УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Мат. центр НАН України, Київ),
В. Д. Залізко (Нац. пед. ун-т, Київ)

КООПУКЛЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ БІЛЬШЕ ОДНІЄЇ ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Assume that $f \in C[-1,1]$ belongs to $C[-1, 1]$ and changes its convexity at $s > 1$ different points y_i, $i = \overline{1, s}$, from $(-1, 1)$. For $n \in N$, $n \geq 2$, we construct the algebraic polynomial P_n of order $\leq n$ changing its convexity at the same points y_i as f and being such that

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C(Y)\omega_3\left(f; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x \in [-1, 1],$$

where $\omega_3(f; t)$ is the third module of continuity of the function f and $C(Y)$ is a constant depending only on $\min\limits_{i=0,\ldots,s} |y_i - y_{i+1}|$, $y_0 = 1$, $y_{s+1} = -1$.

Нехай $f \in C[-1,1]$, змінює свою опуклість в $s > 1$ різних точках y_i, $i = \overline{1, s}$, з $(-1, 1)$. Для $n \in N$, $n \geq 2$, побудовано алгебраїчний многочлен P_n степеня $\leq n$, який змінює опуклість в тих самих точках y_i, що й f, і такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C(Y)\omega_3\left(f; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x \in [-1, 1],$$

де $\omega_3(f; t)$ — третій модуль неперервності функції f, $C(Y)$ — стала, що залежить тільки від $\min\limits_{i=0,\ldots,s} |y_i - y_{i+1}|$, $y_0 = 1$, $y_{s+1} = -1$.

1. Вступ. Нехай $s \in N$. Позначимо через $Y := Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s$ набір з s фіксованих точок y_i:

$$y_{s+1} := -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1 =: y_0,$$

через $\Delta^{(2)}(Y)$ множину неперервних на $[-1, 1]$ функцій f таких, що f є опуклою донизу на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$, якщо i парне, і опуклою догори на тому ж самому відрізку, якщо i непарне. Функції з множини $\Delta^{(2)}(Y)$ називаються коопуклими. Нехай

$$\Pi(x) := \Pi(x; Y) := \prod_{i=1}^{s} (x - y_i),$$

$C[a, b]$ позначає простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $f\colon [a, b] \to R$ з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

(Зауважимо, що якщо $f\colon f'' \in C[-1, 1]$, то, $f \in \Delta^{(2)}(Y) \Leftrightarrow f''(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in$ $\in [-1, 1]$.)

Нагадаємо, що для будь-якої обмеженої функції f і $k \in N$ k-та різниця з кроком h від функції f в точці x має вигляд

$$\sigma_h^k(f; x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih),$$

а k-й модуль неперервності функції $f \in C[a, b]$ визначається як

$$\omega_k(f;t;[a,b]) := \sup_{h\in[0,t]} \left\|\sigma_h^k(f;\cdot)\right\|_{[a,b-kh]}, \quad t \in [0,(b-a)/k],$$

$$\omega_k(f;t;[a,b]) \equiv \omega_k(f;(b-a)/k;[a,b]), \quad t \geq (b-a)/k.$$

Далі будемо використовувати спрощені позначення

$$C := C[-1,1], \quad \|f\| := \|f\|_{[-1,1]}, \quad I := [-1,1], \quad \omega_k(f;t) := \omega_k(f;t;I).$$

Нехай

$$C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\}, \quad r \in N,$$

і

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad n \in N, \quad x \in I.$$

У цій роботі доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо* $s>0$, $s\neq 1$, *і* $f\in\Delta^{(2)}(Y)$, *то існує стала* $C(Y)$, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,\dots,s}(y_i-y_{i+1})$, *така, що для кожного* $n\geq 2$ *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\leq n$, *який задовольняє нерівності*

$$P_n''(x)\Pi(x) \geq 0,$$

$$|f(x)-P_n(x)| \leq C(Y)\omega_3(f;\rho_n(x)), \quad x\in I. \tag{1}$$

Якщо $f\in C^{(1)}$, *то*

$$|f'(x)-P_n'(x)| \leq C(Y)\omega_2(f';\rho_n(x)), \quad x\in I,$$

якщо ж $f\in C^{(2)}$, *то*

$$|f''(x)-P_n''(x)| \leq C(Y)\omega_1(f'';\rho_n(x)), \quad x\in I.$$

Для випадку $s=0$, тобто для чисто опуклого наближення (без точок перегину), в роботі [1] доведено оцінку

$$|f(x)-P_n(x)| \leq c\omega_3(f;\rho_n(x)), \quad x\in I, \tag{2}$$

де c — абсолютна стала. Ця оцінка приводить до нерівності

$$\|f-P_n\| \leq c\,\omega_3\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

доведеної одночасно в роботах [1, 2].

Для випадку $s>0$ в роботі [3] для кожного $n\geq N(Y)$ доведено оцінку

$$|f(x)-P_n(x)| \leq c(s)\omega_2(f;\delta_n(x)), \quad x\in I,$$

де $N(Y)$ — стала, що залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\dots,s-1}(y_i-y_{i+1})$, $c(s)$ — стала, що залежить від s, і

$$\delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad n\in N, \quad x\in I.$$

Також в [3] побудовано контрприклад, який свідчить про те, що при $s=1$ оцінка (2) не виконується. При цьому висловлюється припущення, що для випадку $s>0$, $s\neq 1$, оцінка (2) може виконуватись. Крім того, в роботі [4], зокрема, доведено, що в (1) сталу $C(Y)$ неможливо замінити на сталу $c(s)$, коли $s>0$.

Наведемо ще три результати, які стосуються коопуклого наближення.

У роботі [5] доведено рівномірну оцінку коопуклого наближення, тобто для $s > 0$ і кожного $n \geq N(Y)$ побудовано многочлен P_n степеня $\leq n$ такий, що

$$\| f - P_n \| \leq c(s) \omega_3^{\varphi}\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

де ω_3^{φ} — модуль неперервності Ditzian – Totik третього порядку, і тому, зокрема,

$$\| f - P_n \| \leq c(s) \omega_3\left(f; \frac{1}{n}\right). \qquad (3)$$

У роботах [6, 7] доведено, що в оцінках (1) – (3) неможливо ω_3 замінити на ω_k з $k \geq 4$ навіть для $s = 0$.

У роботі [8] отримано поточкову оцінку

$$| f(x) - p_n(x) | \leq c(s) \omega_3(f; \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad n \geq N(Y), \quad s > 0, \qquad (4)$$

але для так званого майже кусково-опуклого наближення, коли многочлен не зберігає кускову опуклість функції в маленьких околах точок перегину. Для ознайомлення з кусково-монотонним наближенням див., наприклад, [9].

Теорему 1 доведено в п. 3. Для доведення теореми 1 ми побудуємо кусково-опуклий сплайн степеня ≤ 2, властивості якого наведено в теоремі 2. Теорема 2 формулюється нижче і доводиться в п. 2. Щоб сформулювати теорему 2, нам необхідні деякі позначення.

Нехай точки $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \ldots, n$, складають чебишовське розбиття відрізка I. Для кожного $j = \overline{1, n}$ позначимо $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$. Для фіксованих $n \in N$ і $Y = \{y_i\}_{i=1}^{s}$ позначимо

$$O_i := O_{i,n} := O_{i,n}(Y) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{n+2} = x_{n+1} := -1$, $x_{-1} = x_{-2} = x_{-3} := 1$,

$$O := O(n, Y) := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Будемо писати $j \in H$, якщо $I_j \cap O = \varnothing$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 2. *Якщо* $s > 0$, $s \neq 1$, *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то існують сталі* $N(Y)$ *і* $C(Y)$, *які залежать тільки від розташування точок в наборі* Y, *такі, що для кожного* $n \geq N(Y)$ *існує сплайн* L *степеня* ≤ 2 *з вузлами лише в точках* x_j, $j \in H$, *такий, що*

$$L \in \Delta^{(2)}(Y), \qquad (5)$$

$$| f(x) - L(x) | \leq C(Y) \omega_3(f; \rho_n(x)), \quad x \in I. \qquad (6)$$

2. Доведення теореми 2. *Побудова коопуклого сплайна.* Спочатку побудуємо інтерполяційний коопуклий сплайн S степеня ≤ 2 з вузлами в кожній точці множини

$$X_n := \{x_j\}_{j \in H} \cup Y \cup \{1\}$$

і наведемо допоміжні нерівності, а потім „підправимо” сплайн S так, щоб отримати сплайн L з теореми 2.

2.1. Виберемо число $N(Y)$ так, що для кожного $n \geq N(Y)$ будь-який інтервал (y_{i+1}, y_i), $i = \overline{0, s}$, містить принаймні сім різних відрізків I_j. До кінця п. 2 $n \geq N(Y)$, n — фіксоване, і тому, зокрема, $H \neq \varnothing$. Для будь-якого інтервалу $E = (x_{j_1}, x_{j_2}) \subset I$, $j_1 > j_2$, будемо використовувати позначення ${}^*E :=$ $:= (x_{j_1+1}, x_{j_2})$. Через $|E|$ позначимо довжину E, зокрема, $|I_j| := x_{j-1} - x_j =:$ $=: h_{j,n} =: h_j$. Нехай

$$\left(\underline{y}_i, \overline{y}_i\right) =: \left(\underline{y}_{i,n}, \overline{y}_{i,n}\right) =: {}^*O_i, \quad i = \overline{1, s},$$

тобто $\{\underline{y}_i, \overline{y}_i\}_{i=1}^s \subset X_n$. Покладемо $\overline{y}_{s+1} := -1$, $\underline{y}_0 := 1$.

Розіб'ємо множину $G := I \setminus \left(\bigcup_{i=1}^s {}^*O_i\right)$ на дві множини $\breve{G}$ і $\widehat{G}$ так, що

$$G = \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ i - \text{парне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i]\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ i - \text{непарне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i]\right) =: \breve{G} \cup \widehat{G},$$

тобто $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ є опуклою донизу для $x \in \breve{G}$ і опуклою догори для $x \in \widehat{G}$.

Нехай $l(x, g; b) := l(x, g; a, b, c)$ позначає многочлен Лагранжа, який інтерполює функцію $g \in C$ в точках a, b і c з множини X_n таких, що $a < b < c$, і у множині X_n немає точки $d \neq b$, для якої виконується нерівність $a < d < c$. Через $S := S(x, f; X_n)$ позначимо неперервний сплайн степеня ≤ 2 $S' \notin C$, який інтерполює f у кожній точці набору X_n таким чином:

$$S(x) := \begin{cases} l(x, f; x_{n-1}), & x \in [-1, x_{n-1}); \\ l(x, f; x_1), & x \in [x_1, 1]; \\ l(x, f; \underline{y}_i), & x \in [\underline{y}_i, y_i), \quad i = \overline{1, s}; \\ l(x, f; \overline{y}_i), & x \in [y_i, \overline{y}_i), \quad i = \overline{1, s}; \\ \max\left\{l(x, f; x_j), l(x, f; x_{j-1})\right\}, & x \in [x_j, x_{j-1}) \subset \breve{G} \setminus ([-1, x_{n-1}) \cup [x_1, 1]); \\ \min\left\{l(x, f; x_j), l(x, f; x_{j-1})\right\}, & x \in [x_j, x_{j-1}) \subset \widehat{G} \setminus ([-1, x_{n-1}) \cup [x_1, 1]). \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то

$$S \in \Delta^{(2)}(Y).$$

Нехай для будь-якої фіксованої точки $a \in I$

$$\chi(x; a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq a; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \qquad \chi_j(x) := \chi(x; x_j).$$

Покладемо $(x-a)_+ := (x-a)\chi(x; a)$. Для будь-яких двох фіксованих точок a і $b \in I$, $a < b$, позначимо

$$\Psi(x; a, b; -) := (x-a)(x-b)\chi(x; a)$$

$$\left(\equiv \int_{-1}^{x} \left(2(t-a)_+ - (b-a)\chi(t; a)\right) dt = \int_{-1}^{x} \Psi''(t; a, b; -)\, dt\right),$$

$$\Psi(x; a, b; +) := (x-a)(x-b)\chi(x; b)$$

$$\left(\equiv \int_{-1}^{x} \left(2(t-b)_+ + (b-a)\chi(t; b)\right) dt = \int_{-1}^{x} \Psi''(t; a, b; +)\, dt\right).$$

Перенумеруємо точки набору X_n у спадному порядку:

$$-1 := z_{n-4s} < \ldots < z_1 < z_0 := 1, \quad X_n = \{z_k\}_{k=0}^{n-4s}.$$

Покладемо $z_{-1} := 1$ і $z_{n-4s+1} := -1$. Для кожного $i = \overline{1, s}$ позначимо через $k(i)$ індекс $k = \overline{0, n-4s}$ такий, що $z_{k(i)} = y_i$.

Покладемо

$$\Phi_k := [z_{k+1}, z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f](z_{k-2} - z_{k+1}), \quad k = \overline{2, n-4s-1},$$

$$F_k := [z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f], \quad k = \overline{2, n-4s}.$$

Зауважимо, що для $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ $\operatorname{sign} F_k = \operatorname{sign} \Pi(z_{k-1})$, коли $k \neq k(i)+1$. Будемо писати $k \in \overline{H} := \overline{H}(n; Y)$, якщо k — ціле число від 2 до $n-4s-1$ і таке, що $k \neq k(i)$, $k \neq k(i)+1$ для всіх $i = \overline{1, s}$.

Для кожного $k \in \overline{H}$ означимо неперервну на I функцію Ψ_k як

$$\Psi_k(x) := \begin{cases} \Psi(x; z_k, z_{k-1}; -), & \text{якщо } |F_k| \le |F_{k+1}|; \\ \Psi(x; z_k, z_{k-1}; +), & \text{якщо } |F_k| > |F_{k+1}|. \end{cases} \tag{7}$$

Для кожного $i = \overline{1, s}$ покладемо

$$\begin{aligned} \Psi_{k(i)}(x) &:= \Psi(x; z_{k(i)}, z_{k(i)-1}; -), \\ \Psi_{k(i)+1}(x) &:= \Psi(x; z_{k(i)+1}, z_{k(i)}; +), \quad x \in I. \end{aligned} \tag{8}$$

Нехай $\Psi_{n-4s}(x) :\equiv (1+x)(x - z_{n-4s-1})$ і $\Psi_1(x) :\equiv 0$. Тепер сплайн $S = S(x; f; X_n)$ можна зобразити у вигляді

$$S(x) = \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k \Psi_k(x) + l(x, f; z_{n-4s-1}), \tag{9}$$

або, що те саме,

$$S(x) = l_1(x, f; -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k(\Psi_k(x) - \Psi_{k-1}(x)), \tag{10}$$

де $l_1(x, f; -1)$ позначає пряму, яка інтерполює f у точках -1 і z_{n-4s-1} (детальніше див. [8]).

Далі в роботі c і $C(Y)$ позначають невід'ємні відповідно абсолютні сталі і сталі, що залежать тільки від Y (тобто від мінімальної відстані між сусідніми точками набору $Y \cup \{-1, 1\}$). Сталі c, взагалі кажучи, різні, навіть якщо вони стоять в одному рядку. Це передбачається для $C(Y)$ також. Надалі без спеціальних посилань будемо використовувати нерівності

$$h_{j\pm1} \le 3h_j,$$

$$\rho_n(x) < h_j < 5\rho_n(x), \quad x \in I_j,$$

$$\rho_n^2(y) < 4\rho_n(x)(|x-y| + \rho_n(x)),$$

$$2(|x-y| + \rho_n(x)) > |x-y| + \rho_n(y) > (|x-y| + \rho_n(x))/2, \quad x, y \in I.$$

Зауважимо, що для S виконуються нерівності

$$\left| f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x) \right| \le c\,\omega_{3-r}(f^{(r)}; \rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{11}$$

де $r = 0$ і, крім того, $r = 1$, якщо $f \in C^{(1)}$, $r = 1, 2$, якщо $f \in C^{(2)}$. Справді, нехай $\tilde{l}(x, g; [z_k, z_{k-2}]) := \tilde{l}(x, g; z_k, (z_{k-2} + z_k)2^{-1}, z_{k-2})$ позначає многочлен Лагранжа, який інтерполює $g \in C$ в рівновіддалених точках z_k, $(z_{k-2}+z_k)2^{-1}$ і z_{k-2}. Тоді для $x \in [z_k, z_{k-2}]$, $k = \overline{2, n-4s}$, за відомою нерівністю Уітні

$$\left|g(x) - \tilde{l}(x, g; [z_k, z_{k-2}])\right| \le c\omega_3\left(g; \frac{z_{k-2}-z_k}{3}; [z_k, z_{k-2}]\right)$$

маємо

$$\left|g(x) - l(x, g; z_{k-1})\right| = \left|g(x) - \tilde{l}(x, g; [z_k, z_{k-2}]) - l(x, g-\tilde{l}; z_{k-1})\right| \le$$

$$\le \left\|g - \tilde{l}\right\|_{[z_k, z_{k-2}]}\left(1 + \left|\frac{x-z_{k-2}}{z_{k-1}-z_{k-2}} \times \frac{x-z_k}{z_{k-1}-z_k}\right|\right) \le$$

$$\le 3\omega_3\left(g; \frac{z_{k-2}-z_k}{3}; [z_k, z_{k-2}]\right) \le c\omega_3(g; \rho_n(x)).$$

Звідси випливає (11) для $r=0$. Випадки $r = 1, 2$ є наслідками відповідно двох нерівностей (див. лему 4.2 [10]). Нехай

$$\mathbf{l}_\nu(x) := g(z_\nu) + \int\limits_{z_\nu}^{x} l_1(u, g'; z_\nu, z_{\nu-2})\,du,$$

де $\nu := k \vee k+1$, $k = \overline{1, n-4s}$, і l_1 — пряма, яка інтерполює g' у точках z_ν і $z_{\nu-2}$. Тоді для $x \in [z_k, z_{k-1}]$ запишемо

$$\left|g'(x) - S'(x)\right| = \left|g'(x) - l'(x, g; z_{\nu-1})\right| = \left|g'(x) - \mathbf{1}'_\nu(x) - l'(x, g-\mathbf{1}_\nu; z_{\nu-1})\right| \le$$

$$\le \left|g'(x) - l_1(x, g'; z_\nu, z_{\nu-2})\right| + c(z_{\nu-2}-z_\nu)^{-1}\left\|g - \mathbf{1}_\nu\right\|_{[z_\nu, z_{\nu-2}]} \le$$

$$\le 3\omega_2\left(g'; \frac{z_{\nu-2}-z_\nu}{2}; [z_\nu, z_{\nu-2}]\right) + c(z_{\nu-2}-z_\nu)^{-1} \times$$

$$\times \max_{x \in [z_\nu, z_{\nu-2}]}\left|\int\limits_{z_\nu}^{x}\left(g'(u) - l_1(u, g'; z_\nu, z_{\nu-2})\right)du\right| \le c\omega_2(g', \rho_n(x)),$$

$$\left|g''(x) - S''(x)\right| = \left|g''(x) - l''(x, g; z_{\nu-1})\right| = \left|g''(x) - 2[z_\nu, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}; g]\right| =$$

$$= \left|2\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\left(g''(x) - g''(z_\nu + (z_{\nu-1}-z_\nu)t_1 + (z_{\nu-2}-z_{\nu-1})t_2)\right)dt_2\,dt_1\right| \le c\omega_1(g'', \rho_n(x)).$$

2.2. Нехай $\bar{i}$ позначає такий парний індекс $i = \overline{2, s}$, для якого виконується рівність $\left|{}^*O_{\bar{i}}\right| = \max\limits_{i-\text{парне}}\left|{}^*O_i\right|$ (якщо таких індексів два, то $\bar{i}$ позначає, скажімо, більший з них). Аналогічно, $\underline{i} : \left|{}^*O_{\underline{i}}\right| = \max\limits_{i-\text{непарне}}\left|{}^*O_i\right|$.

Для кожного $i = \overline{1, s}$ позначимо

$$l_i := \begin{cases} \max\{l'(y_i, f; \underline{y}_i),\ l'(y_i, f; \bar{y}_i)\}, & \text{якщо} \quad i \text{ — парне;} \\ \min\{l'(y_i, f; \underline{y}_i),\ l'(y_i, f; \bar{y}_i)\}, & \text{якщо} \quad i \text{ — непарне,} \end{cases} \tag{12}$$

$$\Delta_i := \Delta_{i,n} := \int\limits_{\underline{y}_i}^{\bar{y}_i}(l_i - S'(t))\,dt.$$

Покладемо

$$L'(x; A, B) := \begin{cases} S'(x), & x \in G; \\ l_i, & x \in {}^*O_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad i \neq \bar{i} \vee \underline{i}; \\ A, & x \in {}^*O_{\bar{i}}; \\ B, & x \in {}^*O_{\underline{i}}, \end{cases}$$

де числа $A \geq l_{\bar{i}}$ і $B \leq l_{\underline{i}}$ вибрано з умови

$$L(1; A, B) := \int_{-1}^{1} L'(x; A, B)\,dx = S(1).$$

А саме, зважаючи на те, що

$$\Delta_i \geq 0, \quad \text{коли } i \text{ — парне}, \quad \text{і } \Delta_i \leq 0, \quad \text{коли } i \text{ — непарне}, \tag{13}$$

візьмемо $\tilde{A} := l_{\bar{i}}$ і $\tilde{B} := l_{\underline{i}}$. Тоді позначимо

$$\Delta := L(1; \tilde{A}, \tilde{B}) - S(1) \tag{14}$$

і покладемо

$$\begin{aligned} A &= l_{\bar{i}}, \quad B = l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^*O_{\bar{i}}\right|}, \quad \text{якщо} \quad \Delta \geq 0, \\ A &= l_{\bar{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^*O_{\bar{i}}\right|}, \quad B = l_{\underline{i}}, \quad \text{якщо} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{15}$$

З побудови L' випливає, що сплайн

$$L(x) := L(x; A, B) := \int_{-1}^{x} L'(t; A, B)\,dt$$

задовольняє (5). Доведемо (6). Для $x \in [-1, \underline{y}_s] \cup [\overline{y}_1, 1]$ $L(x) \equiv S(x)$, тому (6) випливає з (11). Для решти x скористаємось міркуваннями з доведення леми 9 з [11], нерівністю Уітні і властивостями модуля неперервності. Тоді для кожного $i = \overline{1, s}$ запишемо

$$\left\| l(\cdot, f; \underline{y}_i) - l(\cdot, S; y_i) \right\|_{[\underline{y}_i, y_i]} = \| S - l \|_{[\underline{y}_i, y_i]} \leq$$

$$\leq \| S - l \|_{{}^*\overline{O}_i} \leq c\,\omega_3\left(S; \left|{}^*O_i\right|\right) \leq c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right),$$

де $l := l(x, S; y_i)$ і у правій частині ми застосували нерівність

$$\left|{}^*O_i\right| \leq c\rho_n(y_i) \leq c\frac{1}{n}.$$

Аналогічно,

$$\| l(\cdot, f; \overline{y}_i) - l \|_{[y_i, \overline{y}_i]} \leq c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right).$$

Тому

$$\left\| l(\cdot, f; \underline{y}_i) - l(\cdot, f; \overline{y}_i) \right\|_{{}^*\overline{O}_i} \leq c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right),$$

і з нерівності Маркова випливає оцінка .

$$D_i \;:=\; \left\| l'(\cdot, f; \underline{y}_i) - l'(\cdot, f; \overline{y}_i) \right\|_{{}^*\overline{O}_i} \;\le\; c\,\frac{\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right)}{\left|{}^*O_i\right|}. \tag{16}$$

Оскільки $S \in \Delta^{(2)}(Y)$, тобто функція S' є кусково-монотонною (хоча, взагалі кажучи, $S' \notin C$), то для кожного $i = \overline{1, s}$ з (12) і (16) випливає нерівність

$$\left|\Delta_i\right| \;\le\; \int\limits_{\underline{y}_i}^{\overline{y}_i} \left|l_i - S'(t)\right| dt \;\le\; c\left|{}^*O_i\right| D_i \;\le\; c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

До того ж, зауважимо, що

$$\left|\Delta\right| \;\le\; \left|\; \sum_{\substack{i=2 \\ i \,-\, \text{парне}}}^{s} \Delta_i \;-\; \sum_{\substack{i=2 \\ i \,-\, \text{непарне}}}^{s} \Delta_i \;\right| \;\le\; s \max_{i=\overline{1,s}} \left|\Delta_i\right|. \tag{18}$$

Враховуючи (17), (18) і (11), записуємо

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - L(x)\right| \;&\le\; \left|f(x) - S(x)\right| + \left|S(x) - L(x)\right| \;\le\; c\,\omega_3(f; \rho_n(x)) \;+ \\
&+ \int\limits_{-1}^{x} \left|S'(t) - L'(t)\right| dt \;\le\; c\,\omega_3(f; \rho_n(x)) \;+ \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne \overline{i} \vee \underline{i}}}^{s} \int\limits_{{}^*O_i} \left|l_i - S'(t)\right| dt + \int\limits_{{}^*O_{\overline{i}}} \left|A - S'(t)\right| dt + \int\limits_{{}^*O_{\underline{i}}} \left|B - S'(t)\right| dt \;\le \\
&\le\; c\,\omega_3(f; \rho_n(x)) + c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right) + \\
&+ \int\limits_{{}^*O_{\overline{i}}} \left| l_{\overline{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^*O_{\overline{i}}\right|} - S'(t) \right| dt + \int\limits_{{}^*O_{\underline{i}}} \left| l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^*O_{l_{\underline{i}}}\right|} - S'(t) \right| dt \;\le \\
&\le\; c\,\omega_3(f; \rho_n(x)) + c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right) + 2\left|\Delta\right| \;\le \\
&\le\; c\,\omega_3(f; \rho_n(x)) + c\,\omega_3\left(S; \frac{1}{n}\right) \;\le \\
&\le\; C(Y)\,\omega_3(f; \rho_n(x)), \qquad x \in I \setminus \left([-1, \underline{y}_s] \cup [\overline{y}_1, 1]\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Нерівність (6) доведено.

3. Доведення теореми 1. *3.1.* Для $n \in N$ покладемо

$$t_j(x) \;:=\; t_{j,n}(x) \;:=\; \frac{\cos^2 2n \arccos x}{(x - x_j^0)^2} + \frac{\sin^2 2n \arccos x}{(x - \overline{x}_j)^2},$$

де $\overline{x}_j = \cos(j - 1/2)\pi/n$ і $x_j^0 = \cos\beta_j^0$, $\beta_j^0 = (j - 1/4)\pi/n$, коли $j \le n/2$, і $\beta_j^0 = (j - 3/4)\pi/n$, коли $j > n/2$. Точки $\overline{x}_j$ і x_j^0 є нулями відповідних чисельників і знаходяться строго в середині I_j, а t_j — алгебраїчні многочлени степеня $4n - 2$ такі, що

$$t_j(x) \;\le\; \frac{c}{\left(\left|x - x_j\right| + h_j\right)^2} \;\le\; c\,t_j(x), \quad x \in I,$$

$$t_j(x) \le \frac{10^3}{h_j^2}, \quad x \in I_j.$$

Далі будемо вважати, що сталі c залежать від деякого фіксованого числа $b \in N$, тобто $c := c(b)$. Будемо писати також $c_\nu := c_\nu(b)$, якщо далі є посилання на значення цих сталих.

Для кожного $j \in H$ розглянемо два многочлени степеня cn

$$T_j(x) := T_{j,n}(x; b; Y) := \frac{1}{d_j} \int_{-1}^{x} t_j^b(u) \Pi(u)\, du,$$

де

$$d_j := d_{j,n}(b; Y) := \int_{-1}^{1} t_j^b(u) \Pi(u)\, du,$$

і

$$M_j(x) := M_{j,n}(x; b; Y) := \alpha \int_{-1}^{x} T_{j+1}(u)\, du + (1-\alpha) \int_{-1}^{x} T_{j-1}(u)\, du,$$

де $\alpha \in [0, 1]$ вибрано з умови

$$M_j(1) = 1 - x_j,$$

і $T_0(x) :\equiv 0$, $T_{n+1}(x) :\equiv 1$.

Позначимо

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \frac{h_j}{|x - x_j| + h_j} \le c\frac{\rho_n(x)}{h_j}, \quad x \in I.$$

Лема 1 [1, 8, 10, 12]. *Якщо* $n > 6s$, $j \in H$ *і* $b \in N$, $b \ge 6(s+2)$, *то*

$$M_j''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \ge 0, \quad x \in I, \tag{20}$$

$$M_j'(\pm 1) = \chi_j(\pm 1), \qquad M_j(-1) = 0, \qquad M_j(1) = 1 - x_j,$$

$$\left|(x - x_j)_+ - M_j(x)\right| \le c h_j \big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s-2}, \tag{21}$$

$$\left|\chi_j(x) - M_j'(x)\right| \le c\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s-1},$$

$$\left|M_j''(x)\right| \le c\frac{1}{h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s}, \quad x \in I,$$

зокрема,

$$c\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \le \left|M_j''(x)\right| \le c\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I, \quad j \ne n, \tag{22}$$

$$\left|M_j''(x)\right| \ge c_1\frac{1}{h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b+2s}, \quad x \in I \setminus O, \quad j \ne n. \tag{23}$$

Крім того, якщо $n \ge N(Y)$, *то*

$$\left|M_j''(x)\right| \ge c_1\frac{1}{h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b+2s}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \quad x \in O_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad j \ne n. \tag{24}$$

***Зауваження* 1.** При доведенні леми 1 було використано, зокрема, нерівності

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \le \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)}+1\right)^s, \quad x \in I, \quad y \in I \setminus O,$$

$$\gamma_j^2(x) < 16\Gamma_j(x), \qquad \Gamma_j^2(x) < 400\gamma_j(x), \qquad x \in I,$$

де $\gamma_j(x) := \rho_n(x) / \left(\left|x-x_j\right|+\rho_n(x)\right)$. Доведення оцінок (22) і (23) спираються на нерівність (20) і тотожність $\left|M_j''(x)\right| \equiv \alpha\left|T_{j+1}'(x)\right| + (1-\alpha)\left|T_{j-1}'(x)\right|$, а доведення оцінки (24), — крім того, на співвідношення $O_i \bigcap O_{i-1} = \varnothing$, $i = \overline{2, s}$.

Сформулюємо лему 2, яка є наслідком леми 5.2 з [13] і леми 1. Для фіксованого $j \in H$ через $i(j)$ позначимо такий індекс $i = \overline{0, s-1}$, для якого виконуються нерівності $y_{i(j)+1} < x_j < y_{i(j)}$. Покладемо $i(j) = s$, якщо $x_j < y_s$.

Лема 2. *Для кожного* $j \in H$ *і кожного цілого* $b \ge 6(2s+2)$ *існує набір* $\mathbf{T}$ *з* s *фіксованих точок* t_i

$$-1 = y_{s+1} < t_s < \ldots < y_{i(j)+2} < t_{i(j)+1} < y_{i(j)+1},$$

$$y_{i(j)} < t_{i(j)} < \ldots < t_2 < y_1 < t_1 < y_0 = 1,$$

такий, що многочлен

$$\check{M}_j(x) := M_{j,n}(x; b; Y \bigcup \mathbf{T})$$

степеня cn *задовольняє співвідношення*

$$\check{M}_j(-1) = 0, \qquad \check{M}_j(1) = 1 - x_j,$$

$$\left|(x-x_j)_+ - \check{M}_j(x)\right| \le c_2 h_j\left(\Gamma_j(x)\right)^{2(b-s-1)},$$

$$\left|\chi_j(x) - \check{M}_j'(x)\right| \le c_3\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1}, \quad x \in I,$$

$$\left|\chi_j(x) - \check{M}_j'(x)\right| \le c_3\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i, \quad i = \overline{1, s},$$

і, зокрема,

$$\chi_j(y_i) - \check{M}_j'(y_i) = 0, \quad i = \overline{0, s+1},$$

$$M_j''(y_i) = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Наступна лема є, фактично, переформулюванням у зручному для нас вигляді леми 3 з [8]. Зазначимо також, що вона випливає з лем 1 і 2.

Введемо

$$b_1 := 6(2s+2) + 1, \qquad b_2 := 6(s+2),$$

$$c_4 := 5\max\left\{2, \left[1+\sqrt{\frac{24c_2(b_1)}{b_1-s-2}}\right], \left[1+\frac{12c_3(b_1)}{c_1(b_2)}\right]\right\}$$

і

$$n_1 := c_4 n.$$

Нехай для $j = \overline{1, n}$ j^* позначає індекс такий, що $x_{j^*, n_1} = x_{j,n}$. Для кожного $j \in$ $\in H$ позначимо

$$Q_j(x) := \int\limits_{-1}^{x} M_{j^*, n_1}(u; b_1; Y \bigcup \mathbf{T})\, du,$$

$$R_j(x;\alpha) := \frac{1}{2}\Big(\alpha M_{(j+1)^*,n_1}(x;b_2;Y) + M_{j^*,n_1}(x;b_2;Y) + (1-\alpha)M_{(j-1)^*,n_1}(x;b_2;Y)\Big),$$

де $\alpha \in [0,1]$.

Лема 3. *Для кожного $j \in H$, $j \neq 1$, $j \neq n$, числа α_1 і $\alpha_2 \in [0,1]$ можна вибрати так, що два многочлени*

$$V_j(x;-) := 2Q_j(x) - h_{j,n}R_j(x;\alpha_1)$$

і

$$V_j(x;+) := 2Q_{j-1}(x) + h_{j,n}R_{j-1}(x;\alpha_2)$$

степеня $c(b_1)n_1$ будуть задовольняти умову

$$V_j(1;\pm) = (1-x_j)(1-x_{j-1}),$$

і тоді для них виконуватимуться нерівності

$$\left|\Psi^{(r)}(x;x_j,x_{j-1};\pm) - V_j^{(r)}(x;\pm)\right| \leq c h_j^{2-r}\Gamma_j^{6-r}(x), \quad x \in I, \quad r = 0,1,2. \quad (25)$$

Крім того,

$$(2\chi_j(x) - V_j''(x;-))(V_j''(x;+) - 2\chi_{j-1}(x))\Pi(x)\Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in I, \quad n \geq N(Y). \quad (26)$$

Зокрема,

$$V_j(-1;\pm) = 0, \quad V_j'(\pm 1;\pm) = \Psi'(\pm 1;x_j,x_{j-1};\pm) = 2\left(\pm 1 - \frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)_+.$$

Зауваження 2. 1. $\Psi''(x;x_j,x_{j-1};-) \equiv 2\chi_j(x)$ і $\Psi''(x;x_j,x_{j-1};+) \equiv 2\chi_{j-1}(x)$.
2. Саме вибір c_4 обумовлює як існування α_1 і α_2 (для $n_1 < c_4 n$ вони можуть не існувати), так і виконання (26).

Скрізь далі $n \geq N(Y)$. Для кожного $i = \overline{1,s}$ покладемо

$$W_i(x;-) := 2Q_{\underline{j}}(x) - (y_i - \underline{y}_i)R_{\underline{j}}(x;\alpha_1),$$

$$W_i(x;+) := 2Q_{\bar{j}}(x) + (\bar{y}_i - y_i)R_{\bar{j}}(x;\alpha_2),$$

де $x_{\underline{j}} := x_{\underline{j},n} := x_j = \underline{y}_i$ і $x_{\bar{j}} := x_{\bar{j},n} := x_j = \bar{y}_i$. Оскільки $\underline{j}$ і $\bar{j} \in H$, то многочлени $W_i(x;\pm)$ мають ті самі властивості, що і многочлени з леми 3. Звичайно, вони наближають при цьому функції $\Psi(x;\underline{y}_i, y_i;-)$ і $\Psi(x;y_i,\bar{y}_i;+)$ відповідно.

3.2. Для зручності многочлен P_n з теореми 1 побудуємо у вигляді суми двох многочленів $\overline{P}_n$ і $\tilde{P}_n$ так, що $\overline{P}_n$ „добре" наближає $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, але $\overline{P}_n \notin \Delta^{(2)}(Y)$, тоді як $\overline{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$, і оцінка наближення „не псується".

Для кожного $k \in \overline{H}$ покладемо

$$U_k(x) := \begin{cases} V_{j(k)}(x;-), & \text{якщо } |F_k| \leq |F_{k+1}|; \\ V_{j(k)}(x;+), & \text{якщо } |F_k| > |F_{k+1}|, \end{cases} \quad (27)$$

де $j(k) := j$, якщо $z_k = x_j$. Для $i = \overline{1,s}$ позначимо $R_i(x) :\equiv 0$, якщо $F_{k(i)+1} = 0$, інакше

$$R_i(x) := \alpha_i M_{\underline{j},n_2}(x;b_2;Y) + (1-\alpha_i)M_{\bar{j},n_2}(x;b_2;Y),$$

де $\alpha_i := (\bar{y}_{i,n_2} - y_i)/(\bar{y}_{i,n_2} - \underline{y}_{i,n_2}) = (\bar{y}_{i,n_2} - y_i)/\left|{}^*O_{i,n_2}\right| \in (0,1)$ і $n_2 = 20n$,

$$U_{k(i)+1}(x) := \beta_i W_i(x;-) + (1-\beta_i)\Big(W_i(x;+) + \left|{}^*O_i\right| R_i(x)\Big),$$

$$U_{k(i)}(x) \;:=\; (1-\beta_i)W_i(x;+) \;+\; \beta_i\Big(W_i(x;-) - \left|{}^*O_i\right| R_i(x)\Big),$$

де $\beta_i := 0$, якщо $F_{k(i)+2} = F_{k(i)} = 0$, інакше $\beta_i := \left|F_{k(i)+2}\right| / \left(\left|F_{k(i)+2}\right| + \left|F_{k(i)}\right|\right) \in$ $\in [0, 1]$.

Нехай $U_{n-4s}(x) :\equiv (1+x)(x - z_{n-4s-1})$ і $U_1(x) :\equiv 0$. Многочлен

$$\overline{P}_n(x) \;:=\; \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k U_k(x) \;+\; l(x, f; z_{n-4s-1}), \tag{28}$$

або

$$\overline{P}_n(x) \;:=\; l_1(x, f; -1) \;+\; \sum_{k=2}^{n-4s} F_k\big(U_k(x) - U_{k-1}(x)\big) \tag{29}$$

степеня cn наближає $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, як

$$\left|f^{(r)}(x) - \overline{P}_n^{(r)}(x)\right| \;\le\; c(s)\omega_{3-r}(f^{(r)}; \rho_n(x)), \qquad x \in I, \tag{30}$$

де $r = 0$ і, крім того, $r = 1$, якщо $f \in C^{(1)}$, $r = 1, 2$, якщо $f \in C^{(2)}$. Перевіримо (30) для $r = 0$. Спочатку зауважимо, що для кожного $i = \overline{1, s}$ при всіх $x \in I$ виконується рівність

$$\begin{aligned}\left|\Psi_{k(i)}(x) - U_{k(i)}(x)\right| \;&=\; \Big|(1-\beta_i)\big(\Psi(x; z_{k(i)}; z_{k(i)-1}; -) - W_i(x;+)\big) \;+ \\ &+\; \beta_i\big(\Psi(x; z_{k(i)+1}; z_{k(i)}; +) - W_i(x;-)\big) + \left|{}^*O_i\right|\big(R_i(x) - (x - z_{k(i)})_+\big)\Big| \;\le \\ &\le\; c h_{\overline{j}}^2 \Gamma_{\overline{j}}^6(x),\end{aligned}$$

оскільки $\left|\Psi(x; z_k; z_{k-1}; -) - \Psi(x; z_k; z_{k-1}; +)\right| \le c h_{j(k)}^2 \Gamma_{j(k)}^6(x)$, $k = \overline{2, n-4s}$. Аналогічно, $\left|\Psi_{k(i)+1}(x) - U_{k(i)+1}(x)\right| \le c h_{\underline{j}}^2 \Gamma_{\underline{j}}^6(x)$. Тоді з нерівності

$$\begin{aligned}\left|\Phi_k\right| \;&=\; \left|\frac{f(z_k) - l(z_k, f; z_{k+1}; z_{k-1}; z_{k-2})}{(z_k - z_{k+1})(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k-2})}(z_{k-2} - z_{k+1})\right| \;\le\; c h_{j(k)}^{-2}\omega_3(f; \rho_n(x_{j(k)})) \;\le \\ &\le\; c h_{j(k)}^{-2}\Gamma_{j(k)}^{-3}(x)\omega_3(f; \rho), \qquad k = \overline{2, n-4s-1}, \quad x \in I,\end{aligned}$$

де $\rho := \rho_n(x)$, беручи до уваги (11), (7) – (10), (28), (27) і (25), отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \overline{P}_n(x)\right| \;&\le\; \left|f(x) - S(x)\right| \;+\; \left|S(x) - \overline{P}_n(x)\right| \;\le \\ \le\; \omega_3(f; \rho) \;+\; \sum_{k=2}^{n-4s-1} \left|\Phi_k\right| \left|\Psi_k(x) - U_k(x)\right| \;&\le\; \omega_3(f; \rho)\left(c + c\sum_{k=2}^{n-4s-1} \Gamma_{j(k)}^3(x)\right) \;\le \\ \le\; \omega_3(f; \rho)\left(c + c\rho\sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{\left(\left|x - x_j\right| + \rho\right)^2}\right) \;&\le\; c\omega_3(f; \rho), \quad x \in I.\end{aligned} \tag{31}$$

Випадки $r = 1, 2$ доводяться аналогічно.

Проаналізуємо $\operatorname{sign} \overline{P}_n''(x)$, $x \in I$. Для цього зауважимо, що

$$\begin{aligned}&F_{k(i)+2}\big(U_{k(i)+2}(x) - U_{k(i)+1}(x)\big) \;+\; F_{k(i)+1}\big(U_{k(i)+1}(x) - U_{k(i)}(x)\big) \;+ \\ &+\; F_{k(i)}\big(U_{k(i)}(x) - U_{k(i)-1}(x)\big) \;=\; F_{k(i)+2}\big(U_{k(i)+2}(x) - W_i(x;-)\big) \;+ \\ &\quad+\; F_{k(i)+1}\left|{}^*O_i\right| R_i(x) \;+\; F_{k(i)}\big(W_i(x;+) - U_{k(i)-1}(x)\big), \quad x \in I,\end{aligned} \tag{32}$$

оскільки $\operatorname{sign} F_{k(\bar{i})+2} \neq \operatorname{sign} F_{k(\bar{i})}$. Введемо допоміжний індекс

$$\mu(k) := \begin{cases} j(k), & \text{якщо} \quad U_k(x) = V_{j(k)}(x;-); \\ j(k)-1, & \text{якщо} \quad U_k(x) = V_{j(k)}(x;+), \end{cases} \quad k \in \overline{H}, \tag{33}$$

$\mu(k(i)+1) := \underline{j}$, $\mu(k(i)) := \bar{j}$, $i = \overline{1,s}$, $\mu(n-4s) := n$, $\mu(1) := 0$. Спираючись на (29) і (32), зобразимо $\overline{P}_n''$ у вигляді

$$\overline{P}_n''(x) \equiv \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq k(i)+1,\, i=\overline{1,s}}}^{n-4s} F_k\Big(U_k''(x) - 2\chi_{\mu(k)}(x) + 2\chi_{\mu(k)}(x) - 2\chi_{\mu(k-1)}(x) + 2\chi_{\mu(k-1)}(x) -$$

$$- U_{k-1}''(x)\Big) + \sum_{i=1}^{s} F_{k(i)+1}\left|{}^*O_i\right| R_i''(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k \in \overline{H}} (F_k - F_{k+1})(U_k''(x) - 2\chi_{\mu(k)}(x)) + \sum_{i=1}^{s}\Big\{F_{k(i)+2}\Big(2\chi_{\mu(k(i)+1)}(x) - W_i''(x;-)\Big) +$$

$$+ F_{k(i)+1}\left|{}^*O_i\right| R_i''(x) + F_{k(i)}\Big(W_i''(x;+) - 2\chi_{\mu(k(i))}(x)\Big)\Big\} + 2\Big[F_{n-4s}(1 - \chi_{\mu(n-4s-1)}(x)) +$$

$$+ \sum_{k \in \overline{H}} F_k\Big(\chi_{\mu(k)}(x) - \chi_{\mu(k-1)}(x)\Big) + \sum_{i=1}^{s} F_{k(i)}\Big(\chi_{\mu(k(i))}(x) - \chi_{\mu(k(i)-1)}(x)\Big)\Big] =:$$

$$=: \Sigma_1(x) + \sum_{i=1}^{s}\Big\{A_{1,i}(x) + A_{2,i}(x) + A_{3,i}(x)\Big\} + 2\Sigma_2(x).$$

Оскільки $\mu(k) \geq \mu(k-1)$ для $k = n-4s$, $k \in \overline{H}$ і $k = k(i)$, $i = \overline{1,s}$, то $\operatorname{sign}\Sigma_2(x) = \operatorname{sign}\Pi(x)$, $x \in I$. З властивостей $W_i(x;\pm)$ і рівності $\operatorname{sign} F_{k(i)+2} = -\operatorname{sign} F_{k(i)}$, $i = \overline{1,s}$, випливає $\operatorname{sign} A_{1,i}(x) = \operatorname{sign} A_{3,i}(x) = \operatorname{sign}\Pi(x)$, $x \in I$. З (27), (33) і (26) маємо $\operatorname{sign}\Sigma_1(x) = \operatorname{sign}\Pi(x)$, $x \in I$. Тому лише знак доданка $\sum_{i=1}^{s} A_{2,i}(x)$ не збігається зі знаком $\Pi(x)$. „Виправимо" його. Покладемо

$$\tilde{P}_n(x) := \sum_{i=1}^{s} \frac{\delta_{i,n}}{\left|{}^*O_{i,n_2}\right|}\Big(M_{\underline{j},n_2}(x;b_2;Y) - M_{\bar{j},n_2}(x;b_2;Y)\Big),$$

де

$$\delta_{i,n} := \begin{cases} \Delta_{i,n}, & \text{якщо} \quad i = \overline{1,s}, \quad i \neq \bar{i} \vee \underline{i}; \\ \int_{{}^*O_{\bar{i},n}} (A - S'(t))\,dt, & \text{якщо} \quad i = \bar{i}; \\ \int_{{}^*O_{\underline{i},n}} (B - S'(t))\,dt, & \text{якщо} \quad i = \underline{i}. \end{cases}$$

З (13) – (15) і (20) видно, що $\tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$. Крім того, нерівність

$$\frac{\left|\delta_{i,n}\right|}{\left|{}^*O_{i,n_2}\right|} \geq \frac{\left|\Delta_{i,n}\right|}{\left|{}^*O_{i,n_2}\right|} \geq \frac{(y_i - \underline{y}_i)\left|l_i - S'(\underline{y}_i)\right| + (\bar{y}_i - y_i)\left|l_i - S'(\bar{y}_i)\right|}{2\left|{}^*O_{i,n_2}\right|} \geq$$

$$\geq \frac{\left|{}^*O_{i,n}\right|}{10\left|{}^*O_{i,n_2}\right|} \max\Big\{\left|l_i - S'(\underline{y}_i)\right|, \left|l_i - S'(\bar{y}_i)\right|\Big\} \geq$$

$$\geq \max\left\{\left|l_i - S'(\underline{y}_i)\right|, \left|l_i - S'(\bar{y}_i)\right|\right\} \geq \left|S'(\theta_2) - S'(\theta_1)\right| =$$

$$= \left|[y_i, \bar{y}_i; S] - [\underline{y}_i, y_i; S]\right| = \left|{}^*O_{i,n}\right|\left|F_{k(i)+1}\right|,$$

$$\theta_1 \in (\underline{y}_i, y_i), \quad \theta_2 \in (y_i, \bar{y}_i), \quad i = \overline{1, s},$$

приводить до того, що $P_n := \bar{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$.

Нарешті, оскільки многочлен $\tilde{P}_n$, фактично, наближає функцію $L - S$, то оцінка

$$\left|\tilde{P}_n(x)\right| \leq C(Y)\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in I,$$

доводиться аналогічно (31) і (19) з урахуванням (21). Теорему 1 доведено для $n \geq N(Y)$. Доведення теореми 1 для решти n (тобто, фактично, для $n = 2$) спирається на міркування лем 3.4 і 3.3 з роботи [14] і на той факт, що $s \geq 2$.

Ми не наводимо це доведення. Зауважимо лише, що леми 3.4 і 3.3 з роботи [14] описують при малих n співвідношення між величинами найкращого q-монотонного рівномірного наближення, $q = 2, 3, \ldots$, і величинами найкращого рівномірного наближення без обмежень.

Автори висловлюють подяку професору І. О. Шевчуку за увагу до роботи.

1. *Kopotun K. A.* Poitwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials // Constr. Approxim. – 1994. – **10**. – P. 153 – 178.
2. *Hu Y. K., Leviatan D., Yu X. M.* Coconvex polynomial and spline approximation in $C[-1, 1]$ // Ibid. – 1994. – **10**. – P. 31 – 64.
3. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Coconvex pointwise approximation // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1200 – 1212.
4. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Coconvex approximation // J. Approxim. Theory. – 2002. – **118**. – P. 20 – 65.
5. *Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* The degree of coconvex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**. – P. 409 – 415.
6. *Шведов А. С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **30**. – С. 839 – 846.
7. *Wu X., Zhou S. P.* A counterexample in comonotone approximation in L^p space // Colloq. math. – 1993. – **64**. – P. 265 – 274.
8. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Nearly coconvex pointwise approximation // E. J. Approxim. – 2000. – **6**. – P. 357 – 383.
9. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**. – P. 471 – 474.
10. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
11. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Some positive results and counterexamples in comonotone approximation, II // J. Approxim. Theory. – 1999. – **100**. – P. 113 – 143.
12. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 311 – 348.
13. *Gilewicz J., Шевчук И. А.* Комонотонное приближение // Фундам. и прикл. математика. – 1996. – **2**. – С. 319 – 363.
14. *Pleshakov M. G., Shatalina A. V.* Piecewise coapproximation and the Whitney inequality // J. Approxim. Theory. – 2000. – **105**. – P. 189 – 210.

Одержано 14.11.2002,
після доопрацювання — 30.07.2003