УДК 519.21

**Я. Ф. Виннишин** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ЗГОРТКИ СИНГУЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ

We construct an example demonstrating that essential restrictions on finite convolutions of singular distribution do not guarantee the severity of boundary distribution.

Побудовано приклад, який показує, що природні обмеження на скінченні згортки сингулярних розподілів не гарантують чистоту граничного розподілу.

Одним із класичних результатів в області, пов'язаній з вивченням функції розподілу суми ряду незалежних випадкових величин, є теорема Джессена – Вінтнера [1]. У термінах нескінченних згорток вона формулюється таким чином:

нехай $F_1, F_2, \ldots$ — послідовність функцій розподілу така, що:

А) $\forall n \in N : F_n$ — чисто дискретна функція розподілу;

Б) нескінченна згортка $F = F_1 * F_2 * \ldots$ збігається.

Тоді $F$ є чистою функцією розподілу.

Ця теорема є дуже зручною при вивченні нескінченних згорток функцій розподілу. Тому аналог теореми Джессена – Вінтнера для сингулярних функцій розподілу викликає великий інтерес. До цього питання неодноразово звертався В. М. Золотарьов (наприклад, в коментарях до книги [2] і в роботі [3], де формулюється припущення, що чистоти нескінченної згортки можна досягти, накладаючи певні умови на скінченні згортки сингулярних розподілів). Запропонований в [2] гіпотетичний варіант аналога Джессена – Вінтнера має такий вигляд:

нехай $F_1, F_2, \ldots$ — послідовність сингулярних функцій розподілу така, що:

а) $\forall n \in N : F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ — сингулярна функція розподілу;

б) нескінченна згортка $F_1 * F_2 * \ldots$ збігається до деякої функції розподілу $F$.

Тоді $F$ є або чисто сингулярною, або чисто абсолютно неперервною.

У роботі [3] наводиться інший гіпотетичний варіант, де умову а) замінено умовою а$_1$) $\forall n \in N \ \ \forall k_1, k_2 \ldots, k_n \in N$ згортка $(F_1)^{*k_1} * (F_2)^{*k_2} * \ldots * (F_n)^{*k_n}$ є сингулярною функцією розподілу.

Проте наведені в [4 – 7] контрприклади показують, що сформульовані твердження не мають місця. Якщо і далі посилювати умову а), то природною буде така умова:

а$_2$) нехай $F_k$ — функція розподілу випадкової величини $\xi_k$; позначимо через $F_k^i$ функцію розподілу випадкової величини $\xi_k^i = \alpha_k^i \xi_k + \beta_k^i$, де $\alpha_k^i$, $\beta_k^i \in R$, $\alpha_k^i \neq 0$. Будемо вимагати, щоб послідовність функцій розподілу $F_1, F_2, \ldots$ була такою, що $\forall n \in N \ \ \forall k_1, k_2, \ldots, k_n \in N \ \ \forall \left\{\alpha_b^i\right\} \ \ \forall \beta_l^i \in R$, $i = \overline{1, k_l}$, $l = \overline{1, n}$, згортка

$$F^*[n] = \prod_{l=1}^{n} * \prod_{i=1}^{k_l} * F_l^i = \begin{array}{ccccccccc} & F_1^1 & * & F_1^2 & * & \ldots & * & F_1^{k_1} & * \\ * & F_2^1 & * & F_2^2 & * & \ldots & * & F_2^{k_2} & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & F_n^1 & * & F_n^2 & * & & * & F_n^{k_n} & \end{array} \qquad (1)$$

є сингулярною функцією розподілу.

© Я. Ф. ВИННИШИН, 2004

Метою даної роботи є побудова суттєво простішого, ніж в [4 – 6], прикладу, який показує, що навіть при більш жорсткій умові a$_2$) на скінченні згортки сингулярних функцій розподілу аналог теореми Джессена – Вінтнера не має місця.

У подальшому $N$ — множина натуральних чисел, $N_0 = N \bigcup \{0\}$.

Нехай $A_0, A_1, \ldots$ — підмножини множини натуральних чисел $N$ такі, що:

1) $\forall\, i, j \in N_0, i \neq j,\ A_i \bigcap A_j = \varnothing$;

2) $\bigcup\limits_{i \in N_0} A_i = N$ ;

3) для будь-якого $i \in N_0$ множина $A_i$ містить нескінченно багато елементів;

4) для будь-якого $m \in N_0$ розглянемо множину $B_m = \bigcup\limits_{i=0}^{m} A_i$.

Нехай

$$b_s^{(m)} = |B_m \bigcap \{a \in N : a \leq s\}|,$$

де $|\cdot|$ — кількість елементів скінченної множини. Будемо вимагати, щоб при фіксованому $m \in N_0$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{b_s^{(m)}}{s} = 0.$$

Розбиття множини натуральних чисел на підмножини $A_0, A_1, \ldots,$ для яких виконуються умови 1 – 4, існують. Їх побудову можна здійснити, наприклад, послідовно. Якщо $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ вже побудовано, то в якості множини $A_m = \left\{a_s^{(m)}\right\}$ вибираємо таку: $a_1^{(m)}$ — найменше з ще не вибраних натуральних чисел (це забезпечить виконання умови 2), а при виборі вільного елемента $a_s^{(m)}$, $s \geq 2$, будемо вимагати, щоб

$$a_s^{(m)} \geq s^2.$$

Множину $A_0$ вибираємо аналогічно: $a_1^{(0)} = 1$, а для $s \geq 2$ вимагаємо, щоб

$$a_s^{(0)} \geq s^2.$$

Тоді $b_s^{(m)} = \sum\limits_{i=0}^{m} |A_i \bigcap \{a \leq s\}| \leq (\sqrt{s} + 1)(m + 1)$, звідки випливає, що умова 4 виконується.

Нехай $\tau$, $\eta_k, k \in N$, — незалежні однаково розподілені бернуллівські величини $\mathrm{P}\{\eta_k = 0\} = \mathrm{P}\{\eta_k = 1\} = 1/2$. Для $n \geq 2$ визначимо $\xi_n$ таким чином:

$$\xi_n = \sum_{k \in A_n} \frac{1}{2^k} \eta_k.$$

Нехай

$$\nu_0 = \sum_{k \in A_0} \eta_k \frac{1}{2^k}, \qquad \nu_1 = \sum_{k \in A_1} \eta_k \frac{1}{2^k}.$$

Покладемо

$$\xi_1 = \tau \nu_1 + (1 - \tau)(\nu_0 + \nu_1),$$

$\Phi_i$ — функція розподілу випадкової величини $\nu_i$, $i = 0, 1$, $F_n$ — функція розподілу випадкової величини $\xi_n$, $n \in N$.

Згідно з означеннями

$$F_1 = \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_0 * \Phi_1.$$

Нескінченна згортка $F = F_1 * F_2 * \ldots$ збігається, причому

$$F = \frac{1}{2}\Phi_1 * F_2 * F_3 * \ldots + \frac{1}{2}\Phi_0 * \Phi_1 * F_2 * F_3 * \ldots .$$

Функція $\Phi_0 * \Phi_1 * F_2 * F_3$ є функцією розподілу суми $\sum_{k\in N}\eta_k \frac{1}{2^k}$ і тому є функцією рівномірного на $[0;1]$ розподілу. Функція $\Phi_1 * F_2 * F_3$ є функцією розподілу суми $\sum_{k\in N\setminus A_0}\eta_k \frac{1}{2^k}$, а оскільки множина $A_0$ нескінченна, то ця функція розподілу є чисто сингулярною. Таким чином, $F$ містить абсолютно неперервну компоненту і сингулярну компоненту (вага кожної з них дорівнює $1/2$). Покажемо, що властивості $1-4$ забезпечують виконання умови a$_2$). Нехай $n, k_1, \ldots, k_n \in N$ і набори $\{\alpha_l^i\}$, $\{\beta_l^i\}$ є фіксованими. Розглянемо на деякому ймовірнісному просторі сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\tau^i$, $\eta_k^i$, яка має функцію розподілу $F^*[n]$, що задається згорткою (1). Випадкові величини

$$\alpha_1^i\left(\tau^i \sum_{k\in A_1}\frac{1}{2^k}\eta_k^i + (1-\tau^i)\sum_{k\in A_0\cup A_1}\frac{1}{2^k}\eta_k^i\right) + \beta_i, \quad i=\overline{1,k_1}, \tag{2}$$

мають функції розподілу $F_1^i$, а випадкові величини

$$\alpha_l^i \sum_{k\in A_l}\frac{1}{2^k}\eta_k^i, \quad i=\overline{1,k_l}, \quad l=\overline{1,m}, \tag{3}$$

— функції розподілу $F_l^i$. Крім того, випадкові величини сукупностей (2) і (3) незалежні, тому випадкова величина

$$\eta = \sum_{i=1}^{k_1}\left(\alpha_1^i\left(\tau^i \sum_{k\in A_1}\frac{1}{2^k}\eta_k^i + (1-\tau^i)\sum_{k\in A_0\cup A_1}\frac{1}{2^k}\eta_k^i\right) + \beta_1^i\right) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{k_l}\left(\alpha_l^i \sum_{k\in A_l}\frac{1}{2^k}\eta_k^i + \beta_l^i\right)$$

має функцію розподілу.

Виберемо довільне натуральне $s$ і перепишемо $\eta$ у вигляді $\eta = \eta_1 + \eta_2$, де

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{k_1}\left(\alpha_1^i\left(\tau^i \sum_{\substack{k\in A_1\\ k\le s}}\frac{1}{2^k}\eta_k^i + (1-\tau^i)\sum_{\substack{k\in A_0\cup A_1\\ k\le s}}\frac{1}{2^k}\eta_k^i\right) + \beta_1^i\right) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{k_l}\left(\alpha_l^i \sum_{\substack{k\in A_l\\ k\le s}}\frac{1}{2^k}\eta_k^i + \beta_l^i\right),$$

$$\eta_2 = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_1^i \left( \tau^i \sum_{\substack{k \in A_1 \\ k > s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i + (1-\tau^i) \sum_{\substack{k \in A_0 \cup A_1 \\ k > s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i \right) + \sum_{l=2}^{n} \sum_{i=1}^{k_l} \left( \alpha_l^i \sum_{\substack{k \in A_l \\ k > s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i \right).$$

Позначимо $M = \max\left\{ \left|\alpha_l^i\right|, i = \overline{1, k_l}, l = \overline{1, n} \right\}$. Тоді $|\eta_2| \le M\big(k_1 + k_2 + \ldots$ $\ldots + k_n\big)\frac{1}{2^s}$.

Випадкові величини

$$\alpha_l^i \sum_{\substack{k \in A_l \\ k \le s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i + \beta_l^i, \quad i = \overline{1, k_l}, \quad l = \overline{2, n},$$

набувають не більше, ніж $2^{b_s^{(n)}}$, різних значень, а випадкові величини

$$\alpha_1^i \left( \tau^i \sum_{\substack{k \in A_1 \\ k \le s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i + (1-\tau^i) \sum_{\substack{k \in A_0 \cup A_1 \\ k \le s}} \frac{1}{2^k} \eta_k^i \right) + \beta_1^i, \quad , i = \overline{1, k_1},$$

— не більше, ніж $2^{b_s^{(n)}+1}$, різних значень, тому випадкова величина $\eta_1$ набуває не більше, ніж

$$2^{k_1\left(b_s^{(n)}+1\right) + b_s^{(n)}(k_2 + \ldots + k_n)} \le 2^{2b_s^{(n)}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)},$$

різних значень. Властивість 4 дозволяє оцінити лебегівську міру носія функції розподілу $F^*[n]$. Оскільки $\eta = \eta_1 + \eta_2$, то лебегівська міра носія функції розподілу не перевищує $M\big(k_1 + k_2 + \ldots + k_n\big)2^{2b_s^{(n)}(k_1+k_2+\ldots+k_n)-s}$, а з умови 4 випливає, що при фіксованих $n$, $k_1, \ldots, k_n$, $\{\alpha_l^i\}$, $\beta_l^i$, $i = \overline{1, k_l}$, $l = \overline{1, n}$, ця величина прямує до нуля при $s \to \infty$.


1. *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and the Rieman – Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1935. – **38**. – P. 48 – 88.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
3. *Золотарев В. М., Круглов В. М.* Структура безграничпо делимых распределений на локально компактной абелевой группе // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – **20**, № 4. – С. 712 – 724.
4. *Винишин Я. Ф., Морока В. А.* О функции распределения суммы независимых случайных процессов // Избранные задачи современной теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 30 – 37.
5. *Винишин Я. Ф.* О свертках сингулярных функций распределения // Стохастический анализ и его приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 14 – 17.
6. *Винишин Я. Ф., Морока В. А.* О свертках сингулярных функций распределения и аналогах теоремы Джессена – Винтнера // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. – С. 9 – 18.
7. *Працьовитий М. В.* Про скінченні згортки сингулярних розподілів та сингулярний аналог теореми Джессена – Вінтнера // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1082 – 1088.


Одержано 16.09.2002