УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

ОЦЕНКИ ГРУПП ОТКЛОНЕНИЙ СУММ ФАБЕРА И СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФАБЕРА НА КЛАССАХ ψ-ИНТЕГРАЛОВ

We establish upper bounds of a group of φ^*-deviations of the Faber sums on classes of $-integrals in a complex plane that were introduced by A. I. Stepanets.

Встановлено верхні межі групи φ^*-відхилень сум Фабера на класах ψ-інтегралів у комплексній області, введених О. І. Степанцем.

1. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, граница которой является спрямляемой жордановой замкнутой кривой Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замыкание области Ω, $\Omega_\infty = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\Omega}$ — внешность кривой Γ, $D = \{w: |w| < 1\}$, $D_\infty = \{w: |w| > 1\}$ — внешность единичной окружности $T = \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}$.

Пусть, далее, $\Psi(w)$ — функция, которая конформно и однолистно отображает область D_∞ на область Ω_∞, нормированная условиями

$$\Psi(\infty) = \infty, \qquad \lim_{w \to \infty} \frac{\Psi(w)}{w} > 0,$$

$w = \Phi(z)$ — функция, обратная к $\Psi(w)$, $F_n(z)$ — многочлены Фабера n-го порядка для области Ω,

$$Kf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in \Omega,$$

— интеграл типа Коши с ограниченной плотностью f.

В дальнейшем будем следовать обозначениям и определениям, принятым в [1]. Каждому интегралу типа Коши $K\varphi(z)$ с ограниченной плотностью φ поставим в соответствие ряд Фабера

$$K\varphi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k(z), \tag{1}$$

где

$$f_k = \widehat{(\varphi \circ \Psi)}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\varphi \circ \Psi)(e^{it}) e^{-ikt} dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(\varphi \circ \Psi)(e^{it}) = \varphi(\Psi(e^{it})).$$

Пусть $L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, — пространство суммируемых функций φ, определенных на кривой Γ, с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\varphi(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/p},$$

где $|\Gamma|$ — длина кривой Γ, и $L_\infty(\Gamma)$ — пространство функций, существенно ограниченных на Γ, с нормой

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma} |\varphi(\zeta)|.$$

Пусть, далее,

$$L_p(\Gamma, \Phi') = \left\{\varphi \in L_1(\Gamma) : \varphi\cdot(\Phi')^{1/p} \in L_p(\Gamma)\right\},$$

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\Phi')} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\varphi(\zeta)|^p |\Phi'(\zeta)| |d\zeta|\right)^{1/p}, \quad L_\infty(\Gamma, \Phi') = L_\infty(\Gamma),$$

$$L_1(\Gamma, \Phi')_+ = \left\{\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi') : S[\varphi\circ\Psi] = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi\circ\Psi})(k) e^{ikt}\right\},$$

$$L_p(\Gamma, \Phi')_+ = L_1(\Gamma, \Phi')_+ \cap L_p(\Gamma, \Phi'), \qquad 1 < p \le \infty,$$

$$K_p(\Omega)_+ = \left\{K\varphi(z) : z \in \Omega : \varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+\right\},$$

$L_1(T)_+$ — множество функций $f(e^{it})$, удовлетворяющих условию $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(e^{it})\right|dt < \infty$ с рядами Фурье степенного типа

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt},$$

$C(T)$ — множество всех непрерывных на T функций f с нормой

$$\|f\|_{C(T)} = \max_t \left|f(e^{it})\right|.$$

В соответствии с [1, ч. 2, с. 261] обозначим через $\psi = \{\psi(k)\}$, $\psi_0 = 1$, произвольную последовательность комплексных чисел. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g(t) \in L_1(T)_+$, то ее называют ψ-интегралом функции f и обозначают $J^\psi f$. Множество ψ-интегралов всех функций $f \in L_1(T)_+$ обозначают через $L^\psi(T)_+$; если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество $L_1(T)_+$, то $L^\psi\mathfrak{N}(T)_+$ — множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N} \in L_1(T)_+$. Если для данной функции F указана функция $f \in L_1(T)_+$ такая, что почти всюду на T выполняется равенство $F(e^{it}) = J^\psi f(e^{it})$, то f называют ψ-производной функции F. При этом пишут $f = D^\psi F = F^\psi$. Пусть, далее,

$$L_p^\psi(T)_+ = L^\psi L_p(T)_+ \cap L_p(T), \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$C^\psi(T)_+ = L^\psi(T)_+ \cap C(T),$$

$$L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+ = \left\{f \in L_p(\Gamma, \Phi')_+;\ \varphi\circ\Psi \in L_p^\psi(T)_+\right\}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$K_p^\psi(\Omega)_+ = \left\{Kf(z) : z \in \Omega;\ f \in L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+\right\}.$$

Если $f = K\varphi$, то по определению полагаем

$$f(z[e^{it}]) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta[e^{it}])}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$f^{\psi}(z[e^{it}]) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^{\psi}(\zeta[e^{it}])}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $\zeta[e^{it}] = \Psi(\Phi(\zeta)e^{it}),\ \zeta \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых убывающих к нулю последовательностей чисел $\{\psi(k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем считаем, что последовательности $\psi(k) \in \mathfrak{M}$ являются сужениями на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел некоторых положительных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$. Множество таких функций также обозначим через $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi; t) \leq K \ \ \forall t \geq 1\},$$

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \eta'(\psi; t) \leq K < \infty\},$$

где $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t(\eta(t) - t)^{-1}$.

2. Объектами изучения в данной работе являются величины

$$H_n^{\varphi^*}(f; z) = \gamma_n^{-1} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \varphi^*(|\rho_k(f; z)|), \qquad \gamma_n = [\eta(n)] - n + 1, \tag{2}$$

$[\alpha]$ — целая часть числа α,

$$H_n^{\varphi^*}(f; \lambda; z) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi^*(|\rho_k(f; z)|), \qquad z \in \Omega, \tag{3}$$

где

$$\rho_n(f; z) = f(z) - S_{n-1}(f; z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z),$$

$\varphi^*(\cdot)$ — непрерывная неотрицательная функция, заданная на $[0, +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность неотрицательных функций, заданных на некотором множестве U, имеющая хотя бы одну предельную точку.

Источником получения информации о поведении величин (2), (3) могут быть следующие величины:

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; e^{i\theta}) = \gamma_n^{-1} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \varphi^*(|\rho_k(f; e^{i\theta})|), \tag{4}$$

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; \lambda; e^{i\theta}) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi^*(|\rho_k(f; e^{i\theta})|), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где

$$\rho_n(f; e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)e^{ik\theta}.$$

Данное предложение основывается на следующем утверждении.

Предложение А [1, ч. 2, с. 266; 2]. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, $f \in K_p^{\psi}(\Omega)_+$, $1 \le p \le \infty$, *и кривая* Γ *такова, что* $\Psi' \in H_q(D_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, *где* $H_q(D_\infty)$ — *пространство Харди. Тогда*

$$\forall z \in \Omega : f(z[\cdot]) \in C^{\psi}(T)_+,$$

причем $(f(z[\cdot]))^{\psi} = f^{\psi}(z[\cdot])$.

Приведенное предложение позволяет сводить изучение величин (2), (3) на классах $K_p^{\psi}(\Omega)_+$ к изучению величин (4), (5) на классах $C^{\psi}(T)_+$.

Действительно, пусть $f \in K_p^{\psi}(\Omega)_+$ и $S_n(z)$ — некоторый алгебраический многочлен. Тогда $f(z[\cdot]) \in C^{\psi}(T)_+$. Рассмотрим ряд

$$g_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi^*\left(\left|f(z[e^{it}])\right|\right) - S_{k-1}(z[e^{it}]),$$

где $S_n(z[\cdot])$ — тригонометрический многочлен, в предположении, что он равномерно сходится относительно t.

В этом случае, как известно,

$$\lim_{t\to 0} g_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi^*(|f(z) - S_{k-1}(z)|)$$

и, значит,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi^*(|f(z) - S_{k-1}(z)|) \le \max_t g_n(t), \quad z \in \Omega.$$

В дальнейшем нам понадобятся также следующие определения и известные результаты из [1, ч. 2].

Положим

$$E_n(f^{\psi}(z[\cdot]))_{C(T)} = \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{\psi}(\zeta[\cdot])}{\zeta - z} d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{C(T)}, \tag{6}$$

$z \in \Omega$, $\mathcal{T}_{n-1}$ — множество функций вида

$$T_{n-1,z}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt},$$

$$E_n(\varphi)_\infty = \inf_{\tau_k} \left\| (\varphi \circ \Psi)(\cdot) - \sum_{|k| \le n-1} \tau_k e_k(\cdot) \right\|_\infty,$$

где τ_k — произвольные числа, $e_k(w) = w^k$, т. е. $E_n(\varphi)_\infty$ — величина наилучшего приближения функции $\varphi \circ \Psi(\cdot)$ тригонометрическими многочленами порядка $n-1$ в пространстве $L_\infty(T)$ существенно ограниченных на T функций с нормой

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t \left|\varphi(e^{it})\right|.$$

Область $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ называется областью Фабера, если оператор Фабера

$$T_\Omega(f)(z) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\Psi'(e^{it})e^{it}/(\Psi(e^{it})-z)\,dt,$$

определенный в пространстве H_∞ ограниченных аналитических в круге D функций f, является ограниченным. Как показано в [1, ч. 2, с. 294], в области Фабера для любого $z \in \Omega$ выполняется неравенство

$$E_n(h(z[\cdot]))_{C(T)} \le K E_n(\varphi)_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

при условии, что $h = K\varphi \in K_\infty(\Omega)_+$.

3. Перейдем к рассмотрению величин (4), (5) на классах $C^\Psi(T)_+$. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение, которое представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *и, кроме того, выполняются условия*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1; t) - t}{\eta(\psi_2; t) - t} \le K_2 < \infty \quad \forall t \ge 1. \tag{8}$$

Пусть, далее, $n, r \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k_j \in \mathbb{N}$,

$$n \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le \eta(n) = \eta(\psi_1; n).$$

Тогда для любых $f \in C^\Psi(T)_+$, $q > 0$ *и* $e^{i\theta}$

$$h_{n,r}^{(q)}(f; e^{i\theta}) \equiv \left\{ r^{-1}\sum_{j=1}^{r}\left|\rho_{k_j}(f; e^{i\theta})\right|^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi}\ln^+\frac{\eta(n)-n}{r} + K(q)\right)|\psi(n)|\,E_n(f^\Psi)_{C(T)}, \tag{9}$$

где $K(q) = K + ((q-1)/\pi)^{(q-1)/q}$, $q \ge 2$, $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$, K *— абсолютная положительная постоянная,* $|\psi(n)| = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$.

Доказательство. Если $\eta(\psi_1; n) < n + 1$, то, очевидно,

$$h_{n,r}^{(q)}(f; e^{i\theta}) = \left|\rho_n(f; e^{i\theta})\right|. \tag{10}$$

В этом случае (9) следует из (10) и известного неравенства [1, ч. 1, с. 290]

$$\left\|\rho_n(f; e^{i\theta})\right\|_{C(T)} \le \left(\frac{1}{\pi}\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\right)|\psi(n)|\,E_n(f^\Psi)_{C(T)}, \tag{11}$$

$$\eta(n) = \eta(\psi_1; n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем считаем $\eta(\psi_1; n) \ge n + 1$. Отправным моментом доказательства леммы в рассматриваемом случае является полученное в [1, ч. 1, с. 275, 282] представление

$$\rho_k(f; e^{i\theta}) = \frac{\psi(k)}{2\pi i}\int\limits_{a_k \le |t| \le \pi/2} \delta_n\,(f^\Psi; e^{i(\theta+t)})\frac{e^{-ikt}}{t}\,dt +$$

$$+ O(1)\,|\psi(k)|\left\|\delta_n(f^\Psi)\right\|_{C(T)}, \quad k \ge n, \tag{12}$$

где $\delta_n(f^\psi; e^{i\tau}) = f^\psi(e^{i\tau}) - T_{n-1}(e^{i\tau})$, $a_n = (\eta(n) - n)^{-1}$, в котором $\eta(n)$ есть либо $\eta(\psi_1; n)$, либо $\eta(\psi_2; n)$. Далее в качестве полинома T_{n-1} будем выбирать полином T_{n-1}^*, осуществляющий наилучшее приближение $f^\psi(\cdot)$. Не умаляя общности можно считать $q \geq 2$. Положим

$$d_{k,n}(f^\psi; e^{i\theta}) = \begin{cases} (2\pi i)^{-1} \int\limits_{a_k \leq |t| \leq r^{-1}} \delta_n(f^\psi; e^{i(\theta+t)}) \dfrac{e^{-ikt}}{t} dt, & a_k \neq r^{-1}; \\ 0, & a_k = r^{-1}. \end{cases}$$

Тогда из (12) с учетом неравенств

$$|a+b|^q \leq 2^q\left(|a|^q + |b|^q\right), \quad q \geq 1,$$

$$|a+b|^q \leq |a|^q + |b|^q, \quad 0 \leq q < 1,$$

получаем

$$h_{n,r}^{(q)}(f; e^{i\theta}) \leq |\psi(n)| \left(\left\{ r^{-1} \sum_{j=1}^{r} \left| (2\pi i)^{-1} \int\limits_{r^{-1} \leq |t| \leq \pi/2} \delta_n(f^\psi; e^{i(\theta+t)}) \frac{e^{-ik_j t}}{t} dt \right|^q \right\}^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \left\{ r^{-1} \sum_{j=1}^{r} \left| d_{k_j,n}(f^\psi; e^{i\theta}) \right|^q \right\}^{1/q} \right) + O(1)|\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(T)} \equiv$$

$$\equiv |\psi(n)| \left(U_{n,1}(f; e^{i\theta}) + U_{n,2}(f; e^{i\theta}) \right) + O(1) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(T)}. \tag{13}$$

Замечая, что

$$\left| d_{k_j,n}(f^\psi; e^{i\theta}) \right| \leq \pi^{-1} E_n(f^\psi)_{C(T)} \left| \ln \frac{\eta(k_j) - k_j}{r} \right|,$$

с учетом оценки [1, ч. 1, с. 377]

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(k) - k}{\eta(k') - k'} \leq K_2 < +\infty \quad \forall k, k' \in [n, \eta(n)], \quad \forall n \tag{14}$$

находим

$$U_{n,2}(f; e^{i\theta}) \leq \pi^{-1} E_n(f^\psi)_{C(T)} \left(K + \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r} \right). \tag{15}$$

Положим, далее,

$$\Delta_n(e^{i\theta}; t) = \begin{cases} \delta_n(f^\psi; e^{i(\theta+t)}) t^{-1}, & r^{-1} \leq |t| \leq \pi/2; \\ 0, & [-\pi, \pi] \setminus \{r^{-1} \leq |t| \leq \pi/2\}, \end{cases}$$

$c_k = c_k(\Delta_n)$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{ik\tau}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда в силу теоремы Хаусдорфа – Юнга [3, с. 153] имеем

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q} \le \left((2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_n(e^{i\theta};t)\right|^{q'}\right)^{1/q'} \le$$

$$\le \pi^{-1/q'}E_n(f^\Psi)_{C(T)}\left(\int_{r^{-1}}^{\pi/2}t^{-q'}dt\right)^{1/q'} \le$$

$$\le \frac{E_n(f^\Psi)_{C(T)}r^{1-1/q'}}{\pi^{1/q'}(q'-1)^{1/q'}} = \left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{(q-1)/q}E_n(f^\Psi)_{C(T)}r^{1/q}. \tag{16}$$

Таким образом, с учетом (16) находим

$$U_{n,1}(f;e^{i\theta}) \le \left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{(q-1)/q}E_n(f^\Psi)_{C(T)}, \qquad q \ge 2. \tag{17}$$

Принимая во внимание (17), (15), (13), приходим к утверждению леммы.

Замечание. Поскольку равенство (12) выполняется также в случае, когда $a_n = (\eta(\psi_2;n)-n)^{-1}$, лемма справедлива и тогда, когда $\eta(n) = \eta(\psi_2;n)$, $\gamma_n = [\eta(\psi_2;n)]-n+1$. Более того, как показано в [1, ч. 1, с. 378, 393], если $\psi_1(\cdot) \in F$, $\psi_2(\cdot) \in F$ и выполнено условие (8), то $|\psi| = (\psi_1^2+\psi_2^2)^{1/2} \in F$ и найдутся такие константы K_1, K_2, что

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(|\psi|;t)-t}{\eta(\psi_1;t)-t} \le K_2,$$

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(|\psi|;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t} \le K_2 \quad \forall t \ge 1.$$

Отсюда следует, что (12) будет выполняться и тогда, когда $a_n = (\eta(|\psi|;n) - n)^{-1}$. На этом основании приходим к выводу, что лемма справедлива и тогда, когда

$$\eta(n) = \eta(|\psi|;n), \qquad \gamma_n = [\eta(|\psi|;n)]-n+1.$$

Обозначим через Φ множество неубывающих и непрерывных на $(0,+\infty)$ функций $\varphi^*(\cdot)$ таких, что $\varphi^*(0)=0$, $\varphi^*(u) \le e^{bu}$ $\forall u \in (0,+\infty)$, $\varphi^*(2u) \le a\varphi^*(u)$ $\forall u \in [0,1]$, $a = a(\varphi^*)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *и, кроме того, выполняются условия* (8). *Тогда если* $\varphi^*(\cdot) \in \Phi$, *то*

$$\forall f \in \dot{C}^\Psi(T)_+ \ \forall e^{i\theta}:$$

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f;e^{i\theta}) \le K\varphi^*\big(|\psi(n)|E_n(f^\Psi)_{C(T)}\big), \tag{18}$$

где $\eta(n) = \eta(\psi_1;n)$, $\gamma_n = [\eta(\psi_1;n)]-n+1$, $K = K(\varphi^*)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta}$ *и* f.

Доказательство. Если $E_n(f^\Psi)_{C(T)} = 0$, то $f(\cdot) = T_{n-1}(\cdot)$ и

$$S_k(T_{n-1}; e^{i\theta}) = T_{n-1}(e^{i\theta}) \quad \forall\, k \ge n.$$

Тогда в силу определения множества Φ неравенство (18) является очевидным.

Пусть $E_n(f^\Psi)_{C(T)} > 0$, $\beta_n = |\psi(n)|\, E_n(f^\Psi)_{C(T)}$. Если $\eta(\psi_1; n) < n+1$, то

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; e^{i\theta}) = \varphi^*\left(\left|\rho_n(f; e^{i\theta})\right|\right).$$

Отсюда с учетом неравенства (11) и свойства функции $\varphi^*(\cdot) \in \Phi$ получаем

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; e^{i\theta}) \le \varphi^*(K\beta_n).$$

Выберем $p \in \mathbb{N}$ так, чтобы $K < 2^p$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > n_0$

$$\beta_n < \min\left\{2^{-p+1}, (2ab)^{-1}\right\}.$$

Из определения множества Φ заключаем, что

$$\varphi^*(K\beta_n) \le \varphi^*(2^p\beta_n) \le a^p\varphi^*(\beta_n), \quad \beta_n < 1, \quad n > n_0.$$

Отсюда

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; e^{i\theta}) \le a^p\varphi^*(\beta_n), \quad n > n_0, \quad a = a(\varphi^*).$$

Если же $n \le n_0$, то (18) достигается за счет соответствующего выбора константы.

Пусть $\eta(n) \ge n+1$, $n > n_0$, $\eta(n) = \eta(\psi_1; n)$. Следуя в общих чертах схеме рассуждений из [4], полагаем

$$B_{n,\sigma}^\theta = \left\{k \in [n, \eta(n)] : (\sigma-1)\beta_n \le \left|\rho_k(f; e^{i\theta})\right| \le \sigma\beta_n\right\}, \quad \sigma \in \mathbb{N},$$

$\mu_{n,\sigma}^\theta$ — количество всех элементов множества $B_{n,\sigma}^\theta$. Поскольку $\varphi^*(u)$ не убывает, то

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; e^{i\theta}) = \gamma_n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k\in B_{n,\sigma}^\theta}\varphi^*\left(\left|\rho_k(f; e^{i\theta})\right|\right) \le$$

$$\le \gamma_n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi^*(\sigma\beta_n)\mu_{n,\sigma}^\theta, \tag{19}$$

$$\gamma_n = [\eta(n)] - n + 1,$$

где предполагается, что если при некотором $\sigma \in \mathbb{N}$ $B_{n,\sigma}^\theta = \{\varnothing\}$, то $\sum_{B_{n,\sigma}^\theta} = 0$. Пусть $\mu_{n,\sigma}^\theta \ge 1$, k_j — все элементы множества $B_{n,\sigma}^\theta$. Тогда, используя неравенство (9), в котором $r = \mu_{n,\sigma}^\theta$, $q = 1$, получаем

$$\mu_{n,\sigma}^\theta \le \gamma_n e^{1-\sigma/C}, \tag{20}$$

где C — константа при величине

$$\ln^{+} \frac{\eta(n)-n}{r} |\psi(n)| E_n(f^{\psi})_{C(T)}$$

в соотношении (9).

Вследствие неравенства [4]

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi^*(u\sigma) e^{-\sigma/b} \leq K_1 \varphi^*(u), \qquad u \in (0, (2ab)^{-1}), \qquad \varphi^* \in \Phi,$$

где $b = C$, a — константа, входящая в определение множества Φ, и соотношений (19), (20) приходим к утверждению теоремы 1.

Полагая $n_0 = n$,

$$n_j = \begin{cases} [\eta(n_{j-1})], & n_{j-1} \leq [\eta(n_{j-1})]; \\ [\eta(n_{j-1})] + 1, & n_{j-1} = [\eta(n_{j-1})], \end{cases}$$

$$j \in \mathbb{N}, \qquad \eta(t) = \eta(|\psi|; t), \qquad \gamma_n = [\eta(|\psi|; n)] - n + 1$$

и представляя величину $H_n^{\varphi^*}(f; \lambda; e^{i\theta})$, $\lambda = \lambda_k(u)$, $u \in U$, в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \lambda_k(u) \varphi^*\Big(\big|\rho_k(f; e^{i\theta})\big|\Big),$$

на основании теоремы 1 и соотношений (11), (14) нетрудно убедиться в справедливости такого утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *и, кроме того, выполняются условия* (8). *Тогда если* $\varphi^* \in \Phi$ *и последовательность* $\lambda_k(u) \geq 0$ *такова, что для любого* $u \in U$ *числа* $\lambda_k(u) |\psi(k)|$ *не возрастают при* $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\forall f \in C^{\psi}(T)_+ \ \ \forall e^{i\theta}:$$

$$\overline{H}_n^{\varphi^*}(f; \lambda; e^{i\theta}) \leq K \Bigg\{ \lambda_n(u) |\psi(n)| (\eta(n) - n) \varphi^*\Big(|\psi(n)| E_n(f^{\psi})_{C(T)}\Big) + $$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u) \varphi^*\Big(|\psi(k)| E_k(f^{\psi})_{C(T)}\Big) \Bigg\}, \tag{21}$$

где $K = K(\varphi^*)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$, $u \in U$, $e^{i\theta}$ *и* $f \in C^{\psi}(T)_+$, $\eta(t) = \eta(|\psi|; t)$.

4. Перейдем к рассмотрению величин (2), (3) на классах $K_p^{\psi}(\Omega)_+$.

С учетом предложения А и неравенства (7) из результатов, полученных в п. 3, непосредственно следуют такие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *и, кроме того, выполняются условия* (8). *Пусть, далее,* $n, r \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, r$, $k_j \in \mathbb{N}$,

$$n \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq \eta(n) = \eta(\psi_1; n).$$

Тогда если $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ — *область Фабера, то*

$$\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+ \ (f = K\varphi) \ \forall q > 0:$$

$$\sup_{z\in\Omega}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\rho_{k_j}(f;z)\right|^q\right\}^{1/q} \le \left(\frac{1}{\pi}\ln^+\frac{\eta(n)-n}{r} + K(q)\right)|\psi(n)|\,E_n(\varphi)_\infty, \qquad (22)$$

где величины, содержащиеся в правой части (22), *имеют тот же смысл, что и выше.*

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *выполняются условия* (8) *и* $\varphi^* \in \Phi$. *Тогда если* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *— область Фабера, то*

$$\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+ \ (f = K\varphi) \ \forall n \in \mathbb{N}:$$

$$\sup_{z\in\Omega} H_n^{\varphi^*}(f;z) \le K\varphi^*(|\psi(n)|E_n(\varphi)_\infty), \qquad K = K(\varphi^*). \qquad (23)$$

Теорема 5. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, *выполняются условия* (8), $\varphi^*(\cdot) \in \Phi$, *и, кроме того, последовательность* $\lambda = (\lambda_k(u) \ge 0)$, $u \in U$, *такова, что для любого* $u \in U$ *числа* $\lambda_k(u)\,|\psi(k)|$ *не возрастают при* $k \ge n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *— область Фабера, то*

$$\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+ \ (f = K\varphi) \ \forall n \in \mathbb{N}:$$

$$\sup_{z\in\Omega} H_n^{\varphi^*}(f;\lambda;z) \le K\Bigg\{\lambda_n(u)|\psi(n)|(\eta(n)-n)\,\varphi^*(|\psi(n)|E_n(\varphi)_\infty) +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\,\varphi^*(|\psi(k)|E_k(\varphi)_\infty)\Bigg\}, \qquad \eta(t) = \eta(|\psi|;t), \qquad K = K(\varphi^*), \qquad (24)$$

при условии, что ряд в правой части (24) *сходится.*

Полагая в (24) $n = 1$, в условиях теоремы 5 имеем

$$\sup_{z\in\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\,\varphi^*(|\rho_k(f;z)|) \le K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\,\varphi^*(|\psi(k)|E_k(\varphi)_\infty)\right\}. \qquad (25)$$

Соотношение (25) позволяет устанавливать оценки для достаточно широкого спектра φ^*-сильных средних λ-методов суммирования рядов, если предположить, что последовательность $\lambda = (\lambda_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, элементы которой при каждом фиксированном $u \in U$ удовлетворяют условиям теоремы 5, определяет некоторый λ-метод суммирования рядов. Например, если $U \equiv \mathbb{N}$,

$$\lambda_k(u) = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} n^{-1}, & 1 \le k \le n; \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то в условиях теоремы 5

$$\sup_{z\in\Omega}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^*(|\rho_k(f;z)|) \le K\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^*(|\psi(k)|E_k(\varphi)_\infty)\right\}.$$

Используя представление [1, ч. 2, с. 273; 2]

$$\rho_n(f; e^{i\theta}) = -\psi(n) S_{n-1}(f^{\Psi} - T_{n-1}; e^{i\theta}) + O(1)|\psi(n)| \| f^{\Psi} - T_{n-1} \|_{C(T)},$$

где $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, $f \in C^{\Psi}(T)_+$, и методы из пп. 3, 4, приходим к такому утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, $\varphi^*(\cdot) \in \Phi$ *и последовательность* $\lambda = (\lambda_k(u) \geq 0)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, *такова, что для любого* $u \in U$ *числа* $\lambda_k(u)|\psi(k)|$ *не возрастают при* $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *— область Фабера, то для любых* $f \in K_{\infty}^{\Psi}(\Omega)_+$ $(f = K\varphi)$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{z \in \Omega} H_n^{\varphi^*}(f; \lambda; z) \leq K \Bigg\{ \lambda_n(u)|\psi(n)| n\varphi^*(|\psi(n)| E_n(\varphi)_{\infty}) + \\ + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\, \varphi^*(|\psi(k)| E_k(\varphi)_{\infty}) \Bigg\}, \quad K = K(\varphi^*), \tag{26}$$

в котором величина $H_n^{\varphi^*}(f; \lambda; z)$ *определена равенством* (3) *и ряд в правой части* (26) *сходится.*

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – Ч. I. – 426 с. – Ч. II. – 467 с.
2. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближение интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 538 с.
4. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta math. Acad. sci. hung. – 1980. – **35**. – P. 157 – 172.

Получено 24.04.2003