УДК 517.5

А. С. Федоренко, О. С. Федоренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ m-ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,p}$ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We obtain an exact-order estimate of best trigonometric approximation of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of univariate functions in the space L_{∞}.

Одержано точну за порядком оцінку найкращого тригонометричного наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ функцій однієї змінної в просторі L_{∞}.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних функцій $f(x)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}_x |f(x)|, & q=\infty. \end{cases}$$

Будемо досліджувати поведінку найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ (означення класів див., наприклад, у роботі [1]):

$$e_m\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_q := \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}}\ \inf_{\substack{n_k\\1\le k\le m}}\ \inf_{\substack{a_k\\1\le k\le m}}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{m}a_k e^{in_kx}\right\|_q, \tag{1}$$

де a_k — довільні коефіцієнти.

Зазначимо, що величини (1) при різних співвідношеннях між p та q досліджувались у роботах [2–4], де можна ознайомитись з бібліографією робіт, пов'язаних з даною задачею. Будемо дотримуватись позначень, прийнятих в [2–4].

Підпорядкуємо функції $\psi(\cdot)$, що визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, умовам:

1) $\psi(\cdot)$ — додатні і незростаючі;
2) існує абсолютна стала C така, що

$$\frac{\psi(k)}{\psi(2k)} \le C \quad \forall\, k\in N.$$

Множину функцій ψ, що задовольняють зазначені вище умови, позначимо через B.

Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $2\le p<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in R$, *і, крім того, існує* $\varepsilon>0$ *таке, що послідовність* $\psi(k)k^{1+\varepsilon}$ *не зростає. Тоді має місце співвідношення*

$$e_m\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_\infty \asymp \psi(m).$$

Доведення. Зауважимо, що оцінку зверху достатньо встановити для $p=2$, оскільки завдяки вкладенню $L^{\psi}_{\beta,p}\subseteq L^{\psi}_{\beta,2}$, $p\ge 2$, завжди виконується нерівність

$$e_m\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_\infty << e_m\left(L^{\psi}_{\beta,2}\right)_\infty.$$

Нехай $f\in L^{\psi}_{\beta,2}$ і

$$S[f] = \sum_{k\in Z}c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx, \tag{2}$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі,

$$\rho(s) = \{k : k \in Z, 2^{s-1} \le |k| < 2^s\},$$

$$\delta_s(f; x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{ikx}, \quad s \in N.$$

Тоді ряд Фур'є (2) можемо записати у вигляді

$$S[f] = \sum_{s \in N} \delta_s(f; x).$$

Далі нам знадобиться одне допоміжне твердження (див. [5, с. 44]).

Нехай T_N — тригонометричний поліном степеня не вище за N, тобто

$$T_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

Теорема А. *Для кожного* $2 \le p < \infty$ *і* $1 \le M \le 2N$ *існує тригонометричний поліном* $T(\Theta_M; x)$ *з номерами гармонік не більше за* M *такий, що*

$$\| T_N(x) - T(\Theta_M; x) \|_\infty \le C_1 \left(\frac{N}{M} \log \left(1 + \frac{N}{M} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \| T_N \|_p,$$

причому $\Theta_M \subset [-2N; 2N]$.

За заданим m виберемо $l \in N$ таким чином, щоб $2^l < m \le 2^{l+1}$. Будемо наближати функцію $f(x) \in L^{\psi}_{\beta, 2}$ поліномом вигляду

$$P\left(\Theta_{2^l}; x\right) = \sum_{s=1}^{l-1} \delta_s(f; x) + \sum_{l \le j < \gamma l} P\left(\Theta_{k_j}; x\right), \tag{3}$$

де $\gamma > 1$ (буде вибрано нижче), а поліноми $P\left(\Theta_{k_j}; x\right)$ побудовані згідно з теоремою A (при $p = 2$), тобто таким чином, щоб для $j \in [l; \gamma l)$ виконувалась нерівність

$$\left\| \delta_j(f; x) - P\left(\Theta_{k_j}; x\right) \right\|_\infty << \left(\frac{2^j}{k_j} \log \left(\frac{2^j}{k_j} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \delta_j(f; x) \right\|_2.$$

Покладемо

$$k_j = \left[\left(\frac{2^j \psi(2^j)}{2^l \psi(2^l)} \right)^{\frac{1}{2}} 2^l \right] + 1, \quad j = l, \dots, \gamma l.$$

Покажемо, що кількість гармонік, які містяться в $P\left(\Theta_{k_j}; x\right)$, не перевищує за порядком 2^l, тобто для чисел k_j виконується порядкова нерівність $\sum_{l \le j < \gamma l} k_j << 2^l$. Оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k) k^{1+\varepsilon}$ не зростає, то

$$\sum_{l \le j < \gamma l} k_j \le \left(2^l \psi(2^l) \right)^{-\frac{1}{2}} 2^l \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\psi(2^j) 2^{j(1+\varepsilon)} 2^{-j\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} + \gamma l <<$$

$$<< \left(2^l \psi(2^l) \right)^{-\frac{1}{2}} 2^l \left(\psi(2^l) 2^{l(1+\varepsilon)} 2^{-l\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} + \gamma l << 2^l.$$

Далі, нехай $f(x)$ — деяка функція з класу $L^{\psi}_{\beta, 2}$. Оцінимо зверху величину $\left\| f(x) - P(\Theta_{2^l}; x) \right\|$. Враховуючи (3), одержуємо

$$\left\| f(x) - P(\Theta_{2^l}; x) \right\|_\infty \le \left\| \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\delta_j(f; x) - P(\Theta_{k_j}; x) \right) \right\|_\infty + \left\| \sum_{\gamma l \le j < \infty} \delta_j(f; x) \right\|_\infty := \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{4}$$

Оцінимо спочатку Σ_2. Використовуючи послідовно нерівність Мінковського, „нерівність різних метрик" Нікольського (див. [6, с. 133]) та той факт, що [7, с. 94]

$$\| \delta_s(f; x) \|_2 \ll \psi(2^s) \left\| \delta_s(f_\beta^\psi; x) \right\|_2, \quad f \in L_{\beta,2}^\psi, \quad \psi \in B, \tag{5}$$

маємо

$$\Sigma_2 = \left\| \sum_{\gamma l \le j < \infty} \delta_j(f; x) \right\|_\infty \ll \sum_{\gamma l \le j < \infty} \left\| \delta_j(f; x) \right\|_\infty \ll \sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{\frac{j}{2}} \left\| \delta_j(f; x) \right\|_2 \ll$$

$$\ll \sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j) \left\| \delta_s(f_\beta^\psi; x) \right\|_2 \ll \sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j). \tag{6}$$

Оскільки існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k) k^{1+\varepsilon}$ не зростає, то

$$\sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j) \ll \sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j}{2}} 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^j) \ll$$

$$\ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l} \sum_{\gamma l \le j < \infty} 2^{-\frac{j}{2}} \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\frac{\gamma l}{2}}. \tag{7}$$

Оцінимо тепер Σ_1. Використовуючи послідовно нерівність Мінковського, теорему A при $p = 2$ та співвідношення (5), отримуємо

$$\Sigma_1 \ll \sum_{l \le j < \gamma l} \left\| \delta_j(f; x) - P(\Theta_{k_j}; x) \right\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j} \log \left(\frac{2^j}{2k_j} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \delta_j(f; x) \right\|_2 \ll \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\frac{2^j}{2k_j} \log \left(\frac{2^j}{k_j} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \psi(2^j). \tag{8}$$

Далі, враховуючи той факт, що $\log x \le x \ \ \forall\, x > 0$, і використовуючи нерівність $(a + b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha$, $a, b > 0$, $0 < \alpha \le 1$, маємо

$$\sum_{l \le j < \gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j} \left(\frac{2^j}{k_j} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \psi(2^j) = \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\frac{2^{2j}}{2k_j^2} + \frac{2^j}{k_j} \right)^{\frac{1}{2}} \psi(2^j) \le$$

$$\le \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\frac{2^j}{2^{1/2} k_j} + \frac{2^{j/2}}{k_j^{1/2}} \right) \psi(2^j) \ll \sum_{l \le j < \gamma l} \frac{\psi(2^j) 2^j}{k_j} + \sum_{l \le j < \gamma l} \frac{\psi(2^j) 2^{j/2}}{k_j^{1/2}} :=$$

$$:= \Sigma_1^* + \Sigma_1^{**}. \tag{9}$$

Оцінимо Σ_1^*. Враховуючи значення k_j, одержуємо

$$\Sigma_1^* = \left(2^l \psi(2^l) \right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l} \sum_{l \le j < \gamma l} \frac{2^j \psi(2^j)}{\left(2^j \psi(2^j) \right)^{1/2}} = \left(2^l \psi(2^l) \right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l} \sum_{l \le j < \gamma l} \left(2^j \psi(2^j) \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-l} \left(2^l \psi(2^l) \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^l \psi(2^l) \right)^{\frac{1}{2}} = \psi(2^l). \tag{10}$$

Для Σ_1^{**} маємо

$$\Sigma_1^{**} = \left(2^l\psi(2^l)\right)^{\frac{1}{4}}2^{-\frac{l}{2}}\sum_{l\le j<\gamma l}\frac{2^{j/2}\psi(2^j)}{\left(2^j\psi(2^j)\right)^{1/4}} =$$

$$= \left(2^l\psi(2^l)\right)^{\frac{1}{4}}2^{-\frac{l}{2}}\sum_{l\le j<\gamma l}\psi^{\frac{3}{4}}(2^j)2^{j\frac{1}{4}}2^{j\frac{2}{4}}2^{-j\frac{2}{4}} \ll 2^{-\frac{l}{2}}\left(2^l\psi(2^l)\right)^{\frac{1}{4}}\psi^{\frac{3}{4}}(2^l)2^{l\frac{1}{4}} =$$

$$= \psi(2^l). \tag{11}$$

Об'єднуючи (4), (6)–(11), отримуємо

$$\left\|f(x)-P\left(\Theta_{2^l};x\right)\right\|_\infty \ll \psi(2^l) + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l\frac{1}{2}} =$$

$$= \psi(2^l) + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1+\varepsilon)}2^{-\gamma l(1+\varepsilon)}2^{\gamma l\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \psi(2^l) + \psi(2^l)2^{l(1+\varepsilon)}2^{-\gamma l(1+\varepsilon)}2^{\gamma l\frac{1}{2}} = \psi(2^l)\left[1+2^{l(1+\varepsilon)}2^{-\gamma l(1+\varepsilon)}2^{\gamma l\frac{1}{2}}\right].$$

Покладаючи $\gamma > 1 + \dfrac{1}{1+2\varepsilon}$ і враховуючи, що $2^l < m \le 2^{l+1}$ і $\psi \in B$, із останньої оцінки одержуємо оцінку зверху.

Оцінку знизу встановлено в роботі [8].

Теорему доведено.

Зауваження. При $\psi(k) = k^{-r}$, $k \in N$, $r > 0$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ збігаються з відомими класами $W^r_{\beta,p}$. Точні порядкові оцінки величин $e_m\left(W^r_{\beta,p}\right)_\infty$ при $2 \le$ $\le p \le \infty$ і $r > \dfrac{1}{p}$ одержано в роботі [5].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
2. *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 356–364.
3. *Федоренко А. С.* Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1719–1721.
4. *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной // Там же. – 2000. – **52**, № 6. – С. 850–856.
5. *Belinskii E. S.* Decomposition theorems and approximation by a "floating" system of exponentials // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **350**, № 1. – P. 43–53.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
7. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечники по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследование по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92–105.
8. *Федоренко А. С.* О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 3. – С. 250–258.

Одержано 05.11.2002