УДК 517.5

А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НАСИЧЕННЯ ЛІНІЙНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є У ПРОСТОРАХ S_φ^p

We consider the problems of saturation of linear methods of the summation of Fourier series in spaces S_φ^p, $p > 0$. We show that the saturation of a linear method and an order of saturation are independent of the parameters X, φ, and p determining the space $S_\varphi^p(X)$.

Розглядається питання насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S_φ^p, $p > 0$. Показано, що насиченість лінійного методу, а також порядок насичення не залежать від вибору параметрів X, φ і p, що визначають простір $S_\varphi^p(X)$.

Вступ. Дана робота є продовженням досліджень, проведених в [1], що стосуються насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S_φ^p. Простори S_φ^p були введені О. І. Степанцем у роботі [2] (див. також [3]) і означаються таким чином.

Нехай X — довільний лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ — фіксована зчисленна система в ньому і для будь-якої пари $x, y \in X$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, визначено скалярний добуток, що задовольняє умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Кожному елементу $f \in X$ ставлять у відповідність систему чисел $\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають множини

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(X) = \left\{ f \in X \colon \sum_{k=0}^\infty \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1}$$

Елементи $x, y \in S_\varphi^p$ вважаються тотожними, якщо при всіх $k \in \mathbb{N}_0$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Таким чином, множини S_φ^p породжуються простором X, системою φ і числом p.

У роботах [2, 3] зазначено, що коли систему $\varphi' = \{\varphi'_k\}_{k=0}^\infty$ одержано із системи $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ шляхом будь-якої перестановки членів останньої, то простори S_φ^p і $S_{\varphi'}^p$, $p > 0$, збігаються і $\|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p}$ $\forall f \in S_\varphi^p$, де

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \left(\sum_{k=0}^\infty \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

У зв'язку з цим природно виникає питання: чи буде насиченість лінійного методу $U_n(\Lambda)$ у просторах $S^p_\varphi(X)$ інваріантною відносно нумерації елементів системи φ? У цій роботі дано ствердну відповідь на поставлене питання. Крім того показано, що насиченість і порядок насичення лінійного методу $U_n(\Lambda)$ у просторах $S^p_\varphi(X)$ повністю визначаються елементами матриці Λ і не залежать не тільки від нумерації елементів системи φ, а й від усіх параметрів X, φ і p, що визначають простір $S^p_\varphi(X)$.

1. Лінійні методи підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ. Нехай f — довільний елемент простору S^p_φ, $p \in (0, \infty)$, і

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{3}$$

— його ряд Фур'е за системою φ.

Нехай також $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, — нескінченна трикутна матриця чисел. Кожному елементу $f \in S^p_\varphi$ на основі його розкладу (3) в ряд Фур'е за системою φ поставимо у відповідність поліном $U_n(f; \Lambda)$ вигляду

$$U_n(f; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k. \tag{4}$$

Таким чином, довільна трикутна числова матриця Λ визначає конкретну послідовність поліноміальних операторів $U_n(f; \Lambda)$, заданих на S^p_φ. У цьому випадку також говорять, що матриця Λ визначає конкретний лінійний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є.

При вивченні лінійних методів у просторі S^p_φ природно виникає питання: які умови повинні задовольняти числа $\lambda_k^{(n)}$, щоб послідовність поліномів $U_n(f; \Lambda)$ вигляду (4) збігалася за нормою до $f \in S^p_\varphi(X)$ для довільного лінійного комплексного простору X, будь-якої ортонормованої системи $\varphi \subset X$ і кожного $p \in (0, \infty)$? Вичерпна відповідь на поставлене питання випливає із загальних положень функціонального аналізу і її формулювання наведено в [1]:

для того щоб послідовність поліномів $U_n(f, \Lambda)$ збігалася до будь-якого елемента $f \in S^p_\varphi(X)$ для довільного лінійного комплексного простору X, довільної ортонормованої системи φ і будь-якого $p \in (0, \infty)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого фіксованого k, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \tag{5}$$

і, крім того, щоб послідовність чисел

$$L_n(\Lambda) = \sup_{\|f\|_p \le 1} \left\| U_n(f; \Lambda) \right\|_p = \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \left| \lambda_k^{(n)} \right|$$

була обмеженою:

$$L_n(\Lambda) = O(1), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Величини $L_n(\Lambda)$ згідно з прийнятою термінологією (див., наприклад, [4, с. 49]) є *константами Лебега* даного методу $U_n(\Lambda)$.

Означення насичення лінійного методу $U_n(\Lambda)$ у просторі S^p_φ дано в роботі [1]. У цьому означенні важливим є поняття інваріантного елемента, яке визначається таким чином.

Для даної матриці Λ розглянемо множину B_Λ чисел $k \in \mathbb{N}_0$, для яких існує функція $n_\Lambda = n_\Lambda(k)$ така, що $\lambda_k^{(n)} = 1$ для всіх $n > n_\Lambda(k)$, тобто

$$B_\Lambda = \{ k \in \mathbb{N}_0 : \exists n_\Lambda = n_\Lambda(k) : \lambda_k^{(n)} = 1, \ n > n_\Lambda(k) \}.$$

Елемент f простору S^p_φ називається *інваріантним елементом методу* $U_n(\Lambda)$, якщо його коефіцієнти Фур'є $\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$ дорівнюють нулеві принаймні для всіх $k \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$.

Множину всіх інваріантних елементів методу $U_n(\Lambda)$ у просторі S^p_φ позначимо через $F_\Lambda(S^p_\varphi)$. Легко бачити, що будь-який лінійний метод $U_n(\Lambda)$ має в просторі S^p_φ хоча б один інваріантний елемент. Таким є, зокрема, нульовий елемент простору S^p_φ.

***Зауваження* 1.** Як було зазначено в [1], у випадку, коли при деяких параметрах X, p, φ множина $F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$ збігається з усім простором $S^p_\varphi(X)$, виконується рівність $B_\Lambda = \mathbb{N}_0$, і навпаки, якщо $B_\Lambda = \mathbb{N}_0$, то $F_\Lambda(S^p_\varphi(X)) = S^p_\varphi(X)$ для будь-яких X, p та φ.

Означення 1. *Лінійний метод $U_n(\Lambda)$ називається насиченим у просторі $S^p_\varphi(X)$, $p \in (0, \infty)$, якщо існує додатна монотонно спадна до нуля при $n \to \infty$ функція $\nu_\Lambda(n)$, для якої виконуються такі умови:*

1) *із співвідношення*

$$\|f - U_n(f; \Lambda)\|_p = o(\nu_\Lambda(n)), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

випливає, що $f \in F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$;

2) *існує принаймні один елемент $f \in S^p_\varphi(X) \setminus F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$, для якого при всіх $n \in \mathbb{N}_0$ виконується нерівність*

$$\|f - U_n(f; \Lambda)\|_p \le K \nu_\Lambda(n), \tag{8}$$

де K — деяка стала. Функція ν_Λ називається порядком насичення, а множина $\Phi(\Lambda)_p$ всіх елементів простору $S^p_\varphi(X)$, для яких виконується (8), — *класом насичення методу $U_n(\Lambda)$.*

Означення 2. *Якщо для даного методу не існує додатної монотонно спадної до нуля при $n \to \infty$ функції ν_Λ, що задовольняє умови означення* 1, *то говорять, що цей метод не є насиченим у просторі S^p_φ.*

Зауважимо, що означення насичення лінійного методу вводилось з використанням поняття інваріантного елемента і раніше (див., наприклад, [5]). Вивчення різних питань, пов'язаних із насиченням лінійних методів, проводилось, зокрема, в роботах [5 – 10].

Тепер ми можемо сформулювати основний результат даної роботи.

Теорема 1. *Якщо лінійний метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^p_\varphi(X)$ при даних фіксованих параметрах X, p, φ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$, то* *даний метод є насиченим і в просторах* $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ *для будь-яких інших параметрів* X', p', φ' *з тим самим порядком насичення* $\nu_\Lambda(n)$.

Таким чином, теорема 1 вказує на інваріантність поняття насичення лінійного методу відносно просторів $S^p_\varphi(X)$.

Доведення. Нехай лінійний метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^p_\varphi(X)$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$ і для деякого $f \in S^{p'}_{\varphi'}(X')$ виконується співвідношення

$$\|f - U_n(f;\Lambda)\|_{p'} = o(\nu_\Lambda(n)), \quad n \to \infty. \tag{7'}$$

Покажемо, що тоді $f \in F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(X'))$, тобто $\hat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$ для будь-якого $k_0 \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$.

За означенням співвідношення $(7')$ виконується тоді і лише тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_1 \in \mathbb{N}_0$ такий, що для всіх $n > n_1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|1-\lambda_k^{(n)}|^{p'}}{\nu_\Lambda(n)^{p'}} \left|\hat{f}_{\varphi'}(k)\right|^{p'} + \sum_{k \ge n} \frac{|\hat{f}_{\varphi'}(k)|^{p'}}{\nu_\Lambda(n)^{p'}} < \varepsilon. \tag{7''}$$

Зафіксуємо довільне $k_0 \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$. При достатньо великих n перша сума в лівій частині останньої нерівності містить доданок $\dfrac{|1-\lambda_{k_0}^{(n)}|^p}{\nu_\Lambda(n)^p} |\hat{f}_{\varphi'}(k_0)|^p$. Покажемо, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ існує номер $n_0 > n$, для якого коефіцієнт

$$\frac{\left|1-\lambda_{k_0}^{(n_0)}\right|^p}{\nu_\Lambda(n_0)^p} > 0. \tag{9}$$

Для цього розглянемо елемент φ_{k_0}. Зрозуміло, що φ_{k_0} не є інваріантним елементом методу $U_n(\Lambda)$ у просторі $S^p_\varphi(X)$, тобто $\varphi_{k_0} \in S^p_\varphi \setminus F_\Lambda$, і оскільки метод є насиченим в $S^p_\varphi(X)$, то

$$\left\|\varphi_{k_0} - U_n(\varphi_{k_0};\Lambda_0)\right\|_p \ne o(\nu_\Lambda(n)), \quad n \to \infty.$$

Тобто існує стала $C_{k_0} > 0$ така, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ існує номер $n_0 = n_0(k_0, n) > n$, для якого справджується співвідношення

$$\frac{\left\|f_0 - U_{n_0}(f_0;\Lambda_0)\right\|_p}{\nu_\Lambda(n_0)} = \frac{\left|1-\lambda_{k_0}^{(n_0)}\right|}{\nu_\Lambda(n_0)} \ge C_{k_0} > 0.$$

Внаслідок довільності ε і (9) виконання нерівності $(7'')$ можливе лише у випадку, коли $\hat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$. Таким чином, ми показали, що для будь-якого $k_0 \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$ коефіцієнт $\hat{f}_\varphi(k_0) = 0$. Тобто $f \in F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(X'))$, і умова 1 означення 1 для простору $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ виконується.

Покажемо тепер, що умова 2 означення 1 у просторі $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ також виконується. Оскільки метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^p_\varphi(X)$, то існує $f \in S^p_\varphi(X) \setminus$

$\setminus F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$, для якого виконується нерівність (8), причому $\hat{f}_\varphi(k_1) \neq 0$ хоча б для одного $k_1 \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$. Покладемо $f_1 = \hat{f}_\varphi(k_1)\varphi'_{k_1}$. Тоді $f_1 \in S^{p'}_{\varphi'}(X') \setminus F_\Lambda(S^{p'}_{\varphi'}(X'))$, і справджується співвідношення

$$\|f_1 - U_n(f_1;\Lambda)\|_{p'} \leq \|f - U_n(f;\Lambda)\|_p \leq K\nu_\Lambda(n).$$

Тобто умова 2 для простору $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ також виконується, і лінійний метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$.

Теорему доведено.

Тепер з урахуванням доведеної теореми і зауваження 1 можна переформулювати достатні умови насичення лінійного методу, вказані в [1].

Нехай $\psi = \{\psi(k)\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — послідовність комплексних чисел $\psi(k) \neq 0$. Позначимо через $L^\psi S^p_\varphi$ множину всіх елементів $f \in S^p_\varphi$, для яких виконується умова $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{|\psi(k)|^p} |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty$.

Теорема 2. *Якщо для елементів матриці* Λ *множина* B_Λ *не збігається з усією множиною* $\mathbb{N}_0$ *і існує додатна монотонно спадна до нуля при* $n \to \infty$ *функція* $\nu_\Lambda(n)$ *така, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{\nu_\Lambda(n)} = \frac{c}{\psi_0(k)}, \quad \psi_0(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda, \quad |c| > 0, \tag{10}$$

то:

1) *метод* $U_n(\Lambda)$ *є насиченим в усіх просторах* $S^p_\varphi(X)$, *незалежно від вибору параметрів* X, p, φ, *з порядком насичення* $\nu_\Lambda(n)$;

2) *має місце вкладення*

$$\Phi(\Lambda)_p \subset L^\psi S^p_\varphi, \tag{11}$$

де послідовність $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$ *така, що при* $k \in \mathbb{N}_0 \setminus B_\Lambda$ $\psi(k) = \psi_0(k)$, *і* $|\psi(k)| \geq K_0 > 0$, *де* K_0 — *деяка додатна стала, коли* $k \in B_\Lambda$.

Якщо ж при цьому множина B_Λ — *скінченна, то справджується рівність*

$$\Phi(\Lambda)_p = L^\psi S^p_\varphi. \tag{12}$$

Питання, пов'язані з насиченням конкретних методів у просторах S^p_φ, розглянуто в роботі [1]. Там, зокрема, показано, що в просторах S^p_φ метод Фур'є ($\lambda_k^{(n)} = 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$) не є насиченим, а методи Зигмунда ($\lambda_k^{(n)} = 1 - (k/n)^s$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $s > 0$) і Рогозинського ($\lambda_k^{(n)} = \cos(k\pi/2n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$) є насиченими з порядками насичення $\nu_\Lambda(n) = n^{-s}$ і $\nu_\Lambda(n) = n^{-2}$ відповідно. Щодо методу Валле Пуссена, в якому

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, n-q; \\ 1 - \dfrac{k-n+q}{q+1}, & k = n-q+1, \ldots, n; \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

де $q = q(n)$ — деякий параметр, $q \in \mathbb{N}_0$, $0 \le q(n) \le n$, що може залежати від n, то в [1] показано, що коли існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = \theta$, $\theta \in [0, 1)$, то даний метод не є насиченим в S_φ^p. Такий самий висновок можна зробити і у випадку, коли $\theta = 1$, але $n - q(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) = = c_n < c \ne 0$, то метод Валле Пуссена є насиченим у просторі S_φ^p з порядком насичення $\nu_\Lambda(n) = n^{-1}$.

Автор вдячний О. І. Степанцю за поставлену задачу і корисні обговорення одержаних результатів.

1. *Шидліч А. Л.* Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S_φ^p // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – Т. 35. – С. 215–232.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Butzer P., Nessel R.* Fourier analysis and approximation. Vol. 1. One-dimensional theory. – Basel; Stuttgart: Birkhäuser, 1971. – 553 p.
6. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle // An. Harmon. Colloq. int. CNRS. – 1949. – **15**. – P. 97–100.
7. *Alexets G.* Sur l'otdre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa serie de Fourier // Mat. es fis. lapok. – 1941. – **48**. – P. 410–433.
8. *Zygmund A.* The approximation functions of functions by Fejer means // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – **51**, № 4. – P. 274–278.
9. *Zamansky M.* Classes de saturation de certain procedes d'approximation des series Fourier des fonctions continuos et applications a quelques problems d'approximation // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1949. – **66**, № 1. – P. 19–93.
10. *Гаврилюк В. Т., Степанец А. И.* Вопросы насыщения линейных методов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 291–308.

Одержано 06.09.2002