УДК 517.4

В. Г. Самойленко (Херсон. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

For systems in the magnetic field, we investigate a form-sum of infinite-dimensional operator of energy perturbed by a potential. We also study the change of spectrum of energy operator under its perturbation by a potential.

Досліджено форм-суму збуреного потенціалом нескінченновимірного оператора енергії для систем у магнітному полі. Крім того, досліджено зміну спектра оператора енергії при збуренні його потенціалом.

Пусть H — действительное гильбертово пространство. Рассмотрим в H самосопряженный, строго положительный оператор A. При этом существует ядерное пространство $\Phi \subset H$ такое, что Φ — область существенной самосопряженности A и $A \in L(\Phi, \Phi)$. Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — цепочка, в которой двойственность устанавливается скалярным произведением в H. На Φ' вводится гауссова мера, определенная своим характеристическим функционалом

$$\int_{\Phi'} e^{i(\xi,\varphi)} H d\mu_H(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|\varphi\|_H^2\right), \qquad \varphi \in \Phi.$$

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Phi', d\mu_H)$ на множестве $C_b^2(\Phi')$ дважды непрерывно дифференцируемых ограниченных вместе с производными функций оператор энергии для бесконечной системы в магнитном поле (аналог n-мерного оператора, см. [1]), заданный выражением

$$N_{A,a}u = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}_{H_c}(Au''(\xi)) - 2(Au'(\xi), \xi)_{H_c}\right) + i(u'(\xi), Aa(\xi))_H +$$

$$+ \frac{1}{2}\|A^{1/2}a(\xi)\|_H^2 u(\xi) + \frac{1}{2} i\gamma_{A,a}(\xi) u(\xi), \qquad u \in C_b^2(\Phi'),$$

$$\gamma_{A,a}(\xi) = \mathrm{div}_H(Aa(\xi)) - 2(Aa(\xi), \xi)_H, \qquad \xi \in \Phi'.$$

Здесь $u'(\xi)$ и $u''(\xi)$, $\xi \in \Phi'$, — производные $u(\xi)$, $u''(\xi) \in L(H_C, H_C)$ (H_C — комплексификация H) — оператор, соответствующий ядру $u''(\xi) \in \Phi_C \otimes \Phi_C$. Будем предполагать, что $a(\xi) \in C_b^1(\Phi', \Phi)$ ($C_b^1(\Phi', \Phi)$ — множество дифференцируемых и ограниченных вместе с производными функций, действующих из Φ' в Φ) и

$$\|a\|_{W_{A,2}^1} = \left(\int_{\Phi'} \left(\|a\|_H^2 + \|Aa\|_H^2 + \|Aa'\|_H^2\right) d\mu_H\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\|A^{1/2}a(\xi)\|_H \in L_4(\Phi', d\mu_H).$$

При этих условиях выражение $N_{A,a}$ корректно задано на $C_b^2(\Phi')$, а соответствующий оператор $N_{A,a}$ существенно самосопряжен в $L_2(\Phi', d\mu_H)$ и ассоциирован с формой (см. [2])

$$B_{A,a}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\Phi'}\left(A(u'-iau), \overline{v'-iav}\right)_{H_c} d\mu_H =$$

$$= (N_{A,a}u, v)_{L_2(\Phi', d\mu_H)}, \qquad u, v \in C_b^2(\Phi').$$

Кроме того, нам понадобится оператор вторичного квантования N_A, заданный на $C_b^2(\Phi')$ дифференциальным выражением

$$N_A u = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}_{H_c}(Au''(\xi)) - 2(Au'(\xi), \xi)_{H_c}\right), \quad u \in C_b^2(\Phi').$$

Более подробное изложение описанных фактов можно найти в [2, 3] (там же см. и библиографию).

Пусть $T \geq 0$ — оператор Гильберта – Шмидта в H такой, что $\|T\| \leq 1$; $\Phi \subset \subset D_{T^{-1}}$; множество $T^{-1}\Phi$ плотно в H и оператор T^{-1} действует из Φ в H непрерывно. Согласно [4], по $T^{-1} \geq 1$ можно построить цепочку

$$\Phi \subset H_+ \subset H \subset H_- \subset \Phi',$$

$$D: H_+ \to H, \quad J: H \to H_+, \quad \tilde{D}: H \to H_-, \quad \tilde{J}: H_- \to H,$$

где $D = T^{-1}$, $\tilde{D} = (T^{-1})^+$, а сопряжение берется в двойственности, заданной скалярным произведением на H. При этом, согласно следствию из теоремы Минлоса [5], H_- является множеством полной меры μ_H.

Теорема 1. *Пусть* $V(\xi) = \overline{V(\xi)} \in L_2(\Phi', d\mu_H)$ *и на множестве полной меры* H_- *выполнена оценка*

$$|V(\xi)| \leq c\|TT^+\xi\|_H^2 + d, \qquad c, d > 0.$$

Если A *такой, что*

$$(Ae, e)_H \geq \alpha(T^4 e, e)_H, \qquad (e \in \Phi), \quad \alpha > c,$$

то оператор умножения на $V(\xi)$ *ограничен относительно* $N_{A,a}$ *в смысле форм с* $N_{A,a}$*-гранью, меньшей* 1.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из собственных векторов оператора T $\left(Te_i = \lambda_i e_i,\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 < \infty\right)$. Тогда (см., например, [4]) пространства $L_2(H_-, d\mu_H)$, $L_2(l_2(p^{-1}), dg(\xi))$, $L_2(R^\infty, dg(\xi))$ изометричны; здесь $l_2(p^{-1})$ — пространство последовательностей $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2 p_1^{-1} < \infty\left(p_i = \lambda_i^{-2},\ \sum_{i=1}^{\infty}p_i^{-1} < \infty\right), \qquad dg(\xi) = \bigotimes_{i=1}^{\infty}\frac{-\xi_i^2}{\sqrt{\pi}}d\xi_i.$$

Аналогично тому, как это сделано в [6], несложно показать, что

$$\|\xi_i^2\varphi\|_{L_2(R^\infty, dg)}^2 \leq \left\|\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2} + 2\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} + 1\right)\varphi\right\|_{L_2(R^\infty, dg)}^2 +$$

$$+ 2\|\varphi\|_{L_2(R^\infty, dg)}^2, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

для $\varphi \in C_{b,\text{ц}}^\infty(R^\infty)$ ($C_{b,\text{ц}}^\infty(R^\infty)$ — бесконечно диференцируемые цилиндрические функции, ограниченные вместе со своими производными). Тогда из доказательства теоремы X.18 [1] для произвольного $\mu > 0$ имеет место оценка

$$(\xi_i^2\varphi, \varphi)^2_{L_2(R^\infty, dg)} \le \left(1+\frac{2}{\mu}\right)\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i^2} + 2\xi_i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} + \varphi, \varphi\right)^2_{L_2(R^\infty, dg)} +$$

$$+ (\mu+2)(\varphi, \varphi)^2_{L_2(R^\infty, dg)}, \quad \varphi \in C^\infty_{b,\text{ц}}(R^\infty).$$

Интегрируя по частям и полагая μ таким, чтобы константа $1 + 2/\mu = \nu$ удовлетворяла неравенству $c\nu/\alpha < 1$ (это возможно, так как $c/\alpha < 1$), получаем (с учетом изометрии пространств $L_2(R^\infty, dg)$ и $L_2(l_2(p^{-1}), dg)$):

$$(\xi_i^2\varphi, \varphi)_{L_2(l_2(p^{-1}), dg)} \le \nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\right)_{L_2(l_2(p^{-1}), dg)} +$$

$$+ \alpha(\nu)(\varphi, \varphi)_{L_2(l_2(p^{-1}), dg)}$$

для $\varphi \in C^\infty_{b,\text{ц}}(R^\infty)$. С помощью предельного перехода последнее неравенство несложно распространить на функции из $C^2_b(l_2(p^{-1}))$. Вследствие изометрии H и l_2 и определения оператора T последняя оценка принимает вид

$$\left((\xi, Te_i)^2_{l_2}\varphi, \varphi\right)_{L_2(H_-, d\mu_H)} \le \frac{\nu}{p_i}((\varphi', e_i)_H, (\varphi', e_i)_H)_{L_2(H_-, d\mu_H)} +$$

$$+ \alpha(\nu)(\varphi, \varphi)_{L_2(H_-, d\mu_H)}, \quad \varphi \in C^2_b(H_-).$$

Выполняя деление на p_i, учитывая $Te_i = p_i^{-1/2}e_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left(\|TT^+\xi\|^2_H\,\varphi, \varphi\right)_{L_2(H_-, d\mu_H)} \le \nu\int\limits_{H_-}(T^4\varphi', \varphi')_H\, d\mu_H(\xi) +$$

$$+ \alpha(\nu)|T|^2\|\varphi\|^2_{L_2(H_-, d\mu_H)}$$

или

$$(|V(\xi)|\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} \le \frac{c\nu}{\alpha}(N_A\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} +$$

$$+ \left(\alpha(\nu)c|T|^2 + d\right)\|\varphi\|^2_{L_2(\Phi', d\mu_H)}, \quad \varphi \in C^2_b(\Phi').$$

Благодаря существенной самосопряженности N_A на $C^2_b(\Phi')$ [3], с помощью предельного перехода можно распространить полученное неравенство на любое φ из области определения формы, заданной оператором N_A. Согласно теореме X. 18 [1], из бесконечной малости $N_{A,a} - N_A$ по отношению к N_A [2] в операторном смысле следует соответствующая бесконечная малость в смысле форм.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$(N_A\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} \le (N_{A,a}\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} + \left|\left((N_{A,a} - N_A)\varphi, \varphi\right)_{L_2(\Phi', d\mu_H)}\right| \le$$

$$\le (N_{A,a}\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} + \varepsilon(N_A\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} + \beta(\varepsilon)\|\varphi\|^2_{L_2(\Phi', d\mu_H)},$$

или

$$(N_A\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}(N_{A,a}\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} +$$

$$+ \frac{\beta(\varepsilon)}{1-\varepsilon}\|\varphi\|^2_{L_2(\Phi', d\mu_H)}, \qquad \varphi \in C_b^2(\Phi').$$

Продолжая предыдущую оценку, с помощью последнего неравенства получаем

$$(|V(\xi)|\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} \leq \frac{c\nu}{\alpha}\frac{1}{1-\varepsilon}(N_{A,a}\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} +$$

$$+ \gamma(\varepsilon, \nu)\|\varphi\|^2_{L_2(\Phi', d\mu_H)},$$

где $\frac{c\nu}{\alpha}\frac{1}{1-\varepsilon} < 1$ при соответствующем выборе $\varepsilon > 0$, так как $\frac{c\nu}{\alpha} < 1$, что и доказывает теорему.

Следствие. *Пусть $V(\xi) = \overline{V(\xi)} \in L_2(\Phi', d\mu_H)$ и на множестве полной меры H_- выполнена оценка*

$$V(\xi) \geq -c\|TT^+\xi\|^2_H - d, \qquad c, d > 0.$$

Если A такой, что

$$(Ae, e)_H \geq \alpha(T^4 e, e)_H, \qquad e \in \Phi, \quad \alpha > c,$$

то оператор $N_{A,a} + V(\xi)$, определенный как форм-сумма операторов $N_{A,a}$ и $V(\xi)$, полуограничен снизу и самосопряжен.

Доказательство вытекает из КЛМН-теоремы (см. теорему 8.4 гл. XIV [7]) и подчиненности $V_-(\xi) = \min(0, V(\xi))$ оператору $N_{A,a}$ в смысле форм с гранью, меньшей 1 (в силу выполнения условия для V_- теоремы 1).

Полученный результат примыкает к большому числу результатов относительно самосопряженности операторов энергии для бесконечных систем.

Перейдем к рассмотрению структуры спектра оператора $\overline{N_{A,a} + V}$ ($\overline{B}$ — замыкание оператора B). Пусть сначала A такой, что A^{-1} — компактный оператор в H, тогда $\sigma(\overline{N}_{A,a}) = \sigma_{\text{disc}}(\overline{N}_{A,a})$ (где $\sigma(B)$ и $\sigma_{\text{disc}}(B)$ — соответственно спектр и дискретный спектр оператора B; определения см., например, в [8]). Поясним последнее равенство. Оператор $N(A)$ имеет компактный обратный оператор (что следует из последовательного применения теорем XIII. 64 [9] и 4 [10]), и благодаря бесконечной малости $N_{A,a} - N_A$ относительно N_A и теореме XIII. 68 [9] оператор $N_{A,a}$ также имеет компактный обратный оператор, что поясняет изложенное выше.

Теорема 2. *Пусть $V(\xi) = \overline{V(\xi)} \in L_1(\Phi', d\mu_H)$ и A удовлетворяют оценкам следствия, а A^{-1} — компактный оператор. Тогда самосопряженный оператор, построенный по форме*

$$((N_{A,a} + V)u, u)_{L_2(\Phi', d\mu_H)}, \qquad u \in C_b^2(\Phi'),$$

имеет чисто дискретный спектр, причем в отрицательной части оси находится лишь конечное число точек спектра.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы XIII. 68 [9], так как $\sigma(\overline{N_{A,a} + V_+}) = \sigma_{\text{disc}}(\overline{N_{A,a} + V_+})$, а оператор умножения на V_- ограничен относительно $N_{A,a}+V_+$ в смысле форм с гранью, меньшей 1 (это несложно показать аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1). Поскольку $\sigma_{\text{ess}}(\overline{N_{A,a}+V_+}) = \varnothing$ ($\sigma_{\text{ess}}(A)$ — существенный спектр оператора A; определение см. в [8]) и оператор, построенный по форме, полуограничен снизу (в силу подчиненности V_- относительно $N_{A,a}+V_+$), в отрицательной части оси будет не более конечного числа точек спектра.

Теорема 2 является обобщением соответствующего утверждения для оператора вторичного квантования [11] и демонстрирует определенную устойчивость дискретного спектра $N_{A,a}$ относительно возмущений потенциалом из достаточно широкого класса функций.

Две следующие теоремы демонстрируют свойства, имеющие место лишь в ситуации с бесконечной системой. Подобная ситуация имеет место и для оператора вторичного квантования (см. [10, 11]).

Пусть теперь A такой, что A^{-1} не является компактным, тогда $\sigma_{\text{ess}}(N_{A,a}) \neq \neq \varnothing$.

Теорема 3. *Пусть A^{-1} не является компактным и $0 \le V(\xi) \in L_p(\Phi', d\mu_H)$, $p \ge 2$, удовлетворяет оценке $V(\xi) \ge \beta > 0$ для любого ξ такого, что $\|\xi\|_{H_-} \le R$ ($R > 0$, H_- — множество полной меры). Если для любого α оператор $N_{A,a} - \alpha V$ полуограничен снизу, то существует такое $\alpha > 0$, что $\sigma_{\text{ess}}(\overline{N}_{A,a}) \neq \sigma_{\text{ess}}(\overline{N_{A,a} - \alpha V})$.*

Доказательство. Если $V(\xi)$ удовлетворяет условию теоремы, то существует последовательность функций $\varphi_i(\xi) \in L_2(\Phi', d\mu_H)$ ($\varphi_i(\xi) = (\xi, e_i)_H$, $e_i \in \Phi$ и попарно ортогональны в H), ограниченных равномерно в норме

$$\|\varphi_i\|^2_{N_{A,a}} = (N_{A,a}\varphi_i, \varphi_i)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} + \|\varphi_i\|^2_{L_2(\Phi', d\mu_H)} \le c,$$

не имеющая предела в $L_2(\Phi', \chi_R(\|\xi\|_{H_-}) d\mu_H)$ (вследствие того, что функции, по определению, зависят от разных переменных), где $\chi_R(t) = 1$ при $0 \le t \le R$ и $\chi_R(t) = 0$ при $t > R$. Пусть $\sigma_{\text{ess}}(\overline{N}_{A,a}) = \sigma_{\text{ess}}(\overline{N_{A,a} - \alpha V})$ для любого $\alpha > 0$, тогда из ограниченности последовательности функций в норме $\|\cdot\|_{N_{A,a}}$ следует ее сходимость в норме, заданной формулой $(V\varphi, \varphi)_{L_2(\Phi', d\mu_H)}$[12]. Поскольку $V(\xi) \ge \beta > 0$ для ξ таких, что $\|\xi\|_{H_-} \le R$, то $\{\varphi_i\}$ сходится в $L_2(\Phi', \chi_R(\|\xi\|_{H_-}) d\mu_H)$, а это противоречит изложенному выше. Значит, наше предположение неверно и существует α, при котором равенство существенных спектров нарушается, что и доказывает теорему.

Смысл утверждения теоремы сводится к тому, что даже незначительное возмущение потенциалом может изменить существенный спектр оператора энергии для системы из бесконечного числа частиц в магнитном поле. При этом следующая теорема демонстрирует невозможность уничтожения существенного спектра оператора энергии при возмущении его потенциалом даже с достаточно слабыми ограничениями на скорость его роста.

Теорема 4. *Пусть A^{-1} не является компактным, $V(\xi) = \overline{V(\xi)} \in L_1(\Phi', d\mu_H)$ и форма $((N_{A,a} + V)u, u)_{L_2(\Phi', d\mu_H)} (u \in C_b^2(\Phi'))$ полуограничена снизу. Если C — самосопряженный оператор, соответствующий форме, то $\sigma_{\text{ess}}(C) \neq \neq \varnothing$.*

Доказательство теоремы следует из теоремы XIII. 64 [9], теоремы 1 [11] и подчиненности оператора $N_{A,a} - N_A$ по отношению к N_A.

Полученные результаты являются обобщением теорем, анонсированных в [10, 11], и примыкают к большому числу работ, библиографию которых можно найти в [1, 9 – 12].

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
2. *Цикаленко Т. В.* Операторы Дирихле и связанные с ними бесконечномерные дифференциальные уравнения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1986. – 150 с.
3. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
5. *Рид М.* Функциональный анализ и теория вероятностей // Конструктивная теория поля. – М.: Мир, 1977. – С. 13–47.
6. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 3–56.
7. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 357 с.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1982. – Т. 4. – 428 с.
10. *Самойленко В. Г.* Об ограниченности оператора умножения относительно оператора вторичного квантования // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, № 6. – С. 1316–1320.
11. *Самойленко В. Г.* Об изменении спектра оператора вторичного квантования при возмущении его потенциалом // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 396–397.
12. *Бирман М. Ш.* О спектре сингулярных граничных задач // Мат. сб. – 1961. – **55**, № 2. – С. 125–174.

Получено 02.04.2002,
после доработки — 01.09.2003