УДК 517.9

Е. В. Тарасова (Европ. ун-т финансов, информ. систем, менеджмента и бизнеса, Житомир)

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

We prove the solvability of scattering problem for a wave equation with absorption. We investigate the structure of a scattering operator.

Доведено розв'язність задачі розсіяння для хвильового рівняння з поглинанням та вивчено структуру оператора розсіяння.

Задача рассеяния для волновых уравнений достаточно хорошо изучена в работах [1–4]. В настоящей работе, результаты которой анонсированы в [5], изучается задача рассеяния для волнового уравнения с поглощением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

где $x, t \in R$, $u(x,t)$ — искомое решение, коэффициент $g(x,t)$ описывает поглощающие свойства среды. В характеристических переменных уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (Au)(x,y) = 0, \tag{2}$$

где

$$(Au)(x,y) = g(x,y)\big(u'_x(x,y) + u'_y(x,y)\big). \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что функция $g(x,y)$ является комплекснозначной измеримой функцией по переменным x, y, удовлетворяющей условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_x |g(x,y)| dy < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_y |g(x,y)| dx < \infty. \tag{4}$$

Из условий (4) следует, что $g(x,y) \in L_2(E^2)$. Пусть $C^1(E^n)$, $n = 1, 2,$ — пространства непрерывных в E^n функций, имеющих в E^n непрерывные производные первого порядка, для которых конечна норма

$$\|f(\xi)\|_{C^1} = \|f\|_C + \|f'_{\xi_1}\|_C + \|f'_{\xi_2}\|_C.$$

Определение 1. *Допустимым решением уравнения* (2) *будем называть функцию* $u(x,y) \in C^1(E^2)$, *которая удовлетворяет уравнению* (2) *в смысле теории обобщенных функций.*

Если в уравнении (2) $g \equiv 0$, то допустимое решение этого невозмущенного уравнения имеет вид

$$u_0(x,y) = f(x) + \varphi(y), \tag{5}$$

где $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ — произвольные функции из пространства $C^1(-\infty, +\infty)$. Если же коэффициент поглощения $g(x,y)$ удовлетворяет условию (4), то справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для произвольного допустимого решения* $u(x,t)$ *уравнения* (2), *коэффициент поглощения* $g(x,y)$ *которого удовлетворяет условию* (4), *существуют и единственны решения* $u_0^{\mp}(x,y)$ *невозмущенного уравнения вида* (5) *такие, что равномерно по* $x - y$ *имеют место асимптотики*

$$u(x, y) = u_0^{\mp}(x, y) + o(1), \qquad x + y \to \mp\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — допустимое решение уравнения (2). Рассмотрим функцию

$$u_0^-(x, y) = u(x, y) + \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} (Au)(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{7}$$

Эта функция принадлежит пространству $C^1(E^2)$ и удовлетворяет невозмущенному уравнению (2)

$$\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (Au)(x, y) = 0$$

в смысле теории обобщенных функций. Используя оценку (4), из (7) имеем

$$\left| u - u_0^- \right| = \left| \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} (Au)(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi \right| \le$$

$$\le \|u\|_C \int_{-\infty}^{x+y} \left(\sup_{\xi} |g(\xi, s + y)| + \sup_{\eta} |g(s + y, \eta)| \right) ds.$$

Отсюда при $x + y \to -\infty$ получим асимптотику (6). Аналогично доказывается асимптотика при $x + y \to +\infty$. Единственность асимптотик $u_0^{\mp}$ следует из единственности пределов.

Асимптотики $u_0^{\mp}(x, y)$ имеют смысл падающих и отраженных волн. Поэтому естественна следующая постановка задачи рассеяния для уравнения (2).

Пусть задано волновое уравнение (2) и функция $u_0^-(x, y)$ вида (5), определяющая падающую волну. Необходимо найти допустимое решение $u(x, y)$ уравнения (2) вида

$$u(x, y) = u_0^-(x, y) + w(x, y), \tag{8}$$

где рассеянная волна $w(x, y)$ равномерно по $x - y$ удовлетворяет граничному условию

$$w(x, y) \to 0, \qquad x + y \to -\infty.$$

Доказательству разрешимости этой задачи предпошлем следующие вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Разрешимость задачи рассеяния для уравнения* (2) *эквивалентна разрешимости в пространстве* $C^1(E^2)$ *интегрального уравнения вида*

$$u(x, y) = u_0^-(x, y) - \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} (Au)(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи рассеяния для уравнения (2). Тогда функция $w(x, y) = u(x, y) - u_0^-(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -(Au)(x, y)$$

и граничному условию $w(x, y) \to 0$ при $x + y \to -\infty$ равномерно по $x - y$. Поэтому $w(x, y)$ имеет вид

$$w(x, y) = -\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(Au)(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Отсюда получаем интегральное уравнение (9). Наоборот, решение интегрального уравнения (9) является допустимым решением уравнения (2) и имеет вид (8).

Интегральное уравнение (9) будем называть интегральным уравнением задачи рассеяния.

Определим функцию $u_0^+(x, y)$ равенством

$$u_0^+(x, y) = u_0^-(x, y) + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y}^{\infty}(Au)(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi - \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}(Au)(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{10}$$

тогда интегральное уравнение задачи рассеяния (9) можно записать в виде

$$u(x, y) = u_0^+(x, y) - \int_{x}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty}(Au)(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi. \tag{11}$$

Лемма 3. *Разрешимость уравнения задачи рассеяния* (9) *в пространстве* $C^1(E^2)$ *при любом* $u_0^-(x, y) \in C^1(E^2)$ *эквивалентна разрешимости в пространстве* $C(E^2)$ *интегрального уравнения*

$$\nu(x, y) = k(x, y) + (K\nu)(x, y), \tag{12}$$

где

$$k(x, y) = (u_0^-)'_x + (u_0^-)'_y,$$
$$(K\nu)(x, y) = -\int_{-\infty}^{y} g(x, \eta)\nu(x, \eta)\,d\eta - \int_{-\infty}^{x} g(\xi, y)\nu(\xi, y)\,d\xi. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть в пространстве $C^1(E^2)$ существует решение уравнения (9) при некотором $u_0^-(x, y) \in C^1(E^2)$. Продифференцировав это уравнение по x и y, будем иметь

$$u'_x = (u_0^-)'_x - \int_{-\infty}^{y}(Au)(x, \eta)\,d\eta, \qquad u'_y = (u_0^-)'_y - \int_{-\infty}^{x}(Au)(\xi, y)\,d\xi.$$

Отсюда, сложив эти равенства, для функции

$$\nu(x, y) = u'_x + u'_y \tag{14}$$

получим интегральное уравнение (12) со свободным членом $k(x, y)$ и интегральным оператором K вида (13). Наоборот, пусть в пространстве $C(E^2)$ существует решение уравнения (12). Рассмотрим функцию

$$u(x, y) = u_0^-(x, y) - \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} g(\xi, \eta)\nu(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi. \tag{15}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (9). Действительно, продифференцировав (15) по x и y, получим $u'_x + u'_y = k + K\nu$. Отсюда $u'_x + u'_y = \nu$, и в (15) под интегралом вместо ν можно писать $u'_x + u'_y$, т. е. получим интегральное уравнение (9). Из единственности решения уравнения (12) следует единственность решения уравнения (9).

Лемма 4. *Если коэффициент поглощения* $g(x, y)$ *удовлетворяет условию* (4), *то для произвольного* $k(x, y) \in C(E^2)$ *в пространстве* $C(E^2)$ *существует и единственно решение интегрального уравнения* (12).

Доказательство. Покажем, что для уравнения (12) сходится метод последовательных приближений. Для этого рассмотрим множество полунорм $\|\nu\|_T$ относительно параметра $T = (T_1, T_2)$, $T_i \in (-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2$:

$$\|\nu(x, y)\|_T = \max_{\substack{x \le T_1 \\ y \le T_2}} |\nu(x, y)|.$$

Относительно этой системы полунорм для оператора K, определенного в (13), получим оценку

$$\|K\nu\|_T \le \int_{-\infty}^{T_1} \alpha(T_1)\|\nu\|_T \, dT_1 + \int_{-\infty}^{T_2} \alpha(T_2)\|\nu\|_T \, dT_2, \tag{16}$$

где

$$\alpha(\xi) = \max_{i=1,2} \alpha_i(\xi),$$

$$\alpha_1(\xi) = \sup_y |g(\xi, y)|, \qquad \alpha_2(\xi) = \sup_x |g(x, \xi)|.$$

Из оценок (4) следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\xi) \, d\xi = \alpha < \infty. \tag{17}$$

Оценка (16) обеспечивает сходимость метода последовательных приближений для уравнения (12). Действительно, пусть, A_i, $i = 1, 2$, — интегральные операторы вида

$$(A_i f)(T) = \int_{-\infty}^{T_i} \alpha(T_i) f(T) dT_i, \qquad i = 1, 2,$$

с ядром $\alpha(\xi)$, удовлетворяющим условию (17), которые переводят ограниченные неотрицательные функции двух переменных $(T_1, T_2) = T$ в ограниченные неотрицательные. Для этих операторов при любых $f \in C(E^2)$ выполняется неравенство

$$\|A_i^k f\|_T \le \alpha^k (k!)^{-1} \|f\|_T, \qquad k \in N. \tag{18}$$

С учетом предыдущего неравенство (16) можно записать в виде

$$\| K\nu \|_T \le A_1 \| \nu \|_{(T)} + A_2 \| \nu \|_{(T)}. \tag{19}$$

Тогда из оценок (18), (19) получим

$$\| K^n \nu \|_T \le (A_1 + A_2)^n \| \nu \|_T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_1^k A_2^{n-k} \|\nu\|_T \le$$

$$\le \alpha^n (n!)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \|\nu\|_T \le \alpha^n (n!)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^2 \|\nu\|_T = (2\alpha)^n (n!)^{-1} \|\nu\|_T.$$

Таким образом,

$$\| K^n \nu \|_T \leq (2\alpha)^n (n!)^{-1} \| \nu \|_T, \quad n \in N,$$

и оператор $(I - K)^{-1} = I + K + \ldots + K^n + \ldots$ существует, ограничен в пространстве $C(E^2)$ и

$$\| (I - K)^{-1} \|_C < \exp\{2\alpha\}.$$

Из последней оценки вытекает, что для произвольного $k(x, y) \in C(E^2)$ существует и единственно решение интегрального уравнения (12) в пространстве $C(E^2)$, для которого справедлива оценка $\| \nu \|_C \leq \exp\{2\alpha\} \| k \|_C$.

Следствием предыдущих лемм является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в волновом уравнении* (2) *коэффициент поглощения* $g(x, y)$ *удовлетворяет условию* (4), *тогда существует и единственно решение* $u(x, y)$ *задачи рассеяния* (2), (8).

Доказательство. В силу леммы (2) задача рассеяния (2), (8) эквивалентна разрешимости в пространстве $C^1(E^2)$ интегрального уравнения задачи рассеяния (9). Из лемм 3, 4 следует существование, а из леммы 1 — единственность в пространстве $C^1(E^2)$ решения этого уравнения.

Замечание. Задачу рассеяния для волнового уравнения (2) можно рассматривать с заданной рассеянной волной $u_0^+(x, y)$. Тогда, рассматривая вместо интегрального уравнения (9) интегральное уравнение (11) и повторяя предыдущие доказательства, получаем те же результаты.

Поскольку падающая $u_0^-(x, y) = f_1^-(x) + \varphi^-(y)$ и отраженная $u_0^+(x, y) = f^+(x) + \varphi^+(y)$ волны задаются двумя функциями от одной переменной, каждая из которых определяется суммой неоднозначно (с точностью до константы), с каждой волной $u_0^{\mp}(x, y)$ будем связывать вектор-функции

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \operatorname{col}\left((\varphi^-)'_\xi, (f^-)'_\xi\right) = \operatorname{col}(a_1(\xi), a_2(\xi)), \\ b(\xi) &= \operatorname{col}\left((\varphi^+)'_\xi, (f^+)'_\xi\right) = \operatorname{col}(b_1(\xi), b_2(\xi)), \end{aligned} \tag{20}$$

которые однозначно определяются по $u_0^{\mp}(x, y)$. Вектор-функции $a(\xi)$, $b(\xi)$ будем называть профилями падающей и отраженной волн.

В силу теоремы 1 и леммы 1 каждой вектор-функции $a(\xi) = \operatorname{col}(a_1(\xi), a_2(\xi))$, определяющей профиль падающей волны, соответствует единственная вектор-функция $b(\xi) = \operatorname{col}(b_1(\xi), b_2(\xi))$, определяющая профиль отраженной волны. Таким образом, естественно следующее определение.

Определение 2. *Оператор* S, *переводящий вектор-функцию* $a(\xi)$ *в вектор-функцию* $b(\xi)$, *будем называть оператором рассеяния*

$$Sa = b. \tag{21}$$

Оператор рассеяния S является матричным оператором

$$S = (S_{ij})_{i,j=1}^2.$$

Поскольку вектор-функции $a(\xi)$, $b(\xi)$, как производные от произвольных непрерывно дифференцируемых функций, плотны в пространстве $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$, оператор рассеяния S естественно изучать в этом пространстве.

Для описания структуры оператора рассеяния S (21) можно использовать результаты работ [3, 5], касающиеся задачи рассеяния для системы уравнений

Дирака. Действительно, если в уравнении (2) выполнить замену

$$u'_y = \psi_1(x, y), \qquad u'_x = \psi_2(x, y), \tag{22}$$

то для функций ψ_1, ψ_2 получим систему уравнений Дирака вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\psi_1 + g(x, y)(\psi_1 + \psi_2) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\psi_2 + g(x, y)(\psi_1 + \psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

При этом, если потенциал $g(x, y)$ удовлетворяет оценке (4), решение системы (23) на бесконечности имеет асимптотики

$$\begin{aligned} &\psi_1(x, y) = \overset{\mp}{\psi}_1(y) + o(1), \qquad x \to \mp\infty, \\ &\psi_2(x, y) = \overset{\mp}{\psi}_2(x) + o(1), \qquad y \to \mp\infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Исходя из этого, оператор рассеяния $\tilde{S}$ для системы уравнений (23) можно определить как оператор, связывающий указанные асимптотики:

$$\tilde{S}\,\overset{-}{\psi} = \overset{+}{\psi}. \tag{25}$$

В работе [5] доказано, что оператор рассеяния $\tilde{S}$ является ограниченным линейным матричным оператором в пространстве вектор-функций $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$, для которого существует ограниченный обратный оператор $\tilde{S}^{-1}$, и

$$\tilde{S} = P + \tilde{F}, \qquad \tilde{S}^{-1} = P^{-1} + \tilde{G}, \tag{26}$$

где P — матричный диагональный оператор умножения в пространстве вектор-функций вида

$$P = \operatorname{diag}\{P_{11}, P_{22}\} \tag{27}$$

с P_{11}, P_{22} — операторами умножения на функции

$$p_{11}(y) = \exp\left\{-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, y)\,d\xi\right\}, \qquad p_{22}(y) = \exp\left\{-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, \eta)\,d\eta\right\}. \tag{28}$$

Операторы $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ — матричные интегральные операторы Гильберта–Шмидта. Диагональные элементы этих операторов являются вольтерровскими интегральными операторами по соответствующей переменной.

Сопоставляя задачи рассеяния для волнового уравнения (2) и системы уравнений Дирака (23), получаем связь между операторами S и $\tilde{S}$.

Лемма 5. *Пусть S — оператор рассеяния волнового уравнения* (2), *коэффициент поглощения $g(x, y)$ которого удовлетворяет условию* (4) *и $\tilde{S}$ — оператор рассеяния для системы дифференциальных уравнений Дирака* (23). *Тогда*

$$S = \tilde{S}. \tag{29}$$

Доказательство. Дифференцируя интегральное уравнение задачи рассеяния (9) по x и y и используя формулы (20), (22), получаем

$$u'_y = a_1(y) - \int\limits_{-\infty}^{x} (Au)(\xi, y)\,d\xi = \psi_1(x, y),$$

$$u'_x = a_2(x) - \int_{-\infty}^{y} (Au)(x,\eta)\,d\eta = \psi_2(x,y).$$

Переходя к пределу $x, y \to -\infty$ в этих равенствах, имеем

$$a_1(y) = \overline{\psi}_1(y), \quad a_2(x) = \overline{\psi}_2(x),$$

или

$$\overline{\psi} = a. \tag{30}$$

Аналогично, дифференцируя интегральное уравнение (11) по x и y и переходя к пределу $x, y \to +\infty$, получаем

$$\overset{+}{\psi} = b. \tag{31}$$

Из определений (21), (25) операторов рассеяния S, $\tilde{S}$ для волнового уравнения (2) и системы уравнений Дирака (23), формул (30), (31) получим формулу (29).

Из этой леммы и формул (26)–(29) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор рассеяния* S *для волнового уравнения* (2) *с коэффициентом поглощения* $g(x, y)$, *удовлетворяющим оценке* (4), *имеет следующую структуру*:

$$S = \begin{pmatrix} P_{11} + \overset{+}{F}{}_{11}^{(2)} & F_{12} \\ F_{21} & P_{22} + \overset{+}{F}{}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Для оператора рассеяния S *в пространстве* $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$ *существует обратный оператор* S^{-1} *вида*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} + \overset{-}{G}{}_{11}^{(2)} & G_{12} \\ G_{21} & P_{22}^{-1} + \overset{-}{G}{}_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

где P_{11}, P_{22} — *операторы умножения, определенные в* (28), F_{ij}, G_{ij}, $i, j = 1, 2$, *являются интегральными операторами Гильберта–Шмидта. Диагональные операторы* $\overset{+}{F}{}_{11}^{(2)}$, $\overset{+}{F}{}_{22}^{(1)}$, $\left(\overset{-}{G}{}_{11}^{(2)}, \overset{-}{G}{}_{22}^{(1)}\right)$ — *вольтерровские интегральные операторы по переменным* y *или* x *с переменными верхними* (*нижними*) *пределами интегрирования.*

1. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1979. – 324 с.
2. *Нижник Л. П.* Корректная задача без начальных данных для волнового уравнения // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 6. – С. 802 – 813.
3. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
4. *Фам Лой Ву.* Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного уравнения струны. – Киев, 1981. – 18 с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; № 81.30).
5. *Tarasova O. V.* The inverse scattering problem for the wave equation // Міжнар. конф. з функціон. аналізу: Тези доп. (Київ, 22–26 серп. 2001 р.). – Київ, 2001. – С. 95.

Получено 12.06.2002