УДК 517.5

М. Г. Плешаков (Саратов. ун-т, Россия),
П. А. Попов (Киев. нац. ун-т технологий и дизайна)

ВТОРОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ЗНАКОСОХРАНЯЮЩЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We consider 2π-periodic function f that is continuous on $\mathbb{R}$ and changes the sign at $2s$ points $y_i \in [-\pi, \pi)$. For this function, we prove the existence of trigonometric polynomial T_n of order $\leq n$ which changes the sign at the same points y_i and whose deviation $|f(x) - T_n(x)|$ satisfies the second Jackson inequality.

Для 2π-періодичної неперервної на $\mathbb{R}$ функції, що змінює знак у $2s$ точках $y_i \in [-\pi, \pi)$, доведено існування тригонометричного полінома T_n порядку $\leq n$, який змінює знак у тих самих точках y_i і такий, що для відхилення $|f(x) - T_n(x)|$ має місце друга нерівність Джексона.

1. Введение. Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций f с равномерной нормой

$$\|f\| := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|;$$

$C^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, — подпространство функций $f \in C$, имеющих r-ю непрерывную производную $f^{(r)}$ на $\mathbb{R}$; $\mathbb{T}_n$ — пространство пригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$;

$$E_n(f) := \inf_{\tau_n \in \mathbb{T}_n} \|f - \tau_n\|$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции $f \in C$.

Пусть на промежутке $[-\pi, \pi)$ заданы $2s$ точек y_i: $-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, с помощью равенства $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ определим точки y_i для всех целых индексов i.

Обозначим $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Множество всех таких наборов Y обозначим через $\mathbb{Y}_s$. Для $Y \in \mathbb{Y}_s$ через $\Delta^{(0)}(Y)$ обозначим множество функций $f \in C$ таких, что f неотрицательна (неположительна) на $[y_i, y_{i-1}]$ при нечетных (четных) i.

Положим $\Pi(t) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{1}{2}(t - y_i)$. Легко видеть, что $\Pi \in \mathbb{T}_s$. Очевидно, что $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ в том и только в том случае, если $f(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Для каждых набора $Y \in \mathbb{Y}_s$ и функции $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ обозначим через

$$E_n^{(0)}(f; Y) := \inf_{\tau_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)} \|f - \tau_n\|$$

величину наилучшего равномерного знакосохраняющего приближения функции f.

В работе [1] доказан аналог неравенства Джексона

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le c(s)\omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

в котором $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции f, $c(s)$ — постоянная, которая зависит только от s.

Основным результатом настоящей работы является доказательство второго неравенства Джексона для знакосохраняющего приближения.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{Y}_s$. *Если* $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le \frac{c(r,s)}{n^r}\omega\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right), \quad n \ge N(Y,r),$$

где $c(r,s)$ — *постоянная, которая зависит только от* r *и* s, $N(Y,r)$ — *постоянная, которая зависит от* Y *и* r.

***Замечание* 1.** В работе не исследуется возможность замены $N(Y,r)$ на $N(s,r)$.

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{Y}_s$. *Если* $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le \frac{c(k,s)}{n^r}\omega_k\left(f';\frac{\pi}{n}\right), \quad n \ge N(Y,k),$$

где $c(k,s)$ — *постоянная, которая зависит только от* k *и* s, $N(Y,k)$ — *постоянная, которая зависит от* Y *и* k, $\omega_k(f';t)$ — k*-й модуль непрерывности функции* f'.

Сформулируем три простых следствия теоремы 2 и теоремы 2 из [1].

***Следствие* 1.** *Пусть* $Y \in \mathbb{Y}_s$, $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$. *Если*

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то

$$E_n^{(0)}(f;Y) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

***Замечание* 2.** Мы предполагаем, что следствие 1 справедливо и для $\alpha = 1$.

***Следствие* 2.** *При условиях теоремы* 2

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le \frac{C(k,Y)}{n}\omega_k\left(f';\frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C(k,Y)$ — *постоянная, которая зависит от* k *и* Y.

При каждом $r \in \mathbb{N}$ через W^r обозначим класс функций $f \in C$, имеющих абсолютно непрерывную на $\mathbb{R}$ $(r-1)$-ю производную и таких, что $|f^{(r)}(x)| \le 1$ п. в.

***Следствие* 3.** *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{Y}_s$. *Если* $f \in W^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le \frac{c(r,s)}{n^r}, \quad n \ge N(Y,r).$$

***Замечание* 3.** В силу теоремы 2 из [1] $N(Y,1) = 1$.

Далее через c_i обозначены постоянные, которые могут зависеть только от k или s или от k и s, и будет использовано обозначение

$$\delta_n(x;x^*) := \min\left\{1; \frac{1}{n\left|\sin\left((x-x^*)/2\right)\right|}\right\}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$ и разобьем числовую прямую равноотстоящими точками

$$x_j := -\frac{j\pi}{n}, \quad j\in\mathbb{Z}.$$

Введем множество O, которое определим следующим образом. Если $y_i\in\in[x_j, x_{j-1})$, то положим

$$O_i := (x_{j+1}, x_{j-2}).$$

Тогда обозначим

$$O := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_i.$$

Определим множества индексов H и H_*. Будем писать $j\in H_*$, если $(x_j, x_{j-1})\not\subset\not\subset O$; $j\in H$, если $j\in H_*$ и $|j|\le n$, $j\ne -n$. Обозначим также

$$x_j^* := \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \qquad h := \frac{\pi}{n}.$$

Пусть φ — k-мажоранта k-го модуля непрерывности функции f', т. е. $\varphi(0)=$ $=0$, $\varphi(t)$ не убывает на $[0,\infty)$, $t^{-k}\varphi(t)$ не возрастает на $(0,\infty)$ и $\varphi(t)\le$ $\le\omega_k(f';t)\le c_0(k)\varphi(t)$ [2].

Следующая лемма вытекает из леммы 3 работы [1] (см. также [3]).

Лемма 1. *Для каждого* $j\in H_*$ *существуют полиномы* $T_j(x)=T_j(x;Y;n)$ *порядка* $c_1 n$, *имеющие свойства*

$$\Pi(x_j^*)T_j(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$|T_j(x)| \le c_2 n\delta_n^4(x;x_j^*), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$|T_j(x)| \ge c_3 n\delta_n^{2(s+2)}(x;x_j^*)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j^*)}\right|, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

$$|T_j(x)| \ge c_4 n\delta_n^{4(s+1)}(x;x_j^*), \quad x\in\mathbb{R}\setminus O, \tag{4}$$

и такие, что для полинома

$$T(x) := h^2\varphi(h)\sum_{j\in H} T_j(x)\operatorname{sgn}\Pi(x_j^*)$$

выполняются оценки

$$\begin{gathered} c_5 h\varphi(h) \le |T(x)|, \quad x\in\mathbb{R}\setminus O, \\ |T(x)| \le c_6 h\varphi(h), \quad x\in\mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5}$$

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2. *Для каждой функции* $f\in C^{(1)}$ *существует полином* $\Theta_n\in\mathbb{T}_n$, *для которого выполняются оценки*

$$\begin{aligned} \|f-\Theta_n\| &\le c_7 h\varphi(h), \\ \|f'-\Theta_n'\| &\le c_8\varphi(h). \end{aligned} \tag{6}$$

Точно так же, как и лемма 4 из [1], доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Функция*

$$R(x) := \Theta_n(x) + \frac{c_7}{c_5} T(x)$$

имеет свойства

$$R \in \mathbb{T}_{c_1 n}, \tag{7}$$

$$\|f-R\| \le c_9 h\varphi(h), \tag{8}$$

$$R(x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus O. \tag{9}$$

***Замечание* 4.** Из неравенств (6), (5) и неравенства Бернштейна следует оценка

$$\|f'-R'\| \le c_{10}\varphi(h). \tag{10}$$

3. Доказательство теоремы 2. Выберем число $N(Y)$ из условия, чтобы для всех $n \ge N(Y)$ расстояние между соседними точками y_i и y_{i+1} было больше, чем $10h$, для всех $i \in \mathbb{Z}$. Без потери общности будем считать, что $O \cap \cap [-\pi, \pi] \subset (-\pi, \pi)$ и $(1-n) \in H$. Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, 2s\}$. Пусть $O_i = = (x_{\bar{i}}, x_{\underline{i}})$. Если $R(y_i) = 0$, то положим $\hat{T}_i(x) := 0$; если же $R(y_i) \ne 0$, то обозначим

$$j^* := \begin{cases} \underline{i}, & \text{если } R(y_i)\operatorname{sgn}\Pi(x_{\underline{i}}) > 0; \\ \bar{i}, & \text{если } R(y_i)\operatorname{sgn}\Pi(x_{\underline{i}}) < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим новый набор $Y^* := (Y \setminus \{y_i\}) \cup \{x_{j^*}\}$ и полином

$$\tilde{T}_i(x) := T_{\underline{i}-2}(x; Y^*; n)\operatorname{sgn}\Pi(x_{\underline{i}}).$$

Тогда в силу (4)

$$\left|T_{\underline{i}-2}(y_i)\right| = \left|\tilde{T}_i(y_i)\right| \ge c_{11} n. \tag{11}$$

Положим

$$\hat{T}_i(x) := \tilde{T}_i(x)\frac{R(y_i)}{T_{\underline{i}-2}(y_i)}\operatorname{sgn}\Pi(x_{\bar{i}}).$$

В силу выбора номера j^* имеем

$$R(y_i) + \hat{T}_i(y_i) = 0. \tag{12}$$

Кроме того, соотношение (1) влечет

$$\hat{T}_i(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in [-\pi, \pi]\setminus O_i. \tag{13}$$

Из (8) получаем $|R(y_i)| = |R(y_i) - f(y_i)| \le c_9 h\varphi(h)$, тогда из (2) и (11) имеем

$$\left\|\hat{T}_i\right\| = \left\|\tilde{T}_i\right\| \frac{|R(y_i)|}{|T_{\underline{i}-2}(y_i)|} \le \frac{c_2 c_9 n h \varphi(h)}{c_{11} n} = c_{12}\, h\, \varphi(h), \tag{14}$$

поэтому вследствие неравенства Бернштейна

$$\left\|\hat{T}_i'\right\| \le c_{13}\, \varphi(h). \tag{15}$$

Теперь положим

$$Q(x) := R(x) + \sum_{\nu=1}^{2s} \hat{T}_\nu(x).$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Функция Q имеет свойства*

$$Q \in \mathbb{T}_{c_1 n}, \tag{16}$$

$$\|f - Q\| \le c_{14}\, h\, \varphi(h), \tag{17}$$

$$\|f' - Q'\| \le c_{15}\, \varphi(h), \tag{18}$$

$$|f(x) - Q(x)| \le c_{15}\, |x - y_i|\, \varphi(h), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$Q(x)\, \Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O, \tag{20}$$

$$Q(y_i) = 0 \quad \textit{при всех} \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Доказательство. (16) следует из (7) и леммы 1. Неравенство (17) является следствием (8) и (14), а неравенство (18) — следствием (10) и (15). Равенство (21) получается из (12) и (13). Докажем (19). Пользуясь (21) и (18), имеем

$$|f(x) - Q(x)| = |f(x) - Q(x) - f(y_i) + Q(y_i)| = \left| \int_{y_i}^{x} (f'(u) - Q'(u))\, du \right| \le$$

$$\le c_{15}\, |x - y_i|\, \varphi(h).$$

Наконец, (20) следует из (9) и (13).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что для $x \in O_i$ справедливы следующие неравенства:

$$\left| \frac{\Pi(x)}{\Pi(x_{\underline{i}}^*)} \right| \ge c_{16}\, n\, |x - y_i|,$$

$$\delta_n(x; x_{\underline{i}}^*) \ge c_{17},$$

из которых, с учетом (3), получаем такую оценку:

$$|T_{\underline{i}}(x)| \ge c_{18}\, n^2\, |x - y_i|. \tag{22}$$

Обозначим

$$G(x) := Q(x) + \frac{c_{15}}{c_{18}} h^2 \varphi(h) \sum_{\nu=1}^{2s} T_{\underline{\nu}}(x) \operatorname{sgn} \Pi(x_{\underline{\nu}})$$

и покажем, что данный полином является искомым. Действительно, оценка

$$\|f - G\| \le c_{19}\, h\, \varphi(h)$$

вытекает из (17) и (2). Осталось доказать, что

$$Q(x)\Pi(x) \geq 0.$$

Для $x \in \mathbb{R}\setminus O$ это неравенство получается из (20) и (1). Пусть теперь $x \in O_i$. Для определенности будем считать, что $\Pi(x) > 0$. Покажем, что $Q(x) \geq 0$. Используя (1), имеем

$$G(x) = Q(x) + \frac{c_{15}}{c_{18}} h^2 \varphi(h) \sum_{\nu=1}^{2s} T_{\underline{\nu}}(x) \operatorname{sgn} \Pi(x_{\underline{\nu}}) + f(x) - f(x) \geq$$

$$\geq Q(x) + \frac{c_{15}}{c_{18}} h^2 \varphi(h) \sum_{\nu=1}^{2s} T_{\underline{\nu}}(x) \operatorname{sgn} \Pi(x_{\underline{\nu}}) - f(x) \geq$$

$$\geq Q(x) + \frac{c_{15}}{c_{18}} h^2 \varphi(h) T_{\underline{i}}(x) \operatorname{sgn} \Pi(x_{\underline{i}}) - f(x).$$

Таким образом, доказательство сводится к установлению неравенства

$$\frac{c_{15}}{c_{18}} h^2 \varphi(h) T_{\underline{i}}(x) \operatorname{sgn} \Pi(x_{\underline{i}}) \geq f(x) - Q(x).$$

Действительно, правая часть этого неравенства, согласно (19), не превышает $c_{15}|x - y_i|\varphi(h)$, а левая часть, согласно (22), не меньше этой же величины.

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность проф. И. А. Шевчуку за постановку задачи и постоянное внимание к ее решению.

1. *Плешаков М. Г., Попов П. А.* Знакосохраняющее приближение периодических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1087 – 1098.
2. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
3. *Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева. Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Саратов, 1998. – 110 с.

Получено 19.11.2002