УДК 512.534. 5

В. Д. Дереч (Вінниц. техн. ун-т)

ПРО ПЕРЕСТАВНІ КОНГРУЕНЦІЇ НА АНТИГРУПАХ СКІНЧЕННОГО РАНГУ

We find necessary and sufficient conditions for any two congruences on an antigroup of finite rank to be permutation.

Знайдено необхідні та достатні умови того, щоб будь-які дві конгруенції на антигрупі скінченного рангу були переставними.

Вступ. Відомо, що будь-які дві конгруенції на групі переставні відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. Зрозуміло, що відповідна властивість має місце і для тих алгебраїчних структур, до складу яких входить групова структура (кільце, модуль та ін.). До класу бінарних алгебр з переставними конгруенціями належать також еквазігрупи і скінченні квазігрупи. Що стосується теорії напівгруп, то тут відомі лише окремі класи напівгруп з переставними конгруенціями (напівгрупи Брандта, симетричні напівгрупи та ін.). У даній статті розглядаються антигрупи (в іншій термінології — фундаментальні інверсні напівгрупи) скінченного рангу. Основним результатом є теорема з п. 5, в якій встановлюються необхідні та достатні умови для того, щоб антигрупа скінченного рангу була з переставними конгруенціями.

1. Спочатку домовимося про термінологію і позначення.

Нехай S — довільна напіврешітка. Напівгрупу (відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень) всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки S називають антигрупою і позначають через $\Phi(S)$.

Напіврешітку S називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з S не перевищує n.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\operatorname{rank}: S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких a і $b \in S$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(a \cdot b) \leq \min(\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b))$. Число $\operatorname{rank}(a)$ називається рангом елемента a.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп і теорії інверсних напівгруп можна знайти відповідно в монографіях [1, 2].

2. У цьому пункті визначимо ранг на антигрупі. Для цього спочатку введемо рангову функцію на нижній напіврешітці скінченної довжини.

Отже, нехай L — нижня напіврешітка скінченної довжини. Очевидно, вона має найменший елемент — нуль.

Означення 1. *Нехай $a \in L$. За означенням* $\operatorname{rank}(a)$ — *довжина найбільшого (за кількістю елементів) ланцюжка, що з'єднує* 0 *і* a.

(Зазначимо, що це означення дещо загальніше, ніж класичне означення (див., наприклад, [3]), адже ми не вимагаємо виконання умови Жордана–Гьольдера. Зрозуміло, що при виконанні згаданої вище умови наведене означення збігається з класичним.)

Відмітимо деякі тривіальні властивості функції rank.

Лема 1. *Якщо* $a < b$, *то* $\operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(b)$.

Доведення очевидне.

Лема 2. *Функція* rank *є ранговою функцією на* L.

Доведення. Оскільки $ab \leq a$ і $ab \leq b$, то за лемою 1 $\operatorname{rank}(ab) \leq \operatorname{rank}(a)$ і $\operatorname{rank}(ab) \leq \operatorname{rank}(b)$.

Лема 3. *Нехай* $\operatorname{rank}(a) = k$, *де* $k \geq 1$. *Тоді існує елемент* b *такий, що* $\operatorname{rank}(b) = k - 1$.

Доведення. Нехай $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = a$ — ланцюжок найбільшої довжини, що з'єднує 0 і a. Очевидно, $\operatorname{rank}(a_{k-1}) \geq k-1$. Якщо ж припустити, що $\operatorname{rank}(a_{k-1}) > k-1$, тобто $\operatorname{rank}(a_{k-1}) \geq k$, то $\operatorname{rank}(a) \geq k+1$. Суперечність. Отже, $\operatorname{rank}(a_{k-1}) = k-1$.

Тепер визначимо ранг на антигрупі. Нехай S — напіврешітка скінченної довжини, $\Phi(S)$ — антигрупа (див. п. 1). Нехай $f \in \Phi(S)$ і $\mathrm{pr}_1 f = aS$, $\mathrm{pr}_2 f = bS$. Оскільки f — ізоморфізм між головними ідеалами aS і bS, то $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$.

Означення 2. *Нехай* $f \in \Phi(S)$, *причому* $\mathrm{pr}_1 f = aS$ *і* $\mathrm{pr}_2 f = bS$, *тоді за означенням* $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$.

Лема 4. *Функція* rank, *що визначена на антигрупі* $\Phi(S)$, *є ранговою.*

Доведення. Нехай f і φ — довільні елементи антигрупи $\Phi(S)$. Існує $r \in S$ такий, що $\mathrm{pr}_2(f \circ \varphi) = rS$. Оскільки для деякого $k \in S$ виконується $\mathrm{pr}_2(f \circ \varphi) \subseteq \mathrm{pr}_2(\varphi) = kS$, то $r \in kS$. Отже, $r \leq k$, а тому за лемою 1 $\operatorname{rank}(r) \leq \operatorname{rank}(k)$. Отже, $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) = \operatorname{rank}(r) \leq \operatorname{rank}(k) = \operatorname{rank}(\varphi)$. Таким чином, $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) \leq \operatorname{rank}(\varphi)$. Аналогічно можна довести, що $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) \leq \operatorname{rank}(f)$. Таким чином, функція rank — рангова функція на $\Phi(S)$.

3. Відомо [4] (теорема 1), що в напівгрупі з переставними конгруенціями ідеали лінійно впорядковані відносно включення. У зв'язку з цим для нас є актуальним знаходження необхідних та достатніх умов, які треба накласти на антигрупу $\Phi(S)$ для того, щоб її ідеали були лінійно впорядкованими.

Спочатку домовимося про термінологію.

Будемо говорити, що напіврешітка скінченної довжини S задовольняє умову L, якщо для будь-яких елементів $a \in S$ і $b \in S$ з рівності $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$ випливає $aS \cong bS$ (тут $\cong$ є знаком ізоморфізму).

Очевидно, що підмножина $I_k = \{ f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \leq k \}$ антигрупи $\Phi(S)$ є ідеалом. Назвемо такий ідеал **ранговим.**

Теорема 1. *Нехай S — напіврешітка скінченної довжини, $\Phi(S)$ (або просто Φ) — антигрупа всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки S.*

Наступні умови еквівалентні:

1) *ідеали антигрупи Φ — лінійно впорядковані;*
2) *головні ідеали антигрупи Φ — лінійно впорядковані;*
3) *кожний ідеал антигрупи Φ — головний;*
4) *напіврешітка S задовольняє умову L;*
5) *кожний ідеал антигрупи Φ — ранговий.*

Доведення. Імплікація 1) $\to$ 2) є очевидною.

Імплікація 2) $\to$ 1) має місце для будь-якої напівгрупи і це легко доводиться.

Імплікація 3) $\to$ 2) виконується для будь-якої напівгрупи. Покажемо це. Отже, нехай B — довільна напівгрупа, кожний ідеал якої головний. Доведемо, що головні ідеали — лінійно впорядковані. Нехай B^1aB^1 і B^1bB^1 — довільні головні ідеали напівгрупи B. За умовою ідеал $B^1aB^1 \cup B^1bB^1$ теж головний, а отже, існує елемент c такий, що $B^1aB^1 \cup B^1bB^1 = B^1cB^1$. Оскільки $c \in B^1aB^1 \cup B^1bB^1$, то $c \in B^1aB^1$ або $c \in B^1bB^1$. Припустимо, наприклад, що $c \in B^1aB^1$, тоді $B^1cB^1 \subseteq B^1aB^1$. Крім того, $B^1aB^1 \subseteq B^1cB^1$. З останніх двох включень випливає $B^1cB^1 = B^1aB^1$. Тому $B^1aB^1 \cup B^1bB^1 = B^1aB^1$, а отже, $B^1bB^1 \subseteq B^1aB^1$.

Доведемо тепер імплікацію $1) \to 4)$. Отже, за умовою ідеали антигрупи Φ лінійно впорядковані, крім того, $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(c) = k$. Потрібно довести, що $aS \cong cS$. Припустимо протилежне, тобто $aS \not\cong cS$. Множину $\{f \in \Phi \mid \operatorname{pr}_1 f \cong aS\}$ позначимо через A, а множину $\{f \in \Phi \mid \operatorname{pr}_1 f \cong cS\}$ — через C. Розглянемо $I(A) = A \cup I_{k-1}$, де $I_{k-1} = \{f \in \Phi \mid \operatorname{rank}(f) \leq k-1\}$. Доведемо, що $I(A)$ — ідеал антигрупи Φ.

Нехай $f \in I(A)$.

А. Якщо $f \in I_{k-1}$, то для будь-якого φ $f \circ \varphi \in I_{k-1}$ і $\varphi \circ f \in I_{k-1}$.

Б. Нехай $f \in A$. Оскільки $\operatorname{rank}(f) = k$, то для будь-якого φ $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) \leq k$.

Якщо $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) \leq k-1$, то $f \circ \varphi \in I_{k-1}$, тобто $f \circ \varphi \in I(A)$.

Якщо ж $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) = k$, то $\operatorname{pr}_1(f \circ \varphi) = \operatorname{pr}_1 f$. Звідси випливає, що $f \circ \varphi \in A$.

Покажемо тепер, що $\varphi \circ f \in I(A)$.

Якщо $\operatorname{rank}(\varphi \circ f) \leq k-1$, то зрозуміло, що $\varphi \circ f \in I(A)$.

Якщо ж $\operatorname{rank}(\varphi \circ f) = k$, то $\operatorname{pr}_2(\varphi \circ f) = \operatorname{pr}_2 f$. Далі $\operatorname{pr}_1(\varphi \circ f) \cong \operatorname{pr}_2(\varphi \circ f) = \operatorname{pr}_2 f \cong \operatorname{pr}_1 f \cong aS$. Отже, $\varphi \circ f \in A$.

Таким чином, $I(A)$ — ідеал антигрупи Φ. Аналогічно доводиться, що $I(C) = C \cup I_{k-1}$ — теж ідеал антигрупи Φ. Але $\Delta_{cS} \notin I(A)$ (тут через Δ_{cS} ми позначили тотожне перетворення на cS). Крім того, $\Delta_{aS} \notin I(C)$. Отже, $I(A) \not\subset I(C)$ і $I(C) \not\subset I(A)$. Суперечність.

Доведемо імплікацію $4) \to 5)$.

Нехай напіврешітка S задовольняє умову L. Доведемо, що кожний ідеал антигрупи $\Phi(S)$ є ранговим. Отже, нехай I — ідеал антигрупи $\Phi(S)$. Позначимо через f елемент найбільшого рангу серед усіх елементів ідеалу I. Нехай $\operatorname{rank}(f) = k$. Покажемо, що $I = I_k = \{\varphi \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(\varphi) \leq k\}$. Оскільки, зрозуміло, $I \subseteq I_k$, то нам потрібно довести, що $I_k \subseteq I$.

Нехай φ такий, що $\operatorname{rank}(\varphi) = k$, $\operatorname{pr}_1 \varphi = cS$ і $\operatorname{pr}_2 \varphi = mS$. Крім того, нехай $\operatorname{pr}_1 f = aS$ і $\operatorname{pr}_2 f = bS$. Оскільки $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(c) = k$, то $bS \cong cS$, а отже, існує елемент $\psi \in \Phi(S)$ такий, що $\operatorname{pr}_1 \psi = bS$ і $\operatorname{pr}_2 \psi = cS$. Зрозуміло, що $\psi^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ \psi = \Delta_{cS}$, але $\Delta_{cS} \circ \varphi = \varphi$, тому $\psi^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ \psi \circ \varphi = \varphi$. Оскільки $f \in I$, то $\varphi \in I$. Отже, будь-який елемент антигрупи рангу k належить ідеалу I.

Застосовуючи лему 3 (п. 2), легко показати, що для будь-якого невід'ємного цілого числа m, $0 \leq m \leq k$, існує елемент $\omega \in I$ такий, що $\operatorname{rank}(\omega) = m$. Далі, міркуючи так само, як і у випадку $m = k$, можна показати, що всі елементи антигрупи рангу m належать ідеалу I. Таким чином, $I = I_k$.

Імплікація $5) \to 1)$ є очевидною.

Доведемо справедливість імплікації $5) \to 3)$.

Нехай I — довільний ідеал антигрупи Φ. Розглянемо всі головні ідеали, які входять до I. Нехай $\Phi \circ \alpha \circ \Phi$ — найбільший серед них. (Такий існує, оскільки ідеалів в антигрупі скінченна кількість і вони лінійно впорядковані.) Нехай $\beta \in I$ — довільний елемент I. Тоді, очевидно, $\Phi \circ \beta \circ \Phi \subseteq I$, а оскільки $\Phi \circ \alpha \circ \Phi$ — найбільший головний ідеал, що входить до I, то $\Phi \circ \beta \circ \Phi \subseteq \Phi \circ \alpha \circ \Phi$. Отже, $\beta \in \Phi \circ \alpha \circ \Phi$. Таким чином, $I \subseteq \Phi \circ \alpha \circ \Phi$. Крім того, $\Phi \circ \alpha \circ \Phi \subseteq I$. Отже, $\Phi \circ \alpha \circ \Phi = I$.

Доведених імплікацій цілком достатньо, щоб стверджувати попарну еквівалентність умов $1-5$.

4. У цьому пункті ми доведемо теорему, яка є узагальненням одного результату, наведеного в [5, с. 43] (твердження 2.1). Для доведення цієї теореми нам знадобиться така лема.

Лема. *Нехай* S — *довільна напівгрупа і* Θ — *конгруенція на* S, *яка має форму* $\Theta = I \times I \bigcup \Omega$, *де* I — *ідеал і* $\Omega \subseteq H$ (H — *відношення Гріна*).

Тоді якщо $\langle a, b\rangle \in \Theta$ *і* $a \in I$, *то* $b \in I$.

Доведення. Нехай $\langle a, b\rangle \in \Theta$, тоді або $\langle a, b\rangle \in \Omega$, або $\langle a, b\rangle \in I \times I$. Якщо $\langle a, b\rangle \in I \times I$, то $b \in I$. Якщо ж $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $\langle a, b\rangle \in H$, тобто $\langle a, b\rangle \in R \bigcap L$, де R і L — відношення Гріна. Отже, знайдеться елемент $r \in S$ такий, що $b = ar$. Таким чином, $b \in I$.

Теорема. *Нехай* S — *напівгрупа,* I_1 *і* I_2 — *її ідеали, причому* $I_1 \subseteq I_2$. *Нехай* Θ_1 *та* Θ_2 — *конгруенції на напівгрупі* S *такі, що* $\Theta_1 = I_1 \times I_1 \bigcup \Omega$ *і* $\Theta_2 = I_2 \times I_2 \bigcup \sigma$, *де* $\Omega \subseteq H$ *і* $\sigma \subseteq H$, *а* H — *відношення Гріна.*

Тоді $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Доведення. Нехай $\langle a, b\rangle \in \Theta_1 \circ \Theta_2$. Тоді існує елемент $c \in S$ такий, що $\langle a, c\rangle \in \Theta_1$ і $\langle c, b\rangle \in \Theta_2$.

Випадок 1. $a \in I_1$. Тоді згідно з лемою цього пункту $c \in I_1$. Але за умовою $I_1 \subseteq I_2$, тому $c \in I_2$. Оскільки $\langle c, b\rangle \in \Theta_2$ і $c \in I_2$, то $b \in I_2$. Отже, $\langle a, b\rangle \in \Theta_2$ і $\langle b, b\rangle \in \Theta_1$, тобто $\langle a, b\rangle \in \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Випадок 2. $a \notin I_1$ і $b \in I_2$. Якщо $\langle a, c\rangle \in \Theta_1$ і $a \notin I_1$, то $\langle a, c\rangle \in \Omega$. Оскільки $\langle c, b\rangle \in \Theta_2$ і $b \in I_2$, то за лемою цього пункту $c \in I_2$. Оскільки $\langle a, c\rangle \in \Omega$, то за умовою $\langle a, c\rangle \in H$. Отже, $\langle a, c\rangle \in R$. З визначення відношення R випливає існування елементів r і m таких, що $a = cr$ і $c = am$. Але $c \in I_2$, тому $a \in I_2$. Таким чином, $a \in I_2$ і $b \in I_2$, тому $\langle a, b\rangle \in \Theta_2$. Оскільки $\langle b, b\rangle \in \Theta_1$, то $\langle a, b\rangle \in \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Випадок 3. $a \notin I_1$ і $b \notin I_2$. Якщо $a \notin I_1$ і $\langle a, c\rangle \in \Theta_1$, то $\langle a, c\rangle \in H$. Якщо $b \notin I_2$ і $\langle c, b\rangle \in \Theta_2$, то $\langle c, b\rangle \in H$. З визначення відношення H випливає існування елементів r, m, k, n таких, що $a = cr$, $c = am$, $c = kb$, $b = nc$. Оскільки $\langle c, b\rangle \in \Theta_2$, то $\langle cr, br\rangle \in \Theta_2$. Але $a = cr$, отже,

$$\langle a, br\rangle \in \Theta_2. \tag{1}$$

Оскільки $\langle a, c\rangle \in \Theta_1$, то $\langle na, nc\rangle \in \Theta_1$. Але $b = nc$, тому $\langle na, b\rangle \in \Theta_1$. Оскільки $na = ncr = br$, то

$$\langle br, b\rangle \in \Theta_1. \tag{2}$$

З (1) та (2) випливає, що $\langle a, b\rangle \in \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Таким чином, перебравши всі можливі випадки, робимо висновок, що $\Theta_1 \circ \Theta_2 \subseteq \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Тепер доведемо зворотне включення. Отже, нехай $\langle a, b\rangle \in \Theta_2 \circ \Theta_1$, тоді існує елемент $c \in S$ такий, що $\langle a, c\rangle \in \Theta_2$ і $\langle c, b\rangle \in \Theta_1$.

Випадок А. $a \in I_2$. Якщо $\langle a, c\rangle \in \Theta_2$, то за лемою цього пункту $c \in I_2$. Оскільки $\langle c, b\rangle \in \Theta_1$, то $\langle c, b\rangle \in I_1 \times I_1$ або $\langle c, b\rangle \in \Omega$.

Якщо $\langle c, b\rangle \in I_1 \times I_1$, то $b \in I_1$. А оскільки за умовою $I_1 \subseteq I_2$, то $b \in I_2$. Одержуємо $\langle a, a\rangle \in \Theta_1$ і $\langle a, b\rangle \in \Theta_2$. Отже, $\langle a, b\rangle \in \Theta_1 \circ \Theta_2$.

Якщо ж $\langle c, b\rangle \in \Omega$, то за умовою $\langle c, b\rangle \in H$. Отже, для деякого m має місце рівність $b = cm$. Але $c \in I_2$, тому $b \in I_2$. Отже, $\langle a, b\rangle \in \Theta_2$. Таким чином, $\langle a, a\rangle \in \Theta_1$ і $\langle a, b\rangle \in \Theta_2$, тому $\langle a, b\rangle \in \Theta_1 \circ \Theta_2$.

Випадок B. $a \notin I_2$ і $b \in I_2$. За умовою $\langle c, b\rangle \in \Theta_1$, тому $\langle c, b\rangle \in I_1 \times I_1$ або $\langle c, b\rangle \in H$.

Якщо $c \in I_1$, то $c \in I_2$. Але $\langle a, c\rangle \in \Theta_2$, тому за лемою цього пункту $a \in I_2$. Суперечність.

Якщо $\langle c, b\rangle \in H$, то $b = cm$ для деякого елемента $m \in S$. Оскільки $b \in I_2$, то $c \in I_2$. Маємо $\langle a, c\rangle \in \Theta_2$ і $c \in I_2$. Тому за лемою $a \in I_2$. Суперечність.

Таким чином, випадок B взагалі неможливий.

Випадок C. $a \notin I_2$ і $b \notin I_2$. Тоді $\langle a, c\rangle \in H$ і $\langle c, b\rangle \in H$. З визначення відношення H випливає існування елементів r, m, k, n таких, що $a = cr$, $c = am$, $c = kb$, $b = nc$. Оскільки $\langle c, b\rangle \in \Theta_1$, то $\langle cr, br\rangle \in \Theta_1$. Але $a = cr$, тому

$$\langle a, br\rangle \in \Theta_1. \tag{3}$$

Оскільки $\langle a, c\rangle \in \Theta_2$, то $\langle na, nc\rangle \in \Theta_2$. Але $b = nc$, тому

$$\langle na, b\rangle \in \Theta_2. \tag{4}$$

Внаслідок того, що $na = ncr$ і $br = ncr$, маємо $na = br$. З (3) і (4) випливає $\langle a, b\rangle \in \Theta_1 \circ \Theta_2$. Таким чином, $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$.

5. В цьому пункті доведемо основну теорему статті.

Нехай S — напіврешітка скінченної довжини, $\Phi(S)$ — антигрупа всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки S.

Теорема. *Будь-які дві конгруенції на антигрупі $\Phi(S)$ переставні тоді і тільки тоді, коли її ідеали лінійно впорядковані і кожна конгруенція Θ має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи $\Phi(S)$, $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна на $\Phi(S)$).*

Доведення. У попередньому пункті в загальній формі ми вже довели *достатність*. Доведемо *необхідність*.

Отже, нехай будь-які дві конгруенції на антигрупі $\Phi(S)$ — переставні. Тоді, як відомо [4] (теорема 1), її ідеали лінійно впорядковані, а отже, за теоремою п. 3 кожний ідеал антигрупи $\Phi(S)$ є ранговим. Нехай Θ — довільна конгруенція на антигрупі $\Phi(S)$. Легко перевірити, що $I_\Theta = \{ f \in \Phi(S) \mid \langle f, 0\rangle \in \Theta \}$ — ідеал антигрупи $\Phi(S)$, отже, існує ціле невід'ємне число k таке, що $I_\Theta = I_k = \{ f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \le k \}$.

Нехай $\langle f, \varphi\rangle \in \Theta$, причому $\operatorname{rank}(f) > k$. Покажемо спочатку, що і $\operatorname{rank}(\varphi) > k$. Справді, якщо припустити протилежне, тобто $\operatorname{rank}(\varphi) \le k$, то $\varphi \in I_k$, а тому і $f \in I_k$. Отже, $\operatorname{rank}(f) \le k$. Суперечність.

Тепер покажемо, що $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi)$. Припустимо, що $\operatorname{rank}(f) \ne \operatorname{rank}(\varphi)$. Для конкретності будемо вважати, що $\operatorname{rank}(f) = m$, $\operatorname{rank}(\varphi) = r$, причому $k < m < r$. Позначимо через Σ конгруенцію Рісса $I_m \times I_m \cup \Delta$. Нехай $\rho \in \Phi(S)$ таке, що $\operatorname{rank}(\rho) = k$. Оскільки $\langle \rho, f\rangle \in \Sigma$ і $\langle f, \varphi\rangle \in \Theta$, то $\langle \rho, \varphi\rangle \in \Sigma \circ \Theta$. За умовою $\Theta \circ \Sigma = \Sigma \circ \Theta$, тому і $\langle \rho, \varphi\rangle \in \Theta \circ \Sigma$. Це означає, що існує $\psi \in \Phi(S)$ таке, що $\langle \rho, \psi\rangle \in \Theta$ і $\langle \psi, \varphi\rangle \in \Sigma$. Оскільки $\langle \rho, \psi\rangle \in \Theta$ і $\rho \in I_k$, то $\psi \in I_k$. Далі, $\langle \psi, \varphi\rangle \in \Sigma$, тому $\psi = \varphi$ або $\langle \psi, \varphi\rangle \in I_m \times I_m$. Якщо $\psi = \varphi$, то $\operatorname{rank}(\varphi) \le k$. Суперечність. Якщо ж $\langle \psi, \varphi\rangle \in I_m \times I_m$, то $\operatorname{rank}(\varphi) \le m$. Суперечність. Таким чином, $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi)$.

Тепер покажемо, що $\operatorname{pr}_1 f = \operatorname{pr}_1 \varphi$. Нехай $\operatorname{pr}_1 f = aS$ і $\operatorname{pr}_1 \varphi = bS$. За умовою $\langle f, \varphi\rangle \in \Theta$, тому $\langle \Delta_{aS} \circ f, \Delta_{aS} \circ \varphi\rangle \in \Theta$ або $\langle f, \Delta_{aS} \circ \varphi\rangle \in \Theta$. Легко перевірити, що $\operatorname{pr}_1(\Delta_{aS} \circ \varphi) = aS \cap bS = abS$.

Припустимо, що $aS \ne bS$.

Випадок 1. $aS \cap bS = aS$.

Тоді $aS \subset bS$ (строге включення), а тому $a < b$, звідки $\operatorname{rank}(f) < \operatorname{rank}(\varphi)$. Суперечність.

Випадок 2. $aS \cap bS \subset aS$ (строге включення).

Тоді $abS \subset aS$ (строге включення). Звідси випливає, що $\operatorname{rank}(\Delta_{aS} \circ \varphi) < \operatorname{rank}(f)$. Суперечність.

Тепер покажемо, що $\mathrm{pr}_2 f = \mathrm{pr}_2 \varphi$. Нехай $\mathrm{pr}_2 f = cS$ і $\mathrm{pr}_2 \varphi = eS$. $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$, тому $\langle f \circ \Delta_{cS}, \varphi \circ \Delta_{cS} \rangle \in \Theta$ або $\langle f, \varphi \circ \Delta_{cS} \rangle \in \Theta$. Легко перевірити, що $\mathrm{pr}_2 (\varphi \circ \Delta_{cS}) = eS \cap cS = ecS$.

Припустимо, що $eS \neq cS$.

Випадок A. $eS \cap cS = cS$.

Тоді $cS \subset eS$ (строге включення), а тому $c < e$. Звідси $\operatorname{rank}(f) < \operatorname{rank}(\varphi)$. Суперечність.

Випадок B. $eS \cap cS \subset cS$ (строге включення).

Тоді $ecS \subset cS$ (строге включення). Звідси випливає, що $\operatorname{rank} \langle \varphi \circ \Delta_{cS} \rangle < \operatorname{rank}(f)$. Суперечність.

Таким чином, якщо $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(f) > k$, то $\mathrm{pr}_1 f = \mathrm{pr}_1 \varphi$ і $\mathrm{pr}_2 f = \mathrm{pr}_2 \varphi$, а отже, $\langle f, \varphi \rangle \in H$.

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.
2. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.
3. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 556 с.
4. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**, № 1. – P. 55–66.
5. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 439 с.

Одержано 23.10.2002