних зон для потенціалів класу Жевре.** Знайдемо вигляд функції $g(\cdot)$ з теореми 1 у випадку, коли потенціал належить класу Жевре $C(s^{\kappa s})$, тобто $u(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R})$, й існують сталі $K > 0$ і $\kappa \geq 1$ такі, що для довільного $s = 1, 2, \ldots$ модуль кожної частинної похідної функції $u(\varphi)$ порядку $s$ не перевищує $K^s s^{\kappa s}$.

Якщо $\kappa = 1$, то потенціал є дійсно-аналітичним. Тому надалі вважаємо $\kappa >$ $> 1$. Змінивши в разі потреби сталу $K$, для функції (2) будемо мати

$$A_u(s) \leq K^s s^{\kappa s} \quad \forall\, s \in (0, \infty). \tag{28}$$

**Теорема 3.** *Нехай потенціал $u(\varphi)$ належить класу Жевре $C(s^{\kappa n})$, де $\kappa >$ $> 1$, і, зокрема, задовольняє нерівності* (28). *Тоді для довільного $\delta > 0$ можна вказати таке число $E_0 > 0$, що теорема 1 буде правильною, якщо покласти*

$$g(r) = r^{-m} e^{-(\zeta-\delta)r^{1/\kappa}},$$

*де*

$$\zeta := \frac{\kappa}{e}\left(\frac{\kappa-1}{2Km\kappa}\sup_{\mathcal{D}}\frac{x^\kappa yz}{(y+z)(1+z)^2}\right)^{1/\kappa},$$

$$\mathcal{D} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+ :\ x + z(z+1) + (2z+3)y < 1\right\}.$$

***Доведення.*** Як відомо (див., наприклад, [22, с. 119, 212; 23, с. 231]), існує поліноміальне ядро типу Валле Пуссена $V_{2N-1}(t)$ порядку $2N-1$, $N = 1, 2, \ldots$, таке, що його константа Лебега не перевищує $5/2$ і для кожної функції $f \in C^\infty(\mathbb{T}^1 \mapsto \mathbb{R})$ виконується оцінка

$$\left| f(t) - \int_{-\pi}^{\pi} V_{2N-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \right| \leq \frac{5\pi^2}{4(N+1)^s} A_f(s) \quad \forall\, s \in (0, \infty).$$

Скориставшись цим фактом, легко показати, що поклавши

$$T_{[r]}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{m} V_{2N-1}(\varphi_j-\tau_j)\, u(\tau_1,\ldots,\tau_m)\, d\tau_1\ldots d\tau_m,$$
$$2N-1 \leq r < 2N+1,$$

дістанемо

$$\left|u(\varphi) - T_{[r]}(\varphi)\right| \leq C(m)\frac{2^s}{(r+1)^s} A_u(s) \leq C(m)\frac{(2K)^s s^{\kappa s}}{r^s}, \tag{29}$$

де $C(m) \leq 5\pi^2((3/2)^m - 1)/2$. Тому в даному випадку природно визначити

$$p(r) = \sup_{s\geq 0}\left(s\left(\ln\frac{r}{2K} - \kappa\ln s\right)\right) = \frac{\kappa}{e}\left(\frac{r}{2K}\right)^{1/\kappa}.$$

Ця функція задовольняє умови A) – D), причому $l_* = \infty$. Отже, в теоремі 1 число $l$ може бути як завгодно великим.

Далі, оскільки $\dfrac{q(r)}{|q'(r)|} = \dfrac{\kappa r}{\kappa - 1}$, то $h(r) = \dfrac{(\kappa-1)r}{\kappa}$, звідки

$$ap(h(r/\nu)/\theta) = \frac{a\kappa}{e}\left(\frac{(\kappa-1)r}{2K\kappa\nu\theta}\right)^{1/\kappa}.$$

Тепер для одержання якомога вищої швидкості росту цієї функції потрібно максимізувати величину $\dfrac{a^\kappa}{\theta\nu}$ в області, яку в $\mathbb{R}^3$ виділяють нерівності (4). Ця область скінченна і в границі при $l \to \infty$ перетворюється в множину

$$\left\{(a, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^3 \colon \theta > 1,\ a + \theta(\theta - 1) + (2\theta + 1)\sigma < 1\right\}.$$

Крім того,

$$\frac{a^\kappa}{\theta\nu} \to \frac{a^\kappa \sigma(\theta - 1)}{m\theta^2(\theta - 1 + \sigma)}, \quad l \to \infty.$$

На основі цих міркувань та після введення позначень $a = x$, $\sigma = y$, $\theta = 1 + z$ дістаємо формулу для показника $\zeta$.

Теорему доведено.

Можна показати, що

$$\sup_{\mathcal{D}} \frac{x^\kappa yz}{(y+z)(1+z)^2} = \sup_{(y,z)\in\mathcal{G}} \frac{(1 - z(z+1) - y(2z+3))^\kappa yz}{(y+z)(1+z)^2},$$

де $\mathcal{G} := \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y \le \dfrac{1 - z(1+z)}{2z+3},\ 0 < z \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

Виконавши відповідні обчислення, знайдемо наближені значення $\zeta$ для $\kappa = 2, 3, 4$:

| $\kappa$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\zeta$ | $0{,}064\left(\frac{1}{2Km}\right)^{1/2}$ | $0{,}218\left(\frac{1}{2Km}\right)^{1/3}$ | $0{,}425\left(\frac{1}{2Km}\right)^{1/4}$ |

**7. Заключні зауваження.** Розвинута у даній роботі техніка дозволяє з єдиних позицій підійти до розв'язання задачі про побудову розв'язків Флоке – Блоха для рівняння (1) з потенціалом, що належить різним класам функцій — скінченно диференційовним, гладким, аналітичним.

Нерівність (29) надає можливість ефективно оцінювати довжини резонансних енергетичних зон на основі інформації про швидкість зростання функції $A_u(s)$ при $s \to \infty$. Як і в п. 6, можна проаналізувати випадки, коли $u(\varphi)$ належить не лише класу Жевре, але й іншим просторам Карлемана функції на торі $\mathbb{T}^m$, зокрема класам квазіаналітичних функцій [24]. Викладу відповідних результатів буде присвячено окрему статтю. У цьому зв'язку зазначимо, що рівняння Хілла з квазіаналітичним потенціалом досліджено в [25].

Нарешті зауважимо, що вибір функції $g(\cdot)$, яка оцінює резонансні зони, взагалі кажучи, обумовлений методом дослідження. Зменшуючи швидкість прямування цієї функції до нуля, можна підвищити гладкість $\lambda(E)$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
2. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 5. – С. 13 – 40.
3. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. – 1967. – **169**. – P. 136 – 176.
4. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил. – 1975. – **9**, № 4. – С. 8 – 21.
5. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Оценки размеров лакун в спектре // Теорет. и мат. физика. – 1975. – **25**, № 3. – С. 344 – 357.
6. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Зависимость энергии от квазиимпульса // Там же. – 1976. – **26**, № 1. – С. 35 – 41.
7. *Парасюк И. О.* О зонах неустойчивости уравнения Шредингера с гладким квазипериодическим потенциалом // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 70 – 78.
8. *Парасюк И. О.* Построение и исследование квазипериодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1979. – 145 с.
9. *Rüssmann H.* On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential // Nonlinear dynamics: Int. Conf. (New York, 1979): Ann. N. Y. Acad. Sci. – 1980. – **357**. – P. 90 – 107.
10. *Moser J., Pöschel J.* An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. math. helv. – 1984. – **59**. – P. 39 – 85.
11. *Chierchia L.* Absolutely continuous spectra of quasiperiodic Schrödinger operators // J. Math. Phys. – 1987. – **28**. – P. 2891 – 2898.
12. *Ткаченко В. И.* Расщепляемость и спектр линейного дифференциального уравнения с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1383 – 1388.
13. *Eliasson L. H.* Floquet solutions for the one-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Communs Math. Phys. – 1992. – **146**. – P. 447 – 482.
14. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1963. – 340 с.
15. *Белоколос Е. Д., Пернко И. М.* Связь между гладкостью потенциала и размерами лакун в предельном спектре оператора Шредингера // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 6. – С. 648 – 653.
16. *Мозер Ю.* Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179 – 238.
17. *Rüssmann H.* On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equation of first order with constant coefficients on the torus // Lect. Notes Phys. – 1975. – **38**. – P. 598 – 624.
18. *O'Brien G. C.* Reducibility theorem for smooth quasiperiodic systems // J. Different. Equat. – 1976. – **22**, № 2. – P. 314 – 330.
19. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Communs Pure and Appl. Math. – 1982. – **35**, № 5. – P. 653 – 695.
20. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1997. – **1645**. – 195 p.
21. *Самойленко А. М.* Приводимость систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1669 – 1680.
22. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
23. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
24. *Mandelbrojt S.* Series adherentes. Regularization des suites. Applications. – Paris: Gauthier-Villars, 1952. – 277 p.
25. *Novitskij M.* Quasianalytic classes and isospectral Hill's operators // Spectral Operator Theory and Related Topics. Adv. Sov. Math. – 1994. – **19**. – P. 27 – 39.


Одержано 05.05.2003