УДК 512.662.5

В. В. Шарко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ЦЕПНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ*

We study additive functions given on a category of finitely generated projective modules. By using these functions, we define p-minimal epimorphisms and give the necessary and sufficient condition for their existence. We prove results about the structure of p-minimal chain complexes of projective modules.

Вивчаються адитивні функції, задані на категорії скінченнопороджених проективних модулів. За допомогою цих функцій визначено p-мінімальні епіморфізми і наведено необхідну та достатню умову їх існування. Доведено результати відносно будови p-мінімальних ланцюгових комплексів проективних модулів.

1. Аддитивные функции на категории проективных модулей. Приведем некоторые определения и результаты, относящиеся к конечнопорожденным модулям над групповыми кольцами. Большинство фактов имеют место для модулей над более широким классом колец.

В дальнейшем через Z будем обозначать кольцо целых, а через C — поле комплексных чисел. Пусть G — дискретная группа, обозначим через $Z[G]$ ее целочисленное групповое кольцо, а через $C[G]$ групповое кольцо над полем C. В групповом кольце имеется эпиморфизм аугументации $\varepsilon\colon Z[G] \to Z$ ($\varepsilon\colon C[G] \to C$), действующий по правилу $\varepsilon(\sum \alpha_i g_i) = \sum \alpha_i$. Ядро эпиморфизма ε будем обозначать через $I[G]$. В кольце $C[G]$ существует инволюция $*\colon C[G] \to C[G]$, $(\sum \alpha_i g_i)^* = \sum \overline{\alpha}_i g_i^{-1}$, где $\overline{\alpha}$ обозначает сопряжение в C. Эта инволюция удовлетворяет условиям:

a) $(r^*)^* = r$;

b) $(\alpha r_1 + \beta r_2)^* = \overline{\alpha} r_1^* + \overline{\beta} r_2^*$, $\alpha, \beta \in C$;

c) $(r_1 r_2)^* = r_2^* r_1^*$

для всех элементов r кольца $C[G]$. Можно определить след $\mathrm{tr}\colon C[G] \to C$ по правилу $\mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i g_i\right) = \alpha_1$, где α_1 — коэффициент при $g_1 = e$ — единице группы G. Очевидно, что tr удовлетворяет условиям:

a) $\mathrm{tr}(1) = 1$;

b) tr — C-линейное отображение;

c) $\mathrm{tr}(r_1 r_2) = \mathrm{tr}(r_2 r_1)$;

d) $\mathrm{tr}(r r^*) \geq 0$, и если $\mathrm{tr}(r r^*) = 0$, то $r = 0$.

В дальнейшем под модулем M над некоторым ассоциативным кольцом с единицей Λ будем понимать, если не оговорено противное, левый конечнопорожденный Λ-модуль. Кольца, для которых ранг свободного модуля определен однозначно, называются IBN-кольцами [1]. Известно, что групповые кольца $Z[G]$, $C[G]$ являются IBN-кольцами [1]. В настоящей работе будем рассматривать только IBN-кольца. Заметим, что подмодуль свободного модуля конечного ранга над групповым кольцом может быть бесконечнопорожденным [2], даже если группа конечноопределенная. Если обозначить через $\mu(M)$ минимальное число образующих модуля M, то $\mu(M \oplus F_n) \leq \mu(M) + n$, где F_n — свободный модуль ранга n. Существуют примеры (стабильно свободные модули), когда выполняется строгое неравенство [3 – 5]. Полагаем, что если модуль M — нулевой, то $\mu(M) = 0$.

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/582-2001).

Определение 1.1. *Пусть задана функция $d(P)$ на категории проективных Λ-модулей P (не обязательно над групповыми кольцами) со значениями в множестве неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$. Будем говорить, что функция $d(P)$ — аддитивна, если:*

a) $d(P)=d(Q)$, *если модуль P изоморфен модулю Q;*

b) $d(P)=0$ *тогда и только тогда, когда $P=0$;*

c) $d(\Lambda)=1$;

d) $d(P\oplus Q)=d(P)+d(Q)$.

Приведем пример аддитивной функции, построенной Дайером и Васкесом в [6] для проективных модулей над кольцом $Z[G]$ со значением во множестве неотрицательных целых чисел. Пусть $\pi\colon F_n\to P$ — эпиморфизм F_n — свободного модуля ранга n на проективный модуль P над групповым кольцом $Z[G]$. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ базис модуля F_n. Предположим, что $s\colon P\to F_n$ — гомоморфизм такой, что $\pi\cdot s=\mathrm{Id}_P$. Тогда гомоморфизм $e=s\cdot\pi\colon F_n\to F_n$ является идемпотентом и описывает P с точностью до изоморфизма. Пусть A — матрица гомоморфизма e, записанная в базисе $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $e(x_i)=$ $=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j$, где $a_{ij}\in Z[G]$. Положим, следуя Дайеру и Васкесу, $i(P)=$ $=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(a_{ii})$. В работе [6] доказано, что $i(P)$ — аддитивная функция на категории проективных $Z[G]$-модулей. Несложно показать, используя результаты работы [6], что для проективного $Z[G]$-модуля P выполняется неравенство $i(P)\le\mu(P)$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда P — свободный модуль.

***Замечание* 1.1.** Для проективных модулей P над кольцом $C[G]$ аналогичным образом можно построить аддитивную функцию $i(P)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(a_{ii})$. Из определения следует, что она принимает значение во множестве *неотрицательных действительных чисел* $\mathbb{R}_+$ [7].

Другие аддитивные функции на категории проективных модулей над групповыми кольцами можно найти в книге [8].

Определение 1.2. *Пусть Y — множество значений аддитивной функции $d(P)$, заданной на категории проективных модулей. Назовем функцию $d(P)$ дискретной, если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $y\in Y$ в интервале $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ нет других, кроме y, точек из Y.*

2. Числа $\mu_p(M)$ и p-rank (N, M). В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты относительно эпиморфизмов Λ-модулей. Эпиморфизмы Λ-модулей $f\colon P\to M$ и $g\colon P\to M$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon P\to P$ такой, что $f=g\circ\varphi$. *Утолщением эпиморфизма* $f\colon P\to M$ с помощью модуля Q называется эпиморфизм $\hat{f}\colon P\oplus Q\to M$ такой, что $\hat{f}|_{P\oplus 0}=f$ и $\hat{f}|_{0\oplus Q}=0$. *Стабилизацией гомоморфизма* $f\colon P\to M$ с помощью модуля Q называется гомоморфизм $\tilde{f}\colon P\oplus Q\to M\oplus Q$ такой, что $\tilde{f}|_{P\oplus 0}=f$ и $\tilde{f}|_{0\oplus Q}=\mathrm{Id}$. Если $f\colon P\to M$ и $g\colon\overline{P}\to M$ — произвольные эпиморфизмы, где P и $\overline{P}$ — проективные модули, то утолщение эпиморфизма f с помощью модуля $\overline{P}$ эквивалентно утолщению эпиморфизма g с помощью модуля P (изоморфизм Шануэля) [9].

Определение 2.1. *Пусть $d(P)$ — аддитивная функция на категории проективных модулей. Эпиморфизм проективного модуля P_1, $f\colon P_1\to M$ назовем p-минимальным, если для любого другого эпиморфизма проективного модуля*

Q, $g: Q \to M$ имеет место $d(P_1) \le d(Q)$. Число $d(P_1)$ в дальнейшем будем обозначать через $\mu_p(M)$.

***Замечание* 2.1.** Не для любого M определено число $\mu_p(M)$. Приведем пример. Пусть $\Lambda = C[G]$ и $d(P) = i(P)$ — аддитивная функция из замечания 1.1. Предположим, что $g \in G$ — элемент порядка k. Тогда элемент $E = (1/k)(e + g + \ldots + g^{k-1}) \in C[G]$ является идемпотентом. Следовательно, модуль $P = C[G] \cdot (E)$ есть ненулевой проективный модуль такой, что $C[G] = P \oplus Q$, где $Q = C[G] \cdot (1 - E)$. Очевидно, что $d(P) = 1/k$. Поскольку $\varepsilon(E) = 1$, то сужение гомоморфизма аугументации ε на модуль P является эпиморфизмом на поле C, рассматриваемое как $C[G]$-модуль. Если группа G содержит элементы сколь угодно большого порядка, то очевидно, что число $\mu_p(C)$ определить нельзя. Однако легко видеть, что имеют место следующие факты:

a) если аддитивная функция $d(P)$ на категории проективных модулей — дискретна, то для любого модуля M определено число $\mu_p(M)$ и $\mu(M) \ge \mu_p(M)$;

b) если P — проективный модуль и для модуля M определено число $\mu_p(M)$, то и для модуля $M \oplus P$ определено число $\mu_p(M \oplus P)$ и $\mu_p(M \oplus P) = \mu_p(M) + d(P)$;

c) если P — проективный модуль и для модуля $M \oplus P$ определено число $\mu_p(M \oplus P)$, то и для модуля M определено число $\mu_p(M)$ и $\mu_p(M) = \mu_p(M \oplus P) - d(P)$.

Определение 2.2. *Пусть $f: P \to M$ — эпиморфизм, где P — проективный модуль. Будем говорить, что из f можно выделить p-минимальный эпиморфизм, если существует разложение $P = P_1 \oplus P_2$ такое, что $f | (P_1 \oplus 0)$ — p-минимальный эпиморфизм и $f(0 \oplus P_2) = 0$.*

***Замечание* 2.2.** Вообще говоря, из произвольного эпиморфизма $f: P \to M$ нельзя выделить p-минимальный эпиморфизм. Конструкция Шануэля [4] позволяет из утолщения эпиморфизма f выделить p-минимальный эпиморфизм, если он существует. Этим обстоятельством мы будем неоднократно пользоваться.

Определение 2.3. *Пусть $M \supseteq N$ — подмодуль, не обязательно конечнопорожденный, в модуле M. Определим $p\text{-rank}(N, M)$ пары $M \supseteq N$ как значение неотрицательного числа k, для которого подмодуль N содержит проективный модуль P, $d(P) = k$, являющийся прямым слагаемым модуля M, и для любого другого проективного подмодуля $Q \subseteq N$, выделяющегося прямым слагаемым в M, выполняется неравенство $d(Q) \le k$.*

***Замечание* 2.3.** Не для любой пары модулей $M \supseteq N$ определен $p\text{-rank}(N, M)$. В качестве примера рассмотрим пару модулей $(C[G], I[G])$, где $I[G]$ — идеал аугументации, $d(P) = i(P)$ — аддитивная функция из замечания 1.1. Пусть группа G содержит элементы сколь угодно большого порядка. Рассмотрим для произвольного элемента $g \in G$ конечного порядка k проективный модуль Q, построенный в замечании 2.1. Очевидно, что $d(Q) = (k-1)/k$. Поскольку $\varepsilon(Q) = 0$, то модуль Q является подмодулем $I[G]$ и, следовательно, $p\text{-rank}(C[G], I[G])$ определить нельзя. Очевидно, что имеют место следующие факты:

a) если аддитивная функция $d(P)$ на категории проективных модулей дискретна, то для любой пары $M \supseteq N$ определен $p\text{-rank}(N, M)$;

b) ясно, что $p\text{-rank}(N, M) \le \mu(M)$ и $p\text{-rank}(N, M) = p\text{-rank}(N, M \oplus Q)$.

Определение 2.4. *Пусть для подмодуля $N \subseteq M$ определен $p\text{-rank}(N, M)$. Будем говорить, что $p\text{-rank}(N, M)$ — аддитивен, если для любого проектив-*

ного модуля Q определен p-rank$(N \oplus Q, M \oplus Q)$ и имеет место равенство

$$p\text{-rank}(N \oplus Q, M \oplus Q) = p\text{-rank}(N, M) + d(Q).$$

3. Необходимое и достаточное условие существования p-минимального эпиморфизма.

Лемма 3.1. *Предположим, что $d(P)$ — дискретная аддитивная функция на категории проективных модулей. Пусть N — подмодуль (не обязательно конечнопорожденный) модуля M. Существует такое положительное число k_0, что для всех проективных модулей Q таких, что $d(Q) \geq k_0$, p-rank$(N \oplus Q, M \oplus Q)$ — аддитивен.*

Доказательство. Обозначим через $[Q_k]$ совокупность проективных модулей, для которых $d(Q) = k$ ($Q \in [Q_k]$, k — натуральное число). Положим

$$d_k = \max_{Q \in [Q_k]} p\text{-rank}(N \oplus Q, M \oplus Q).$$

Если p-rank$(N \oplus Q, M \oplus Q)$ ($Q \in [Q_k]$) не становится аддитивным с ростом числа k, то разность $d_k - k$ должна неограниченно возрастать, поскольку функция $d(Q)$ — дискретна. Следовательно, найдутся такие натуральное число k_0 и проективный модуль $Q \in [Q_{k_0}]$, что $d_{k_0} = p$-rank$(N \oplus Q, M \oplus Q)$ и $d_{k_0} - d(Q) = d_{k_0} - k_0 > \mu(M)$, что невозможно. Получили противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Предположим, что $d(P)$ — аддитивная функция на категории проективных модулей. Пусть N — подмодуль (не обязательно конечнопорожденный) модуля M и p-rank(N, M) — аддитивен. Рассмотрим произвольное представление модулей N и M в виде $N = N_1 \oplus Q$, $M = M_1 \oplus Q$, где $N_1 \subset M_1$ и Q — проективный модуль такой, что p-rank$(N, M) = d(Q)$. Тогда p-rank(N_1, M_1) определен, равен нулю и аддитивен.*

Доказательство. Если существует проективный подмодуль R в N_1, выделяющийся прямым слагаемым в модуле M_1, т. е. $N_1 = N_2 \oplus R$, $M_1 = M_2 \oplus R$, $N_2 \subseteq M_2$, то получим равенство

$$p\text{-rank}(N_2 \oplus R \oplus Q, M_2 \oplus R \oplus Q) = p\text{-rank}(N, M) = d(Q) + d(R),$$

что невозможно. Следовательно, p-rank(N_1, M_1) определен и равен нулю.

Докажем аддитивность p-rank(N_1, M_1). Пусть для некоторого проективного модуля R пара модулей $(N_1 \oplus R, M_1 \oplus R)$ имеет свойство, что существует проективный подмодуль R_1 в $N_1 \oplus R$, выделяющийся прямым слагаемым в $M_1 \oplus R$, и $d(R_1) > d(R)$, т. е. имеет место разложение $N_1 \oplus R = N_2 \oplus R_1$, $M_1 \oplus R = M_2 \oplus R_1$, $N_2 \subseteq M_2$. Рассмотрим пару модулей $(N_2 \oplus R_1 \oplus Q, M_2 \oplus R_1 \oplus Q)$. Непосредственно видно, что модуль $N_2 \oplus R_1 \oplus Q$ содержит подмодуль $R_1 \oplus Q$ в качестве прямого слагаемого модуля $M_2 \oplus R_1 \oplus Q = M \oplus R$ и $d(R_1 \oplus Q) = d(R_1) + d(Q) > d(R) + d(Q)$. Но

$$(N_2 \oplus R_1 \oplus Q, M_2 \oplus R_1 \oplus Q) = (N_1 \oplus R \oplus Q, M_1 \oplus R \oplus Q) = \\ = (N \oplus R, M \oplus R)$$

и, следовательно, p-rank$(N_1 \oplus R \oplus Q, M_1 \oplus R \oplus Q)$ определен и равен $d(R) + d(Q)$. Значит, $d(R) = d(R_1)$, т. е. p-rank(N_1, M_1) — аддитивен.

Лемма доказана.

Существует связь между p-минимальным эпиморфизмом $f\colon P \to M$ и поведением p-rank$(\mathrm{Ker} f, P)$.

Теорема 3.1. *Пусть $f\colon P \to M$ — эпиморфизм, где P — проективный модуль. Для того чтобы f был p-минимальным эпиморфизмом, необходимо и* *достаточно, чтобы* $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f, P) = 0$ *и был аддитивен (модуль* $\mathrm{Ker} f$ *не предполагается конечнопорожденным).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f: P \to M$ — p-минимальный эпиморфизм, тогда очевидно, что $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f, P) = 0$.

Покажем, что $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f, P)$ — аддитивен. Предположим противное, пусть найдется проективный модуль Q такой, что $\hat{f}$ — утолщение эпиморфизма f с помощью модуля Q и пара модулей $(\mathrm{Ker} f \oplus Q, P \oplus Q)$ имеет свойство, что существует проективный подмодуль R в $\mathrm{Ker} f \oplus Q$, выделяющийся прямым слагаемым в $P \oplus Q$, и $d(R) > d(Q)$, т. е. имеет место разложение $\mathrm{Ker} f \oplus Q = N_1 \oplus R$, $P \oplus Q = P_1 \oplus R$, $N_1 \subseteq P_1$. Сужение эпиморфизма $\hat{f}$ на подмодуль $P_1 \oplus 0$ является эпиморфизмом на модуль M. По построению $d(P_1) < d(P)$, что противоречит p-минимальности эпиморфизма f. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f: P \to M$ — эпиморфизм, где P — проективный модуль, $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f, P) = 0$ и аддитивен. Покажем, что f — p-минимальный эпиморфизм. Предположим, что существует эпиморфизм $g: Q \to M$, где Q — проективный модуль, и $d(P) > d(Q)$. Утолщение эпиморфизма f с помощью модуля Q эквивалентно утолщению эпиморфизма g с помощью модуля P [9]. Поэтому $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f \oplus Q, P \oplus Q) = p\text{-rank}(\mathrm{Ker}\, g \oplus P, P \oplus Q) \geq d(P) > d(Q)$, что противоречит аддитивности $p\text{-rank}(\mathrm{Ker} f, P)$. Следовательно, $d(P) = d(Q)$.

Теорема доказана.

4. Необходимое и достаточное условие существования p-минимальных проективных цепных комплексов. Приведем некоторые определения и результаты, относящиеся к цепным комплексам. Под градуированным Λ-модулем понимается последовательность $C = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ Λ-модулей. Отображением степени k градуированного Λ-модуля C в градуированный Λ-модуль D называется семейство гомоморфизмов $f_n: C_n \to D_{n+k}$. *Цепной комплекс над кольцом* Λ, по определению, есть пара (C, d), где C — градуированный Λ-модуль и $d: C \to C$ — гомоморфизм степени -1 такой, что $d^2 = 0$. Циклы, границы и гомологии определяются формулами $Z(C) = \mathrm{Ker}\, d$, $B(C) = \mathrm{Im}\, d$ и $H(C) = Z(C)/B(C)$ соответственно. Все они являются градуированными Λ-модулями. Мы будем рассматривать такие цепные комплексы, у которых C_i — проективные Λ-модули, равные нулю начиная с достаточно большого i и $n \geq 0$. Если (C, d) и $(\overline{C}, \overline{d})$ — цепные комплексы, то цепным отображением из (C, d) в $(\overline{C}, \overline{d})$ называется гомоморфизм степени 0 $f_n = f: C \to \overline{C}$ такой, что $\overline{d} \circ f = f \circ d$. Если $f_n = f: C \to \overline{C}$ — изоморфизмы, то говорят, что (C, d) и $(\overline{C}, \overline{d})$ — цепно изоморфны. Два цепных отображения f и g называются гомотопными $(f \sim g)$, если существует гомоморфизм степени $+1$, $h: C \to \overline{C}$, такой, что $d \circ h + h \circ d = f - g$. Цепное отображение $f_n = f: C \to \overline{C}$ индуцирует гомоморфизм гомологий $f_*: H(C) \to H(\overline{C})$, и $f_* = g_*$, если цепные отображения f и g — гомотопны. Цепное отображение $f_n = f: C \to \overline{C}$ называется гомотопической эквивалентностью, если существует такое цепное отображение $\bar{f}_n = \bar{f}: \overline{C} \to C$, что $\bar{f} \circ f = \mathrm{id}_C$ и $f \circ \bar{f} = \mathrm{id}_{\overline{C}}$. Цепной комплекс называется стягиваемым, если он гомотопически эквивалентен нулевому цепному комплексу. Прямой суммой цепных комплексов (C, d) и $(\overline{C}, \overline{d})$ называется цепной комплекс

$$(C \oplus \overline{C}, d \oplus \overline{d} = C_n \oplus \overline{C}_n \xrightarrow{d_n \oplus \overline{d}_n} C_{n-1} \oplus \overline{C}_{n-1}).$$

Следующее предложение содержится в работе Кокрофта и Свона [9].

Предложение 4.1. *Пусть* $f = f_n\colon (C, d) \to (\overline{C}, \overline{d})$, $n \geq 0$, *— цепное отображение между проективными цепными комплексами* (C, d) *и* $(\overline{C}, \overline{d})$, *индуцирующее изоморфизм в гомологиях. Тогда существуют стягиваемые проективные цепные комплексы* (D, ∂) *и* $(\overline{D}, \overline{\partial})$ *такие, что цепные комплексы* $(C \oplus \oplus D, d \oplus \partial)$ *и* $(\overline{C} \oplus \overline{D}, \overline{d} \oplus \overline{\partial})$ *цепно изоморфны.*

В дальнейшем операцию прибавления стягиваемого проективного цепного комплекса (D, ∂) к проективному цепному комплексу (C, d) будем называть *стабилизацией* цепного комплекса (C, d) с помощью цепного комплекса (D, ∂). Обратную операцию — удаление из проективного цепного комплекса (C, d) стягиваемого проективного цепного комплекса (D, ∂), являющегося прямым слагаемым в (C, d), будем называть *сокращением* цепного комплекса (C, d) с помощью цепного комплекса (D, ∂). Таким образом, два гомотопически эквивалентных проективных цепных комплекса с помощью стабилизации можно сделать цепно изоморфными. Или гомотопически эквивалентные проективные цепные комплексы получаются из цепно изоморфных цепных комплексов с помощью сокращения на стягиваемые проективные цепные комплексы.

Предположим, что зафиксирована аддитивная функция $d(P)$ на категории проективных модулей над кольцом Λ.

Определение 4.1. *Проективный цепной комплекс* $(C, d)\colon C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n$ *называется* p*-минимальным в размерности* i, *если для любого проективного цепного комплекса* $(D, \partial)\colon D_0 \xleftarrow{\partial_1} D_1 \xleftarrow{\partial_2} \ldots \xleftarrow{\partial_n} D_n$, *гомотопически эквивалентного* (C, d), *выполняется* $d(C_i) \leq \leq d(D_i)$ ($d(C)$ *— размерность модуля* C). *Проективный цепной комплекс* (C, d) *называется* p*-минимальным, если он* p*-минимален во всех размерностях.*

***Замечание* 4.1.** Очевидно, что для произвольного свободного цепного комплекса (C, d), в его гомотопическом типе, для любой фиксированной размерности i всегда существует минимальный свободный цепной комплекс в размерности i. Однако в гомотопическом типе произвольного свободного цепного комплекса (C, d) минимальный свободный цепной комплекс может не существовать. Препятствием являются стабильно свободные модули. Более подробно см. [10]. Напомним, что кольцо Λ называется s-кольцом, если любой стабильно свободный Λ-модуль является свободным.

Теорема 4.1. *Пусть* $(C, d)\colon C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n$ *— проективный цепной комплекс над кольцом* Λ. *Для того чтобы цепной комплекс* (C, d) *был* p*-минимальным, необходимо и достаточно, чтобы* $p\text{-rank}\,(C_i, d_{i+1}(C_{i+1})) = 0$ *и был аддитивным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (C, d) — p-минимальный проективный цепной комплекс. Рассмотрим пару модулей $(C_i, d_{i+1}(C_{i+1}))$. Ясно, что $p\text{-rank}\,(C_i, d_{i+1}(C_{i+1})) = 0$, в противном случае в модуле $d_{i+1}(C_{i+1})$ найдется проективный подмодуль P, выделяющийся прямым слагаемым в модуле C_i. Сократив цепной комплекс (C, d) в размерностях i и $i+1$ на подмодуль P, получим новый проективный цепной комплекс $(\overline{C}, \overline{d})\colon \overline{C}_0 \xleftarrow{\overline{d}_1} \overline{C}_1 \xleftarrow{\overline{d}_2} \ldots \xleftarrow{\overline{d}_n} \overline{C}_n$, у которого $d(\overline{C}_i) < d(C_i)$, что невозможно в силу p-минималььности цепного комплекса (C, d). Аналогично доказывается аддитивность p-rank$(C_i, d_{i+1}(C_{i+1}))$.

Достаточность. Пусть (C, d) — проективный цепной комплекс, у которого p-rank$(C_i, d_{i+1}(C_{i+1})) = 0$ и аддитивен. Предположим, что найдется проективный цепной комплекс $(\overline{C}, \overline{d}) : \overline{C}_0 \xleftarrow{\overline{d}_1} \overline{C}_1 \xleftarrow{\overline{d}_2} \ldots \xleftarrow{\overline{d}_n} \overline{C}_n$, гомотопически эквивалентный (C, d) и такой, что для некоторых индексов $j_0 < j_1 < \ldots$ $\ldots < j_n$ выполняется $d(C_{j_k}) > d(\overline{C}_{j_k})$. В силу теоремы 3.1 $j_0 > 0$. Использовав теорему Кокрофта – Свона, построим стягиваемые проективные цепные комплексы $(P, f): P_0 \xleftarrow{f_1} P_1 \xleftarrow{f_2} \ldots \xleftarrow{f_n} P_n$ и $(Q, g): Q_0 \xleftarrow{g_1} Q_1 \xleftarrow{g_2} \ldots$ $\ldots \xleftarrow{g_n} Q_n$ такие, что цепные комплексы $(C \oplus P, d \oplus f)$ и $(\overline{C} \oplus Q, \overline{d} \oplus g)$ будут изоморфными. Следовательно, для всех индексов i будут иметь место равенства

$$p\text{-rank}(C_i \oplus P_i, d_{i+1}(C_{i+1}) \oplus f_{i+1}(P_{i+1})) =$$
$$= p\text{-rank}(\overline{C}_i \oplus Q_i, \overline{d}_{i+1}(\overline{C}_{i+1}) \oplus g_{i+1}(Q_{i+1})).$$

Но, с другой стороны, по построению, у цепного комплекса $(\overline{C} \oplus Q, \overline{d} \oplus g)$ в размерности j_0 p-rank$(\overline{C}_{j_0} \oplus Q_{j_0}, \overline{d}_{j_0+1}(\overline{C}_{j_0+1}) \oplus g_{j_0+1}(Q_{j_0+1}))$ больше, чем p-rank$(C_{j_0} \oplus P_{j_0}, d_{j_0+1}(C_{j_0+1}) \oplus f_{j_0+1}(P_{j_0+1}))$, что противоречит аддитивности и равенству нулю p-rank$(C_{j_0}, d_{j_0+1}(C_{j_0+1}))$. Следовательно, предположение, что $d(C_{j_0}) > \overline{d}(\overline{C}_{j_0})$, было неверным.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Для того чтобы в гомотопическом типе проективного цепного комплекса* $(C, d): C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n$ *существовал* p*-минимальный проективный цепной комплекс, необходимо и достаточно, чтобы в гомотопическом типе* (C, d) *содержался проективный цепной комплекс* (Q, ∂): $Q_0 \xleftarrow{\partial_1} Q_1 \xleftarrow{\partial_2} \ldots \xleftarrow{\partial_n} Q_n$, *у которого* p-rank$(Q_i, \partial_{i+1}(Q_{i+1}))$ *— аддитивен.*

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы 4.1.

Достаточность. Рассмотрим проективный цепной комплекс (Q, ∂). Обозначим $n_i = p$-rank$(Q_i, \partial_{i+1}(Q_{i+1}))$. В каждом модуле $\partial_{i+1}(Q_{i+1})$ выделим проективный модуль Γ_i, являющийся прямым слагаемым в модуле Q_i и такой, что $\partial(\Gamma_i) = n_i$. Использовав граничные операторы ∂_i, построим подмодули $\Omega_i \approx \Gamma_{i-1}$, выделяющиеся прямыми слагаемыми в Q_i, такие, что $d_i(\Omega_i) = \Gamma_{i-1}$. Другими словами, представим модули Q_i в виде $Q_i = \Gamma_i \oplus \Omega_i \oplus$ $\oplus \overline{Q}_i$ $(\partial_i(\Gamma_i) = 0)$. Очевидно, что совокупность модулей Γ_i и Ω_i образует стягиваемый цепной комплекс (W_i). Сократим цепной комплекс (Q, ∂) на цепной комплекс (W_i). В итоге получим новый цепной комплекс $(\overline{Q}, \overline{\partial}) : \overline{Q}_0 \xleftarrow{\overline{\partial}_1}$ $\xleftarrow{\overline{\partial}_1} \overline{Q}_1 \xleftarrow{\overline{\partial}_2} \ldots \xleftarrow{\overline{\partial}_n} \overline{Q}_n$, где гомоморфизм $\overline{\partial}_i$ является сужением гомоморфизма ∂_i на подмодули $\overline{Q}_i$. В силу леммы 3.2 p-rank $(\overline{Q}_i, \overline{\partial}_{i+1}(\overline{Q}_{i+1})) = 0$ и аддитивен. Теорема 4.1 гарантирует, что проективный цепной комплекс $(\overline{Q}, \overline{\partial})$ является p-минимальным.

Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если аддитивная функция $d(P)$ — дискретна, то в каждом гомотопическом типе содержится p-минимальный проективный цепной комплекс.*

Доказательство следует из леммы 3.1 и теоремы 4.2.

Замечание 4.2. Для аддитивной функции $d(P)$ и проективного цепного комплекса $(C, d): C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n$ можно определить эйлерову характеристику

$$\chi(C, d) = \sum_{i=0}^{n} d(C_i),$$

которая очевидно является инвариантом гомотопического типа комплекса (C, d).

Определение 4.2. *Пусть* $0 \xleftarrow{f_{-1}} M \xleftarrow{f_0} P_0 \xleftarrow{f_1} P_1 \xleftarrow{f_2} \ldots \ldots \xleftarrow{f_n} P_n \xleftarrow{f_{n+1}} \ldots$ *— проективная резольвента модуля* M. *Резольвента называется р-минимальной, если она р-минимальна как цепной комплекс.*

Следующее утверждение является следствием доказанных ранее результатов.

Предложение 4.2. *Пусть* $0 \xleftarrow{f_{-1}} M \xleftarrow{f_0} P_0 \xleftarrow{f_1} P_1 \xleftarrow{f_2} \ldots \ldots \xleftarrow{f_n} P_n \xleftarrow{f_{n+1}} \ldots$ *— проективная резольвента модуля* M. *Эта резольвента является р-минимальной тогда и только тогда, когда* $f_i : P_i \to \operatorname{Ker} f_{i-1}$ *— р-минимальный эпиморфизм.*

1. *Cohn P. M.* Some remarks on the invariant basis property // Topology. – 1966. – **5**. – P. 215 – 228.
2. *Stallings J. R.* A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated // Amer. J. Math. – 1963. – **85**. – P. 541 – 543.
3. *Артамонов В. А.* Проективные несвободные модули над групповыми кольцами разрешимых групп // Мат. сб. – 1981. – **116**. – С. 232 – 244.
4. *Dunwoody M.* Relation modules // Bull. London Math. Soc. – 1972. – **4**. – P. 151 – 155.
5. *Lewin J.* Projective modules over group-algebras of torsion-free groups // Mich. Math. J. – 1982. – **29**. – P. 59 – 65.
6. *Dyer E., Vasquez A. T.* An invariant for finitely generated projectives over $Z\,|\,G\,|$ // J. Pure and Appl. Algebra. – 1976. – **7**. – P. 241 – 248.
7. *Bass H.* Euler characteristics and characters of discrete groups // Invent. math. – 1976. – **35**. – P. 155 – 196.
8. *Браун К. С.* Когомологии групп. – М.: Наука, 1987. – 383 с.
9. *Cockroft W., Swan R.* On homotopy type of certain two-dimensional complexes // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**. – P. 193 – 202.
10. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 192 с.

Получено 12.11.2003