УДК 519.6

Н. Г. Вовкодав, Л. Н. Шлепаков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛУМАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ В СХЕМЕ ФАЗОВОГО УКРУПНЕНИЯ

By using methods of the theory of semi-Markov process, we analyze the problem of detecting signals in a multichannel system. We construct the optimal strategy of displacement of a search device in the multichannel system and obtain the corresponding estimate of search efficiency.

Методами теорії напівмарковських процесів проведено аналіз задачі пошуку сигналів у багатоканальній системі. Побудовано оптимальну стратегію переміщення пошукового пристрою по каналах та отримано відповідну оцінку ефективності пошуку.

Проблемы оптимизации для ряда стохастических систем, состоящих из нескольких элементов, в частности некоторых систем поиска, надежности и массового обслуживания, сводятся к задачам оптимизации параметров, характеризующих случайный закон функционирования одного из элементов, по отношению к определенному коэффициенту эффективности системы. Количество возможных состояний таких систем, как правило, велико, что сильно усложняет их анализ [1]. Для решения этих проблем в полумарковском случае предлагается подход [2, 3], связанный с многократным использованием метода фазового укрупнения [4, 5]. Проиллюстрируем его задачей поиска сигналов в многоканальной системе связи.

1. Постановка задачи. Пусть имеется $N^\varepsilon = N/\varepsilon$ каналов связи, по которым независимо перемещаются сигналы и одно поисковое устройство.

Перемещение сигналов по каждому i-му каналу описывается альтернирующим процессом восстановления $S_i(t)$, причем $S_i(t)=1$, если в момент t в i-м канале есть сигнал, и $S_i(t)=0$, если сигнал отсутствует. Каналы связи разбиты на M групп однотипных в смысле равенства вероятностных характеристик перемещающихся по ним сигналов. Множество E_i номеров каналов i-го типа содержит $N_i^\varepsilon = N_i/\varepsilon$ элементов. Время пребывания сигнала в любом из каналов i-го типа подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda_i^{(1)}$, а время его отсутствия — экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda_i^{(0)}$.

Перемещение поискового устройства по каналам описывается полумарковским процессом $\xi^\varepsilon(t)$ с дискретным множеством состояний $E=\{1, 2, \ldots, N^\varepsilon\}$, полумарковской матрицей $Q(t) = \{Q(t); i, j \in E\}$ и начальным состоянием $\xi^\varepsilon(0)=e_0$. При этом $\xi^\varepsilon(t)=j\in E$, если поисковое устройство находится в j-м канале связи.

Множество состояний E в соответствии с введенным выше понятием типов каналов разбито на M непересекающихся классов $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_M$ таким образом, что элементы полумарковской матрицы одинаковы для различных представителей каждого из подклассов и представимы в виде

$$\begin{gathered} Q(t, e, E_i) = P(i)G^\varepsilon(t), \\ G^\varepsilon(t) = G(t/\varepsilon), \\ e\in E, \quad i=\overline{1,M}. \end{gathered} \tag{1}$$

Будем предполагать, что функция распределения $G(t)$ такова, что для $m = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt$ выполняется $0<m<\infty$.

Следовательно, поисковое устройство пребывает в каждом канале случайное время с функцией распределения $G(t/\varepsilon)$ и математическим ожиданием εm, а затем перемещается в любой из каналов i-го типа с вероятностью $\varepsilon P(i)/N_i$, $i = \overline{1, M}$.

Поисковое устройство перемещается по каналам с целью обнаружения сигналов. Сигнал считается обнаруженным в j-м канале в момент первого попадания поискового устройства в этот канал на периоде пребывания в нем сигнала.

Формализуем понятие обнаружения следующим образом.

Пусть ξ_n — вложенная в $\xi(t)$ цепь Маркова, τ_n — моменты восстановления процесса $\xi(t)$.

Определим для каждого j, $j \in E$, случайную последовательность $j(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, моментов попадания поискового устройства в j-й канал следующим образом:

$$j(k) = \min\left\{n: \sum_{m=0}^{n} \chi_j(\xi_m) = k\right\}, \qquad \chi_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Введем многомерные случайные последовательности

$$Z_{j(k)} = \left(\zeta_{j(k)}, S_j(\tau_{j(k)}), u_j(\tau_{j(k)})\right),$$

где

$$\zeta_{j(k)} = \tau_{j(k)} - \tau_{j(k-1)}, \qquad (2)$$

$$\tau_{j(0)} = -\infty,$$

$$u_j(t) = t - \sup\{x \le t: S_j(x) \ne S_j(t)\} \text{ — недоскок процесса } S_j(t).$$

Зададим на $(R_+^1 \times \{0, 1\} \times R_+^1)$ функции $b_j(Z)$, $Z = (\tau, s, u)$, $j = \overline{1, N}$,

$$b_j(\tau, s, u) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 1, \ \tau > u; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $b_j(Z_{j(k)}) = 1$, если в момент k-го попадания поискового устройства в j-й канал был обнаружен сигнал, и $b_j(Z_{j(k)}) = 0$ — в противном случае.

Положим

$$K_i^\varepsilon = \lim_{t\to\infty} \mathrm{M} \sum_{j \in E_j} \sum_{k:\, t < \tau_{j(k)} < t + T^\varepsilon} b_j(Z_{j(k)}), \qquad i = \overline{1, M},$$

$$T^\varepsilon = L\varepsilon m, \quad L \text{ — заданное целое число,}$$

где М — знак математического ожидания, если такой предел существует и не зависит от начальных условий $\xi(0)$, $S_i(0)$, $i = \overline{1, N}$.

Под коэффициентом эффективности $K^\varepsilon = K^\varepsilon(P)$ будем понимать $K^\varepsilon = \sum_{i=1}^{M} K_i^\varepsilon$.

Таким образом, коэффициент эффективности функционирования системы поиска — это математическое ожидание числа сигналов, обнаруженных поисковым устройством за время $T^\varepsilon = L\varepsilon m$ во всех каналах в стационарном режиме поиска.

Требуется максимизировать коэффициент эффективности $K^\varepsilon(P)$ на классе векторов $P = (P(1), P(2), \ldots, P(M))$, удовлетворяющих условию $\sum_{1}^{M} P(i) = 1$ при фиксированных $\varepsilon, M, N_i, G(t), \lambda_i^{(0)}, \lambda_i^{(1)}$, $i = \overline{1, M}$.

Решение задачи разбито на несколько этапов. В п. 2 найдена зависимость коэффициента эффективности K^{ε} от функций распределения F_i^{ε} случайных величин $\zeta_{j(k)}$, $j \in E_i$, $i = \overline{1, M}$. В п. 3 на основе соответствующей теоремы укрупнения доказано, что $\lim_{\varepsilon \to 0} F_i^{\varepsilon} = e^{-\Lambda_i x}$, $\Lambda_i \geq 0$. При этом существует $\lim_{\varepsilon \to 0} K^{\varepsilon} = \overline{K}$, где $\overline{K} = \sum_{i=1}^{M} \overline{K_i}(\Lambda_i)$, функции $\overline{K_i}(\Lambda_i)$ вычислены в явном виде. В п. 4 задача оптимизации вероятностей перехода $P = (P(1), P(2), \ldots$ $\ldots, P(M))$ поискового устройства в условиях малого параметра ε сводится к задаче математического программирования с целевой функцией $\overline{K}$.

2. Построение полумарковской модели. Зафиксируем произвольное j, $j \in$ $\in E_i$. Опишем процесс поиска сигналов в j-м канале двухкомпонентной случайной последовательностью $(X_{j(k)}, \zeta_{j(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, со значениями из множества $\{0, 1, 2\} \times R_+^1$.

Случайные величины $X_{j(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, вводятся следующим образом:

$X_{j(k)} = 1$, если $b_j(Z_{j(k)}) = 1$, т. е. при k-м попадании поискового устройства в j-й канал обнаружен сигнал;

$X_{j(k)} = 2$, если $b_j(Z_{j(k)}) = 0$, $s = 1$, т. е. при k-м попадании поискового устройства в j-й канал в этом канале находился сигнал, но не был обнаружен;

$X_{j(k)} = 0$, если $b_j(Z_{j(k)}) = 0$, $s = 0$, т. е. при k-м попадании поискового устройства в j-й канал в этом канале не было сигнала.

Случайные величины $\zeta_{j(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, определены соотношением (2).

Пусть $F_i^{\varepsilon}(x) = \mathrm{P}\{\zeta_{j(k)} \leq x\}$, $j \in E_i$. Функция распределения $F_i^{\varepsilon}(x)$ определяется решением соответствующего уравнения марковского восстановления [4] (п. 6.4).

Лемма 1. *Двухкомпонентная случайная последовательность* $(X_{j(k)}, \zeta_{j(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, *со значениями в* $\{0, 1, 2\} \times R_+^1$ *является процессом марковского восстановления с полумарковским ядром* Q_i:

$$Q_i(t, l, s) = g_i(t, l, s) \quad \text{при } l = 0, \quad s = 0, 1; \qquad l = 1, 2, \quad s = 0,$$

$$Q_i(t, 0, 2) = 0,$$

$$Q_i(t, l, 1) = g_i(t, l, 1) - d_i \quad \text{при } l = 1, 2,$$

$$Q_i(t, l, 2) = d_i \quad \text{при } l = 1, 2,$$

где

$$g_i(t, l, s) = \int_0^t \pi_i(\tau, \bar{l}, \bar{s})\, dF_i^{\varepsilon}(\tau), \qquad l, s = 0, 1, 2, \tag{3}$$

$$d_i(t) = \int_0^t e^{-\lambda_i^{(1)}\tau} dF_i^{\varepsilon}(\tau), \tag{4}$$

$$\bar{l} = \begin{cases} l & \text{при} \quad l = 0, 1; \\ 1 & \text{при} \quad l = 2, \end{cases}$$

$$\pi_i(t, 0, 0) = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i} + \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t},$$

$$\pi_i(t,\,0,\,1) = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t},$$

$$\pi_i(t,\,1,\,0) = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t}, \tag{5}$$

$$\pi_i(t,\,1,\,1) = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i} + \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t},$$

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i^{(1)}.$$

Доказательство. Пусть $j \in E_i$,

$$\pi_i(t,\,l,\,s) = \mathrm{P}\{S_j(t) = s / S_j(0) = l\}, \qquad l, s = 0, 1, \quad t \geq 0,$$

$$r_i(t) = \mathrm{P}\{S_j(\tau) = 1,\ \tau \leq t / S_j(0) = 1\}, \qquad t \geq 0.$$

Для альтернирующего процесса восстановления эти вероятности известны [6] и удовлетворяют соотношениям (5) и

$$r_i(t) = e^{-\lambda_i^{(1)} t}. \tag{6}$$

Поскольку перемещения сигналов и поискового устройства независимы, имеем

$$\mathrm{P}\left\{X_{j(k+1)} = 2,\ \zeta_{j(k+1)} \in (t, t+dt) / X_{j(k)} = 1\right\} = r_i(t)\, dF_i^{\varepsilon}(t),$$

$$\mathrm{P}\left\{X_{j(k+1)} = 1,\ \zeta_{j(k+1)} \in (t, t+dt) / X_{j(k)} = 1\right\} = \left(\pi_i(t,1,1) - r_i(t)\right) dF_i^{\varepsilon}(t).$$

Аналогично находятся соответствующие вероятности для всевозможных комбинаций значений $X_{j(k+1)}$, $X_{j(k)}$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$K_i^{\varepsilon} = \frac{LN_i m(1-d_i)}{a_i(1+\nu_i)}, \qquad i = \overline{1, M}, \tag{7}$$

где

$$\nu_i = g_i(\infty,\,1,\,0) / g_i(\infty,\,0,\,1),$$

$$d_i = d_i(\infty), \tag{8}$$

$$a_i = \int_0^{\infty} (1 - F_i^{\varepsilon}(t))\, dt.$$

Доказательство. Пусть μ_i — стационарное распределение цепи Маркова $X_{j(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которого в силу леммы 1 справедлива система уравнений

$$\mu_i(0) = \mu_i(0) g_i(0,\,0) + (\mu_i(1) + \mu_i(2))\, g_i(1,\,0),$$

$$\mu_i(1) = \mu_i(0) g_i(0,\,1) + (\mu_i(1) + \mu_i(2))\, g_i((1,\,1) - d_i),$$

$$\mu_i(2) = (\mu_i(1) + \mu_i(2))\, d_i,$$

$$\mu_i(0) + \mu_i(1) + \mu_i(2) = 1,$$

где

$$g_i(l,\,s) = g_i(\infty,\,l,\,s), \quad l, s = 0, 1, 2. \tag{9}$$

Ее единственное решение

$$\mu_i(0) = Cg_i(1,0)/g_i(0,1),$$
$$\mu_i(1) = C(1-d_i),$$
$$\mu_i(2) = Cd_i,$$

где

$$1/C = 1 + g_i(1,0)/g_i(0,1).$$

В силу определения $X_{j(k)}$

$$b_j(Z_{j(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{j(k)} = 1; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку цепь Маркова $X_{j(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, имеет единственное стационарное распределение, то существует [7] (п. 7.1.1)

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{M} \sum_{k:\, t<\tau_{j(k)}<t+T^{\varepsilon}} b_j(Z_{j(k)}) = T^{\varepsilon}\mu_i(1)/a_i,$$

где $a_i/\mu_i(1)$ — среднее время между двумя последовательными обнаружениями сигнала в j-м канале i-го типа.

Отсюда в силу определения K_i^{ε} с учетом того, что множество E_i содержит N_i/ε элементов, $T^{\varepsilon} = L\varepsilon m$, вытекает утверждение леммы.

3. Предельные соотношения. Найдем предельное распределение случайной величины $\zeta_{j(k)} = \zeta_j^{\varepsilon}$, где $j \in E_i$.

Пусть ρ — стационарное распределение цепи Маркова ξ_n. Очевидно, в силу (1)

$$\rho(E_i) = P(i), \qquad i = \overline{1, M}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Имеет место слабая сходимость распределений*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_i^{\varepsilon} = e^{-\Lambda_i x},$$

где

$$\Lambda_i = \rho(E_i)/m. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный обрывающийся полумарковский процесс $\eta_i^{\varepsilon}(t)$ с множеством состояний $\{1, 2, \ldots, M\}$, начальным состоянием $\eta_i^{\varepsilon}(t) = i$ и вероятностью перехода вложенной цепи Маркова, которая представима в виде

$$P_i^{\varepsilon}(l, k) = P(k) - \varepsilon B^{(i)}(l, k),$$

где

$$B^{(i)}(l, k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq i; \\ P(i)/N_i & \text{при} \quad k = i. \end{cases}$$

Время пребывания процесса $\eta_i^{\varepsilon}(t)$ в состоянии $s \in \{1, 2, \ldots, M\}$ распределено по закону $G(t)$. Очевидно, случайное время до обрыва процесса $\eta_i^{\varepsilon}(t)$ распределено так же, как и случайная величина $\zeta_j^{\varepsilon}/\varepsilon$.

В случае, если $\sum_{s=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\rho(E_s)B^{(i)}(s,k)=\rho(E_i)>0$, утверждение теоремы вытекает из предельной теоремы укрупнения для одного класса эргодических состояний и порядка укрупнения, равного единице [4] (п. 6.3), [5] (п. 2.4.1), причем

$$\Lambda_i = \frac{\sum_{s=1}^{M}\rho(E_s)P(i)}{\sum_{s=1}^{M}\rho(E_s)m} = \frac{\rho(E_i)}{m}.$$

Если $\rho(E_i)=0$, то в силу (10) $P(i)=0$ и для любых x, ε выполняется $\mathrm{P}\{\zeta_j^{\varepsilon}\geq x\}=1$, что соответствует значению $\Lambda_i=0$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} K_i^{\varepsilon} = \overline{K_i}(\Lambda_i),$$

где

$$\overline{K_i}(\Lambda_i) = \frac{N_i L m \lambda_i^{(0)}\lambda_i^{(1)}\Lambda_i}{(\lambda_i^{(0)}+\lambda_i^{(1)})(\lambda_i^{(1)}+\Lambda_i)}. \tag{12}$$

Доказательство. В силу соотношений (3), (4), (8), (9)

$$g_i(l,s) = g_i^{\varepsilon}(l,s) = \int_0^{\infty}\pi_i(\tau,\bar{l},\bar{s})\,dF_i^{\varepsilon}(\tau), \qquad l,s=0,1,2, \tag{13}$$

$$d_i = d_i^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} r_i(\tau)\,dF_i^{\varepsilon}(\tau). \tag{14}$$

Из определений (5), (6) вытекает, что функции $\pi_i(\tau,\bar{l},\bar{s})$, $r_i(\tau)$ непрерывны и ограничены на R_+^1. Следовательно [7] (п. 2, 8), в силу леммы 3 возможен предельный переход при $\varepsilon\to 0$ под знаком интегралов в (13), (14). Имеем

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} g_i^{\varepsilon}(1,0) = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i^{(1)}\Lambda_i}{\lambda_i(\lambda_i+\Lambda_i)} = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i+\Lambda_i},$$

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} g_i^{\varepsilon}(0,1) = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i^{(0)}\Lambda_i}{\lambda_i(\lambda_i+\Lambda_i)} = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i+\Lambda_i},$$

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} d_i^{\varepsilon} = \frac{\Lambda_i}{\lambda_i^{(1)}+\Lambda_i},$$

где

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i^{(1)}.$$

Используя вид (1) полумарковского ядра процесса $\xi(t)=\xi^{\varepsilon}(t)$, получаем $\rho(E_i)=N_i^{\varepsilon}\varepsilon m/a_i$, или в силу (11) $a_i=N_i/\Lambda_i$ и не зависит от ε. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в соотношении (7), имеем утверждение леммы.

4. Построение задачи математического программирования. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При условии малого параметра* ε:

1) *проблема нахождения оптимального коэффициента эффективности сводится к задаче математического программирования относительно пере-*

менных $\Lambda_i,\ i=\overline{1,M}$:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{M}\overline{K_i}(\Lambda_i)\ \to\ \max,\\ \Lambda_i\ \geq\ 0,\quad i=\overline{1,M},\\ \sum_{i=1}^{M}\Lambda_i\ =\ 1/m;\end{gathered}\tag{15}$$

2) *оптимальные вероятности перехода*

$$P^*(i)\ =\ m\Lambda_i^*,\quad i=\overline{1,M},\tag{16}$$

где $\Lambda_i^*,\ i=\overline{1,M}$, *— решение задачи математического программирования* (15).

Доказательство. Принимая в качестве целевой функции коэффициент $\sum_{1}^{M}\overline{K_i}(\Lambda_i)$, заданный (12), приходим к задаче математического программирования (15).

Действительно, всегда выполняется равенство $\sum_{i=1}^{M}\rho(E_i)=1$ или в силу (11)

$$m\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i\ =\ 1.$$

Это требование, предъявляемое к распределению вероятностей, отражает зависимость, существующую между параметрами $\Lambda_i,\ i=\overline{1,M}$.

Условие $\Lambda_i^*\geq 0,\ i=\overline{1,M}$, — ограничение на параметр экспоненциального распределения.

Пусть теперь $\Lambda_i^*,\ i=\overline{1,M}$, — решение задачи (15). Этому решению в силу (11) соответствует стационарное распределение $\rho^*(E_i)\ =\ m\Lambda_i^*,\ i=\overline{1,M}$, вложенной цепи Маркова и удовлетворяющая (10) оптимальная вероятность перехода (16). Обратно, вероятности перехода $P=P^*$ по формуле (11) с учетом (10) соответствует набор параметров $\Lambda_i=\Lambda_i^*,\ i=\overline{1,M}$.

Теорема доказана.

Для численного решения задачи выпуклого программирования (15) разработан алгоритм.

Решение задачи можно обобщить на случай, когда время пребывания поискового устройства в каждом состоянии j зависит от номера i подкласса состояний, которому оно принадлежит.

1. *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска. – М.: Наука, 1985. – 248 с.
2. *Шлепаков Л. Н., Вовкодав Н. Г.* Селективный поиск сигнала в многоканальных линиях связи. – Киев, 1995. – 83 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 94.23).
3. *Вовкодав Н. Г., Шлепаков Л. Н.* Оптимальный поиск с сопровождением обнаруженных искомых сигналов // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 4. – С. 72–80.
4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 220 с.
5. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Эволюционные стохастические системы. Алгоритмы усреднения и диффузионной аппроксимации. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2000. – 344 с.
6. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 300 с.
7. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

Получено 26.11.2002