УДК 517.53

М. М. Шеремета, Ю. С. Трухан (Львів. нац. ун-т)

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ДОБУТКУ НАФТАЛЕВИЧА – ЦУДЗІ

We investigate conditions on zeros under which the Naftalevich – Tsuji product is a function of bounded l-index analytic in the unit disk.

Досліджено умови на нулі, за яких добуток Нафталевича – Цудзі є аналітичною в одиничному крузі функцією обмеженого l-індексу.

1. Вступ. Нехай (a_k) — послідовність чисел з $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, занумерованих у порядку неспадання модулів, а $p \in \mathbb{N}$ — її рід, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|)^p = +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|)^{p+1} < \infty.$$

Вивчаючи факторизацію мероморфних в $\mathbb{D}$ функцій, А. Г. Нафталевич [1, 2] і М. Цудзі [3] побудували і використали канонічний добуток

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{1-|a_k|^2}{1-\bar{a}_k z}, p\right), \tag{1}$$

де

$$E(u, p) = (1-u)\exp\left\{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right\}$$

— первинний множник Вейєрштрасса. Добуток (1) абсолютно і рівномірно збіжний на кожному компакті з $\mathbb{D}$ і, отже, функція π є аналітичною в $\mathbb{D}$.

Для додатної неперервної в $[0, 1)$ функції l такої, що $(1-r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$, аналітична в $\mathbb{D}$ функція π за означенням [4, с. 71] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|\pi^{(n)}(z)|}{n!\,l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|\pi^{(k)}(z)|}{k!\,l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$. Як і в [4, с. 71], для $q \in [0, \beta)$ покладемо

$$\lambda_1(q) = \inf\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \frac{q}{l(r_0)},\ 0 \le r_0 < 1\right\},$$

$$\lambda_2(q) = \sup\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \frac{q}{l(r_0)},\ 0 \le r_0 < 1\right\}$$

і будемо говорити, що $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, якщо $(1-r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$ і $0 < \lambda_1(q) \le 1 \le \lambda_2(q) < +\infty$ для кожного $q \in [0, \beta)$.

Основним результатом даної статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to +\infty$, *а функція* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, *така, що*

$$l(r) \asymp \frac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$$

© М. М. ШЕРЕМЕТА, Ю. С. ТРУХАН, 2004

при $r \to 1$, *де* $n(r) = \sum_{|a_k| \le r} 1$ — *лічильна функція послідовності* (a_k). *Для того щоб добуток* (1) *був функцією обмеженого* l-*індексу, достатньо, а у випадку додатних нулів і необхідно, щоб*

$$\sum_{k=2n(r)}^{\infty} (1-|a_k|)^{p+1} = O\Big((1-r)^{p+1} n(r) \ln n(r)\Big), \qquad r \to 1. \tag{2}$$

Крім цього, ми покажемо, що якщо $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, то π є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \dfrac{\beta}{(1-r)^{p+2}}$, $\beta > 1$, а якщо на додаток $(1-r)^p n(r) \ln n(r) = O(1)$, $r \to 1$, то π є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \dfrac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, $\beta > 1$. Принагідно зауважимо, що умова $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, є природною, оскільки зі збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|)^{p+1}$ випливає, що $k(1-|a_k|)^{p+1} \to 0$, $k \to \infty$.

2. Допоміжні леми. Для $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ і $q \in (0, \beta)$ покладемо

$$G_q(\pi) = \bigcup_k \left\{ z : |z - a_k| \le \frac{q}{l(|a_k|)} \right\}$$

і

$$n\left(r, z_0, \frac{1}{\pi}\right) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1.$$

Безпосереднім наслідком теореми 2.1 з [4, с. 27] є така лема.

Лема 1. *Для функції* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, *добуток* (1) *є функцією обмеженого* l-*індексу тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного* $q \in (0, \beta)$ *існує таке* $P(q) > 0$, *що*

$$\left| \frac{\pi'(z)}{\pi(z)} \right| \le P(q)\, l(|z|)$$

для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(\pi)$;

2) *для кожного* $q \in (0, \beta)$ *існує таке* $n^*(q) \in \mathbb{N}$, *що*

$$n\left(\frac{q}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{\pi} \right) \le n^*(q)$$

для кожного $z_0 \in \mathbb{D}$.

Лема 2. *Умова* 2 *леми* 1 *виконується, якщо* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, *і*

$$|a_{k+1}| - |a_k| > \frac{2q_0}{l(|a_k|)}$$

для деякого $q_0 \in (0, \beta)$ *і всіх* $k \ge k_0$.

Доведення. Припустимо, що для деякого $r \in (0, 1)$

$$r - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)} \le |a_k| < |a_{k+1}| \le r + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}. \tag{3}$$

Тоді

$$|a_{k+1}| - |a_k| \le \frac{2q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}, \qquad l(|a_k|) \le \lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right)l(r) \le \lambda_2(q_0)l(r),$$

тобто

$$|a_{k+1}| - |a_k| \le \frac{2q_0}{l(|a_k|)},$$

що неможливо. Оскільки (3) не виконується, то проміжок

$$\left[r - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}, r + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}\right]$$

містить щонайбільше один нуль. Тому

$$n\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{\pi}\right) \le 1.$$

Але кожний круг радіуса $\frac{q}{l(|z_0|)}$, $q > \frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}$, можна покрити скінченною кількістю $m = m\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}, q\right)$ кругів радіуса $\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(|z_0|)}$. Тому $n\left(\frac{q}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{n}\right) \le m$, тобто виконується умова 2 леми 1.

Лема 3. *Якщо* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|$, $|z - a_n| \ge \frac{q}{l(|a_n|)}$ *і* $|z - a_{n+1}| \ge \frac{q}{l(|a_{n+1}|)}$, $0 < q < \beta$, *то*

$$\frac{1}{|z-a_n|} + \frac{1}{|z-a_{n+1}|} \le P_1(q)l(|z|), \qquad P_1(q) \equiv \text{const} > 0. \tag{4}$$

Доведення. Якщо $|z - a_n| \ge \frac{q}{l(|z|)}$ і $|z - a_{n+1}| \ge \frac{q}{l(|z|)}$, то нерівність (4) виконується з $P_1(q) = \frac{2}{q}$. Припустимо, що $|z - a_n| < \frac{q}{l(|z|)}$, але $|z - a_n| \ge$ $\ge \frac{q}{l(|a_n|)}$. Тоді $|z| - \frac{q}{l(|z|)} \le |a_n| \le |z| + \frac{q}{l(|z|)}$, оскільки $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, то $l(|a_n|) \le \lambda_2(q)l(|z|)$ і тому $|z - a_n| \ge \frac{q}{\lambda_2(q)l(|z|)}$. Аналогічно, якщо $|z - a_{n+1}| < \frac{q}{l(|z|)}$, але $|z - a_{n+1}| \ge \frac{q}{l(|a_{n+1}|)}$, то $|z - a_{n+1}| \ge \frac{q}{\lambda_2(q)l(|z|)}$. Звідси випливає правильність нерівності (4) з $P_1(q) = \frac{2\lambda_2(q)}{q}$.

Лема 4. *Якщо* $n(1-|a_n|)^{p+1} \searrow 0$, $n \to \infty$, *і* $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le (p+1)2^{p+1}\frac{n(r)\ln n(r)}{1-r}, \qquad r = |z|, \tag{5}$$

і

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le \frac{K_1}{(1-r)^{p+2}}, \quad r=|z|, \quad K_1=\mathrm{const}>0. \quad (6)$$

Доведення. Справді,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1+|a_k|)^{p+1}}{|z|-|a_k|}\left(\frac{1-|a_k|}{1-|a_k||z|}\right)^{p+1} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{p+1}}{|z|-|a_k|} = \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1-|a_k|)/(1-r)-1} \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1-|a_k|)/(1-|a_n|)-1} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{1/(p+1)}(1-|a_n|)}{(n/k)^{1/(p+1)}k^{1/(p+1)}(1-|a_k|)-n^{1/(p+1)}(1-|a_n|)},$$

і оскільки $k^{1/(p+1)}(1-|a_k|) \searrow 0,\ k\to\infty,$ то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n/k)^{1/(p+1)}-1} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^{1/(p+1)}}{n^{1/(p+1)}-k^{1/(p+1)}} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^{1/(p+1)}\left(n^{p/(p+1)}+n^{(p-1)/(p+1)}k^{1/(p+1)}+\ldots+k^{p/(p+1)}\right)}{n-k} \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(p+1)n}{n-k} \le \frac{2^{p+1}(p+1)n}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}(p+1)n\ln n}{1-r} = \frac{2^{p+1}(p+1)n(r)\ln n(r)}{1-r}.$$

Нерівність (5) доведено. Далі, як і вище,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{p+1}}{|z|-|a_k|} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{(1-r)^{p+2}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-r)^{p+1}}{(1-|a_k|)/(1-r)-1} \le \frac{2^{p+1}}{(1-r)^{p+2}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}}{(1-|a_k|)/(1-|a_n|)-1} \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}}{(1-r)^{p+2}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}}{(n/k)^{1/(p+1)}-1} \le \frac{2^{p+1}(p+1)n(1-|a_n|)^{p+1}\ln n}{(1-r)^{p+2}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|)^{p+1} = K < \infty,$$

то

$$K > \sum_{k=1}^{n} (1-|a_k|)^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(1-|a_k|)^{p+1}}{k} \geq$$

$$\geq n(1-|a_n|)^{p+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \asymp n(1-|a_n|)^{p+1} \ln n$$

при $n \to \infty$. З двох останніх нерівностей випливає існування сталої $K_1 > 0$, для якої виконується (6).

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Якщо* $n(1-|a_n|)^{p+1} \searrow 0$, $n \to \infty$, *і* $|a_n| \leq |z| \leq |a_{n+1}|$, *то*

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \leq 4(p+1)2^{p+1} \frac{n(r) \ln n(r)}{1-r}, \qquad r = |z|, \tag{7}$$

і

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \leq \frac{K_2}{(1-r)^{p+2}}, \qquad r = |z|, \qquad K_2 = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Доведення. Як і при доведенні леми 4,

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \leq 2^{p+1} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{|a_k|-|z|} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{1-r} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{1-(1-|a_k|)/(1-r)} \leq \frac{2^{p+1}}{1-r} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{1-(1-|a_k|)/(1-|a_{n+1}|)} =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{1-r} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{(n+1)^{1/(p+1)}(1-|a_{n+1}|)}{(n+1)^{1/(p+1)}(1-|a_{n+1}|) - ((n+1)/k)^{1/(p+1)} k^{1/(p+1)}(1-|a_k|)} \leq$$

$$\leq \frac{2^{p+1}}{1-r} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{k^{1/(p+1)}}{k^{1/(p+1)} - (n+1)^{1/(p+1)}} \leq \frac{2^{p+1}}{1-r} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{(p+1)k}{k-(n+1)} =$$

$$= \frac{2^{p+1}(p+1)}{1-r} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j+1}{j} \leq \frac{3(p+1)2^{p+1} n}{1-r} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \frac{4(p+1)2^{p+1} n \ln n}{1-r} =$$

$$= \frac{4(p+1)2^{p+1} n(r) \ln n(r)}{1-r},$$

так що нерівність (7) доведено. Далі, як і вище,

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \leq \frac{2^{p+1}}{(1-r)^{p+2}} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{(1-r)^{p+1}}{1-(1-|a_k|)/(1-r)} \leq$$

$$\leq \frac{2^{p+1}}{(1-r)^{p+2}} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{(1-|a_n|)^{p+1}}{1-(1-|a_k|)/(1-|a_{n+1}|)} \leq$$

$$\leq \frac{2^{p+1}(1-|a_n|)^{p+1}}{(1-r)^{p+2}} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{k^{1/(p+1)}}{k^{1/(p+1)} - (n+1)^{1/(p+1)}} \leq$$

$$\leq \frac{4(p+1)2^{p+1}n(1-|a_n|)^{p+1}\ln n}{(1-r)^{p+2}} \leq \frac{K_2}{(1-r)^{p+2}},$$

тобто маємо (8).

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Якщо* $n(1-|a_n|)^{p+1} \searrow 0$, $n \to \infty$, *і* $|a_n| \leq |z| \leq |a_{n+1}|$, *то при* $|z| = r \to 1$

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \asymp \frac{1}{(1-r)^{p+2}} \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} (1-|a_k|)^{p+1}. \qquad (9)$$

Доведення. Оскільки $|a_k| - r < 1 - r$ і $k \geq 2(n+1)$, то

$$1-|a_k|r = (1-r)+r(1-|a_k|) = (1-r)\left(1+\frac{r(1-|a_k|)}{1-r}\right) \leq$$

$$\leq (1-r)\left(1+\frac{r(1-|a_k|)}{1-|a_{n+1}|}\right) = (1-r)\left(1+r\frac{k^{1/(p+1)}(1-|a_k|)}{(n+1)^{1/(p+1)}(1-|a_{n+1}|)}\left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/(p+1)}\right) \leq$$

$$\leq (1-r)\left(1+r\left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/(p+1)}\right) \leq (1-r)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{1/(p+1)}\right).$$

Тому

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \geq \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{(1-|a_k|)^{p+1}}{(1-r)^{p+2}\left(1+(1/2)^{1/(p+1)}\right)^{p+1}},$$

тобто отримуємо потрібну оцінку знизу. З іншого боку, $1-|a_k|r \geq |a_k|(1-r) \geq \geq |a_{2n+2}|(1-r)$ для всіх $k \geq 2(n+1)$ і

$$|a_k|-r \geq (1-r)\left(1-\frac{1-|a_k|}{1-|a_{n+1}|}\right) \geq (1-r)\left(1-\left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/(p+1)}\right) \geq$$

$$\geq (1-r)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/(p+1)}\right).$$

Тому

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{2^{p+1}(1-|a_k|)^{p+1}}{(1-r)^{p+2}|a_{2n+2}|^{p+1}\left(1-(1/2)^{1/(p+1)}\right)},$$

тобто отримуємо потрібну оцінку зверху.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Якщо* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, *то існує функція* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > > 1$, *така, що* $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ *при* $r \to 1$ *і виконується умова* 2 *леми* 1.

Доведення. Нехай $b_k = 1-(1-|a_k|)^{p+1}$, $n_b(r)$ — лічильна функція послідовності (b_k). Тоді $k(1-b_k) \searrow 0$, $k \to \infty$, $n(r) = n_b\left(1-(1-r)^{p+1}\right)$ і $n_b(r) = = n\left(1-(1-r)^{1/(p+1)}\right)$.

Покладемо $n_b^*(r) = 1 + \dfrac{r}{b_1}$ для $0 \le r \le b_1$ і $n_b^*(r) = n + 1 + \dfrac{r - b_n}{b_{n+1} - b_n}$ для $b_n \le \le r \le b_{n+1}$. Тоді функція $n_b^*(r)$ є неперервною, $n_b(r) + 1 \le n_b^*(r) \le n_b(r) + 2$ і $n_b^*(r)(1-r) \searrow 0$ при $r \to 1$, оскільки для $b_n < r < b_{n+1}$

$$\left(n_b^*(r)(1-r)\right)' = \frac{1 - 2r + b_n - (n+1)(b_{n+1} - b_n)}{b_{n+1} - b_n} \le \frac{(n+1)(1 - b_{n+1}) - n(1 - b_n)}{b_{n+1} - b_n} \le 0.$$

Покладемо $n^*(r) = n_b^*(r)\left(1 - (1-r)^{p+1}\right)$. Тоді функція $n^*(r)$ є неперервною,

$$n\left(1 - (1-r)^{1/(p+1)}\right) + 1 \le n^*\left(1 - (1-r)^{1/(p+1)}\right) \le n\left(1 - (1-r)^{1/(p+1)}\right) + 2$$

і $n^*\left(1 - (1-r)^{1/(p+1)}\right)(1-r) \searrow 0$ при $r \to 1$, звідки випливає, що $n(r) + 1 \le \le n^*(r) \le n(r) + 2$ і $n^*(r)(1-r)^{p+1} \searrow 0$ при $r \to 1$.

Покладемо

$$l(r) = \frac{n^*(r) \ln n^*(r)}{1-r}, \quad r_0 \le r < 1.$$

Тоді

$$l(r) \sim \frac{n(r) \ln n(r)}{1-r}$$

і $l(r) \nearrow +\infty$ при $r \to 1$. Тому $l\left(r - \dfrac{q}{l(r)}\right) \le l(r) \le l\left(r + \dfrac{q}{l(r)}\right)$ для $q > 0$. З іншого боку,

$$n^*\left(r + \frac{q}{l(r)}\right) \le \frac{n^*(r)(1-r)^{p+1}}{(1 - r - q/l(r))^{p+1}} = (1 + o(1))n^*(r), \qquad r \to 1,$$

тобто $l\left(r + \dfrac{q}{l(r)}\right) \le (1 + o(1))\, l(r)$, $r \to 1$. Аналогічно

$$n^*\left(r - \frac{q}{l(r)}\right) \ge \frac{n^*(r)(1-r)^{p+1}}{(1 - r + q/l(r))^{p+1}} = (1 + o(1))n^*(r), \qquad r \to 1,$$

і $l\left(r - \dfrac{q}{l(r)}\right) \ge (1 + o(1))\, l(r)$, $r \to 1$. Звідси випливає, що $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$.

Далі, як звичайно, з додатною сталою $\alpha = \alpha(p)$ маємо

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{n^{1/(p+1)}(1 - |a_n|)}{n^{1/(p+1)}} - \frac{(n+1)^{1/(p+1)}(1 - |a_{n+1}|)}{(n+1)^{1/(p+1)}} \ge$$

$$\ge (1 - |a_n|)\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/(p+1)}\right) \ge \frac{(1 - |a_n|)\alpha}{n} = \frac{1 - |a_n|}{n \ln n} \alpha \ln n \ge \frac{q}{l(|a_n|)}$$

для кожного $q > 0$ і всіх $n \ge n_0(q)$. Тому за лемою 2 виконується умова 2 леми 1.

3. Доведення теореми. Неважко перевірити, що

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - |a_k|^2\right)^{p+1}}{(z - a_k)(1 - \bar{a}_k z)^{p+1}}. \tag{10}$$

Припустимо спочатку, що виконується умова (2). З огляду на лему 7 нам потрібно лише показати, що виконується умова 1 леми 1.

З рівності (10), використовуючи леми 3–6, для $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|$, $z \notin G_q(\pi)$, отримуємо

$$\frac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} + \frac{\left(1-|a_n|^2\right)^{p+1}}{|z-a_n|(1-|a_n||z|)^{p+1}} +$$

$$+ \frac{\left(1-|a_{n+1}|^2\right)^{p+1}}{|z-a_{n+1}|(1-|a_{n+1}||z|)^{p+1}} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} +$$

$$+ \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-|a_k|^2\right)^{p+1}}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)^{p+1}} \le$$

$$\le (p+1)2^{p+1}\frac{n(r)\ln n(r)}{1-r} + 2^{p+2}P_1(q)l(|z|) +$$

$$+ 4(p+1)2^{p+1}\frac{n(r)\ln n(r)}{1-r} + \frac{K_3}{(1-r)^{p+2}}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}(1-|a_k|)^{p+1} \le P(q)l(|z|),$$

де K_3 і $P(q)$ — додатні сталі і, зрозуміло, $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ при $r \to 1$.

Отже, для всіх $|z| \ge |a_1|$ і $z \notin G_q(\pi)$ маємо $\dfrac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|} \le P(q)l(|z|)$. Для $|z| \le |a_1|$ і $z \notin G_q(\pi)$ оцінка $\dfrac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|} \le P(q)l(|z|)$ (можливо, з іншою сталою $P(q)$) доводиться з використанням принципу максимуму модуля і додатності функції l. Достатність умови (2) доведено.

Нехай тепер всі $a_k > 0$ і умова (2) не виконується. Тоді з (10) для $z = r \in [0, 1)$ маємо

$$\frac{|\pi'(r)|}{|\pi(r)|} = \left|\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\left(1-a_k^2\right)^{p+1}}{(r-a_k)(1-a_k r)^{p+1}} + \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-a_k^2\right)^{p+1}}{(r-a_k)(1-a_k r)^{p+1}}\right| \ge$$

$$\ge \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{\left(1-a_k^2\right)^{p+1}}{(r-a_k)(1-a_k r)^{p+1}} - \left|\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\left(1-a_k^2\right)^{p+1}}{(r-a_k)(1-a_k r)^{p+1}}\right|.$$

Використовуючи леми 3–5, отримуємо

$$\left|\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\left(1-a_k^2\right)^{p+1}}{(r-a_k)(1-a_k r)^{p+1}}\right| \le K_4 l(r), \qquad l(r) \asymp \frac{n(r)\ln n(r)}{1-r}, \qquad r \to 1,$$

і оскільки умова (2) не виконується, то за лемою 6 не виконується і умова 1 леми 1 для додатних значень z. За лемою 1 π є функцією необмеженого l-індексу з вказаною функцією l.

Теорему 1 доведено.

4. Зауваження та доповнення. Умову (2) задовольняє досить широкий клас послідовностей роду $p \ge 1$. Сюди входить послідовність $a_k = 1 - k^{-\alpha}$, $1/(p+1) < \alpha \le 1/p$, для якої

$$n(r) \asymp (1-r)^{-1/\alpha}, \qquad n(r)\ln n(r) \asymp (1-r)^{-1/\alpha}\ln\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

$$\sum_{k=2n(r)}^{\infty} (1-a_k)^{p+1} \asymp n(r)^{1-\alpha(p+1)} \asymp (1-r)^{p+1-1/\alpha}$$

при $r \to 1$ і, отже, умова (2) виконується. Проте якщо $a_k = 1 - \left(k \ln k \ln^2 \ln k\right)^{-1/(p+1)}$, то

$$n(r) \ln n(r) \ln^2 \ln n(r) \asymp (1-r)^{-(p+1)}, \qquad n(r) \ln n(r) \asymp \frac{(1-r)^{-(p+1)}}{\ln^2 \ln n(r)},$$

$$\sum_{k=2n(r)}^{\infty} (1-a_k)^{p+1} \asymp \frac{1}{\ln \ln n(r)}$$

при $r \to 1$ і умова (2) не виконується.

Переходячи до інтеграла Стільтьєса та інтегруючи частинами, можна показати, що умова (2) рівносильна умові

$$\frac{1}{(1-r)^{p+2}} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt = O\left(\frac{n(r) \ln n(r)}{1-r}\right), \qquad r \to 1.$$

Вважаючи, що остання умова не виконується, припустимо, що

$$\frac{n(r) \ln n(r)}{1-r} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p+2}} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt\right), \qquad r \to 1. \tag{11}$$

Покладемо

$$l(r) = (1-r)^{-(p+2)} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt.$$

Легко перевірити, що ця функція є зростаючою, $(1-r)l(r) \to +\infty$, $r \to 1$, а звідси отримати належність $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$. Тому, використовуючи леми 1–6, як і при доведенні теореми 1, отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, *і виконується умова* (11). *Тоді добуток* (1) *є функцією обмеженого l-індексу з*

$$l(r) = (1-r)^{-(p+2)} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt.$$

З доведення теореми 1 видно, що правильним є таке твердження.

Твердження 3. *Нехай* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, *і* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$. *Якщо*

$$\frac{n(r) \ln n(r)}{1-r} = O(l(r))$$

і

$$\frac{1}{(1-r)^{p+2}} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt = O(l(r))$$

при $r \to 1$, *то добуток* (1) *є функцією обмеженого l-індексу.*

Припустимо, що

$$\frac{n(r) \ln n(r)}{1-r} = O\left((1-r)^{-(p+1)}\right)$$

при $r \to 1$. Тоді

$$n(r) \le \frac{K}{(1-r)^p \ln n(r)}$$

і

$$\frac{1}{(1-r)^{p+2}} \int_r^1 n(t)(1-t)^p \, dt \le \frac{K}{(1-r)^{p+2}} \int_r^\infty \frac{1}{\ln n(t)} dt \le \frac{K(1-r)}{(1-r)^{p+2} \ln n(r)} =$$

$$= o\left(\frac{1}{(1-r)^{p+1}}\right), \quad r \to 1.$$

Тому з твердження 3 випливає таке твердження.

Твердження 4. *Якщо* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, *і* $n(r)\ln n(r) = O\left((1-r)^{-p}\right)$ *при* $r \to 1$, *то добуток* (1) *є функцією обмеженого l-індексу з* $l(r) = \beta(1-r)^{-(p+1)}$, $\beta > 1$.

Нарешті, використовуючи леми 1–6, можна довести і таке твердження.

Твердження 5. *Якщо* $k(1-|a_k|)^{p+1} \searrow 0$, $k \to \infty$, *то добуток* (1) *є функцією обмеженого l-індексу з* $l(r) = \beta(1-r)^{-(p+2)}$, $\beta > 1$.

1. *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 2. – С. 205–208.
2. *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге // Лит. мат. сб. – 1961. – **1**, № 1–2. – С. 159–180.
3. *Tsuji M.* Canonical products for a meromorphic function in a unit disk // J. Math. Soc. Jap. – 1956. – **8**, № 1. – P. 7–21.
4. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publ., 1999. – 141 p.

Одержано 08.11.2002