УДК 517.9

А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры),
Т. А. Комлева (Одес. нац. политехн. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПУЧКОВ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОГО БИЛИНЕЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

We consider a differential bilinear inclusion with control and present conditions under which an attainability set for this inclusion is compact.

Розглядається диференціальне білінійне включення, яке містить керування, та наводяться умови, при яких множина досягнення цього включення є компактною.

Обозначим через $\operatorname{comp}(R^n)$ $(\operatorname{conv}(R^n))$ совокупность всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств из пространства R^n с хаусдорфовой метрикой

$$h(A,B) = \min\{d \geq 0 \mid B \subset A + S_d(0), A \subset B + S_d(0)\},$$

где $S_d(0)$ — шар радиуса $d \geq 0$ с центром в точке 0.

Рассмотрим следующее билинейное дифференциальное включение, содержащее управление:

$$\dot{x} \in A(t)x + D(t)uB(t)x + C(t)u + F(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x^0, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$, $C(t)$ — матрица размерности $n \times m$, а $D(t)$ — матрица размерности $1 \times m$, $x \in R^n$, $u \in R^m$ — управление, $t \in [0,T]$, $U(\cdot): [0,T] \to \operatorname{conv}(R^m)$, $F(\cdot): [0,T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ — многозначные отображения.

Определение 1. *Функцию $u(\cdot) \in L_1[0,T]$ такую, что для почти всех $t \in [0,T]$ $u(t) \in U(t)$, будем называть допустимым управлением.*

Множество всех допустимых управлений обозначим через $LU[0,T]$.

Определение 2. *Множество обычных решений дифференциального включения (1), (2), которые соответствуют управлению $u(\cdot) \in LU[0,T]$, будем называть пучком траекторий и обозначать $X(u)$.*

Определение 3. *Многозначной траекторией системы (1), (2), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot) \in LU[0,T]$, будем называть многозначное отображение $X(\cdot, u)$, определяемое соотношением*

$$X(t,u) = \{x(t) \mid x(\cdot) \in X(u)\}, \quad t \in [0,T].$$

Очевидно, что $X(t,u)$ является сечением пучка $X(u)$, соответствующего управлению $u(\cdot) \in LU[0,T]$ в момент времени $t \in [0,T]$.

Предположение. *Предположим, что справедливы следующие условия:*

1) $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$ *абсолютно непрерывны на* $[0,T]$;

2) *существуют константы* $B^M > 0$, $C^M > 0$, $D^M > 0$ *такие, что*

$$\|B(t)\|_S \leq B^M, \quad \|C(t)\|_S \leq C^M, \quad \|D(t)\|_{R^n} \leq D^M$$

для всех $t \in [0,T]$;

3) *существуют константы* $B^{DM} > 0$, $C^{DM} > 0$, $D^{DM} > 0$ *такие, что*

$$\|B'(t)\|_S \leq B^{DM}, \quad \|C'(t)\|_S \leq C^{DM}, \quad \|D'(t)\|_{R^n} \leq D^{DM}$$

для почти всех $t \in [0,T]$;

4) $B(t)$, $t \in [0, T]$, *коммутируют при различных* t, *т. е.* $\forall t', t''$ $B(t')B(t'') = B(t'')B(t')$;

5) $A(\cdot)$ *измерима на* $[0, T]$;

6) *существует константа* $A^M > 0$ *такая, что*

$$\|A(t)\|_S \le A^M$$

для почти всех $t \in [0, T]$;

7) *для всех* $t \in [0, T]$:

a) *существует матрица* $DN(t) = (D^\top(t)D(t))^{-1}$,

b) $DN(\cdot)$ *абсолютно непрерывна на* $[0, T]$,

c) *существуют константы* $DN^M > 0$, $DN^{DM} > 0$ *такие, что*

$$\|DN(t)\|_S \le DN^M, \quad \|DN'(t)\|_S \le DN^{DM};$$

8) $F(\cdot)$, $U(\cdot)$ *измеримы на* $[0, T]$;

9) *существуют константы* $\varphi^M > 0$, $\upsilon^M > 0$ *такие, что*

$$|F(t)| < \varphi^M, \quad |U(t)| < \upsilon^M$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Здесь и далее под нормой $\|\cdot\|_S$ будем понимать спектральную норму.

Лемма 1. *Пусть выполняются все условия предположения. Тогда фундаментальную матрицу системы* (1), (2) *можно представить в виде*

$$\Phi(t, u) = \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int_0^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k} \left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_{k+1-j}} D(s)u(s)B(s)\,ds\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, A(\tau_{k+1-j})\exp\left(\int_0^{\tau_{k+1-j}} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right), \tag{3}$$

$$\Phi^{-1}(t, u) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int_0^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k} \left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_j} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\left(-A(\tau_j)\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, \exp\left(\int_0^{\tau_j} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right)\exp\left(-\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right), \tag{4}$$

где I *— единичная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\Phi^i(t, u)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\Phi^0(t, u) = \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right),$$

$$\frac{d}{dt}\Phi^{i+1}(t, u) = D(t)u(t)B(t)\Phi^{i+1}(t, u) + A(t)\Phi^i(t, u), \quad \Phi^{i+1}(0, u) = I,$$

т. е.

$$\Phi^{i+1}(t, u) = \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\left(I + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s D(\tau)u(\tau)B(\tau)\,d\tau\right)A(s)\Phi^i(s, u)\,ds\right),$$

или

$$\Phi^{i+1}(t,u) = \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\left(I + \sum_{k=1}^{i+1}\int_0^{t=\tau_{k+1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\prod_{j=1}^{k}\left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_{k+1-j}} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, A(\tau_{k+1-j})\exp\left(\int_0^{\tau_{k+1-j}} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\right\}d\tau_1\ldots d\tau_k\right).$$

Покажем, что данная последовательность сходится к решению однородной матричной системы

$$\dot{X} = [A(t)+D(t)u(t)B(t)]X, \quad X(0) = I.$$

Очевидно, что решение данной системы $\Phi(t,u)$ представимо в виде

$$\Phi(t,u) = \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t D(\tau)u(\tau)B(\tau)\,d\tau\right)A(s)\Phi(s,u)\,ds.$$

Следовательно,

$$\left\|\Phi^{i+1}(t,u)-\Phi(t,u)\right\|_S \le \int_0^t e^{D^M B^M \upsilon^M (t-s)} A^M \left\|\Phi(s,u)-\Phi^i(s,u)\right\|_S ds \le$$

$$\le M\int_0^t \left\|\Phi(s,u)-\Phi^i(s,u)\right\|_S ds \le \frac{(Mt)^{i+1}}{(i+1)!}\max_{t\in[0,T]}\left\|\Phi(t,u)-\Phi^0(t,u)\right\|_S,$$

где $M = e^{D^M B^M \upsilon^M T} A^M$.

Таким образом, видно, что по спектральной норме последовательность $\{\Phi^i(t,u)\}_{i=0}^{\infty}$ сходится к решению однородной матричной системы при $i\to\infty$. С другой стороны, очевидно, что правая часть (3) является пределом последовательности $\{\Phi^i(t,u)\}_{i=0}^{\infty}$. Следовательно, $\Phi(t,u)$ имеет вид (3).

Проводя аналогичные рассуждения в случае последовательности $\{\Phi_i^{-1}(t,u)\}_{i=0}^{\infty}$, можно получить представление (4), что и завершает доказательство леммы.

Обозначим

$$w(t,u) = \int_0^t D(s)u(s)\,ds, \tag{5}$$

$$E_w(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^i(t)w^{i+1}(t,u)}{(i+1)!}(-1)^i + \sum_{i=1}^{\infty} i\int_0^t \left(-B^{i-1}(s)\right)B'(s)\frac{w^{i+1}(s,u)}{(i+1)!}\,ds. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются все условия предположения и, кроме того, предположим, что* $E_w(s)$, $\exp\left(\int_0^t B'(s,u)w(s,u)ds\right)$, $\exp B(t)w(t,u)$, $B'(s)$ *коммутируют между собой. Тогда каждому допустимому управлению* $u(\cdot)\in LU[0,T]$ *соответствует многозначная траектория* $X(\cdot,u)$ *системы* (1), (2), *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *при всех* $t\in[0,T]$ *многозначная траектория представима в виде*

$$X(t,u) = \Phi(t,u)\left[x^0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s,u)A(s)E_w(s)\exp(B(s)w(s,u))C(s)DN(s)D^{\top}(s)\,ds - \right.$$

$$- \int_0^t \Phi^{-1}(s,u)E_w(s)\exp(B(s)w(s,u))\left\{B'(s)w(s,u)\,C(s)DN(s)D^{\top}(s) + \right.$$

$$+\ C'(s)DN(s)D^{\top}(s) + C(s)\left[DN'(s)D^{\top}(s) + DN(s)\left(D^{\top}(s)\right)'\right]\Big\}\Bigg]ds\ +$$

$$+\ E_w(t)\exp\left(B(t)w(t,u)\right)C(t)DN(t)D^{\top}(t) + \Phi(t,u)\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)F(s)\,ds; \qquad (7)$$

2) *при каждом фиксированном* $u(\cdot) \in LU[0,T]$ *многозначная траектория* $X(\cdot, u)$ *является абсолютно непрерывным многозначным отображением на* $[0,T]$;

3) *при всех* $t \in [0,T]$ *имеем* $X(t,u) \in \operatorname{conv}(R^n)$.

Доказательство. Из формулы (4) следует

$$\Phi^{-1}(t,u) = \Phi_A(t,u)\exp\left(-\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right), \qquad (8)$$

где

$$\Phi_A(t,u) = I + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t=\tau_{k+1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\prod_{i=1}^{k}\left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_i} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)(-A(\tau_i))\ \times\right.$$

$$\left.\times\ \exp\left(\int_0^{\tau_i} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)\right\}d\tau_1\ldots d\tau_k.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\Phi_A(t,u) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t=\tau_{k+1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\prod_{i=1}^{k}\left\{\exp\left(-\int_0^{\tau_i} D(s)u(s)B(s)\,ds\right)(-A(\tau_i))\exp\left(\int_0^{\tau_i} D(s)u(s)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times B(s)\,ds\right)\right\}d\tau_1\ldots d\tau_k\Bigg)\exp\left(-\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right)(-A(t))\ \exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}\Phi_A(t,u) = -\ \Phi_A(t,u)\exp\left(-\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right)A(t)\exp\left(\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds\right),$$

а также

$$\Phi_A(0,u) = I.$$

Используя формулу (8), легко показать, что

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)C(s)u(s)ds = \int_0^t \Phi_A(s,u)\exp(-B(s)w(s,u))\exp\left(\int_0^s D(\tau)u(\tau)B(\tau)d\tau\right)C(s)u(s)ds.$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$\int_0^t D(s)u(s)B(s)\,ds = B(t)w(t,u) - \int_0^t B'(s)w(s,u)\,ds. \qquad (9)$$

Следовательно,

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)C(s)u(s)ds = \int_0^t \Phi_A(s,u)\exp(-B(s)w(s,u))\exp\left(\int_0^s B'(\tau)w(\tau,u)d\tau\right)C(s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^t \Phi_A(s,u)\exp(-B(s)w(s,u))\exp\left(\int_0^s B'(\tau)\,w(\tau,u)d\tau\right)C(s)DN(s)D^\top(s)D(s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^t \Phi_A(s,u)D(s)u(s)\exp(-B(s)w(s,u))\exp\left(\int_0^s B'(\tau)\,w(\tau,u)d\tau\right)C(s)\,DN(s)\,D^\top(s)\,ds.$$

Очевидно, что функция $E_w(s)$, вычисляемая по формуле (6), является решением системы

$$\frac{d}{ds}E_w(s) = D(s)u(s)\exp\left(-B(s)w(s,u)\right),$$

$$E_w(0) = 0.$$

Тогда

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)C(s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^t \Phi_A(s,u)\left(\frac{d}{ds}E_w(s)\right)\exp\left(\int_0^s B'(\tau)\,w(\tau,u)d\tau\right)C(s)\,DN(s)\,D^\top(s)\,ds =$$

$$= \Phi_A(t,u)E_w(t)\exp\left(\int_0^t B'(s)w(s,u)ds\right)C(t)DN(t)D^\top(t) - \int_0^t (-\Phi_A(s,u))\exp\left(-\int_0^s D(\tau)u(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\, B(\tau)d\tau\right)A(s)\exp\left(\int_0^s D(\tau)u(\tau)B(\tau)d\tau\right)E_w(s)\exp\left(\int_0^s B'(\tau)w(\tau,u)d\tau\right)C(s)DN(s)D^\top(s)ds -$$

$$-\int_0^t \Phi_A(s,u)E_w(s)B'(s)w(s,u)\exp\left(\int_0^s B'(\tau)w(\tau,u)d\tau\right)C(s)\,DN(s)D^\top(s)\,ds -$$

$$-\int_0^t \Phi_A(s,u)E_w(s)\exp\left(\int_0^s B'(\tau)w(\tau,u)d\tau\right)C'(s)\,DN(s)D^\top(s)ds - \int_0^t \Phi_A(s,u)E_w(s)\times$$

$$\times\exp\left(\int_0^s B'(\tau)w(\tau,u)d\tau\right)C(s)\left[DN'(s)\,D^\top(s) + DN(s)\left(D^\top(s)\right)'\right]ds.$$

Из последнего равенства, используя формулы (8) и (9), имеем

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)C(s)u(s)ds = \Phi^{-1}(t,u)\,E_w(t)\exp(B(t)w(t,u))\,C(t)DN(t)D^\top(t) +$$

$$+\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)\,A(s)E_w(s)\exp(B(s)w(s,u))\,C(s)DN(s)D^\top(s)\,ds -$$

$$-\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)E_w(s)\exp(B(s)w(s,u))\Big[B'(s)w(s,u)\,C(s)DN(s)D^\top(s) +$$

$$+\, C'(s)\,DN(s)\,D^\top(s) + C(s)\left\{DN'(s)\,D^\top(s) + DN(s)\left(D^\top(s)\right)'\right\}\Big]ds. \tag{10}$$

Как следует из теории дифференциальных включений, $X(t,u)$ можно представить в виде

$$X(t, u) = \Phi(t, u)x^0 + \Phi(t,u)\int_0^t \Phi^{-1}(s,u)[C(s)u + F(s)]ds. \tag{11}$$

Поэтому, подставляя (10) в равенство (11), получаем формулу (7).

Проверим выполнение условия 2. Обозначим

$$G(t, u) = x^0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s,u)[C(s)u + F(s)]ds.$$

Тогда (3) можно записать в виде $X(t, u) = \Phi(t, u)G(t, u)$. В силу предположения и теоремы (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега) [1] получим, что матрица $\Phi(t, u)$ — абсолютно непрерывна.

Обозначим $R(s, u) = \Phi^{-1}(s,u)[C(s)u + F(s)]$. Тогда $G(t, u) = x^0 + \int_0^t R(s,u)ds$.

Поскольку:

a) многозначное отображение $R(t, u)$ измеримо на $[0, T]$,

b) для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ и $t_1 < t_2$ существует множество $K(t_1, t_2)$ такое, что

$$G(t_2, u) = G(t_1, u) + K(t_1, t_2),$$

где

$$G(t_1, u) = x^0 + \int_0^{t_1} R(s,u)ds, \quad G(t_2, u) = x^0 + \int_0^{t_2} R(s,u)ds, \quad K(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} R(s,u)ds,$$

многозначное отображение $G(t, u)$ абсолютно непрерывно по t на $[0, T]$. Таким образом, мы доказали, что многозначная траектория $X(t, u)$ является абсолютно непрерывной на $[0, T]$.

Выполнение условия 3 следует из предположения, теоремы А. А. Ляпунова [2] и представления многозначной траектории $X(t, u)$ в виде (7), что и завершает доказательство.

Лемма 2. *Пусть выполняются все условия предположения. Пусть* $X(t, u_1)$ *и* $X(t, u_2)$ *являются многозначными траекториями системы* (1), (2) *при соответствующих допустимых управлениях* $u_1(\cdot)$ *и* $u_2(\cdot)$. *Тогда для любого* $t \in [0, T]$ *выполняются неравенства*

$$h(X(t, u_1), X(t, u_2)) \le K \max_{\tau\in[0,t]} \left\| \int_0^\tau u_1(s)\,ds - \int_0^\tau u_2(s)\,ds \right\|_{R^n} \tag{12}$$

и

$$\max_{\tau\in[0,t]} h(X(\tau, u_1), X(\tau, u_2)) \le K \max_{\tau\in[0,t]} \left\| \int_0^\tau u_1(s)\,ds - \int_0^\tau u_2(s)\,ds \right\|_{R^n}, \tag{13}$$

где

$$K = \{K_1K_2\|x^0\|_{R^n} + 2K_1 K_2^2(K_3 + K_4K_5(1 + B^MD^Mv^MT))K_4K_6T + K_2^2K_4(1 +$$

$$+ K_4K_5(1 + B^MD^Mv^MT))K_6T + K_2^2K_4(K_3 + K_4K_5B^MD^Mv^MT)B^{DM}C^MDN^MD^MT +$$

$$+ K_4(1 + K_4K_5(1 + B^MD^Mv^MT))C^MDN^MD^M + 2K_1 K_2^2T\varphi^M\}D^{DM},$$

$$K_1 = (B^M + TB^{DM})(1 + A^MT) + B^MA^MT,$$

$$K_2 = e^{((A^M + B^MD^Mv^M)T)},$$

$$K_3 = \{e^{(B^M D^M \upsilon^M T)} - 1\}/B^M,$$

$$K_4 = e^{(B^M D^M \upsilon^M T)},$$

$$K_5 = D^M \upsilon^M T^2 B^{DM},$$

$$K_6 = A^M C^M DN^M D^M + B^{DM} C^M D^{2M} \upsilon^M DN^M T + C^{DM} DN^M D^M +$$
$$+ C^M [DN^{DM} D^M + DN^M D^{DM}].$$

Доказательство. Очевидно, что для любой последовательности матриц $X_1, \ldots, X_k$, $Y_1, \ldots, Y_k$ выполняются условия

$$\prod_{i=1}^{k} X_i - \prod_{i=1}^{k} Y_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} Y_j \right) (X_i - Y_i) \left(\prod_{j=i+1}^{k} X_j \right)$$

$\left(\text{при предположении, что } \prod_{i=p}^{q} P_i = 1, \text{ если } q < p \right)$.

Выберем произвольное $t \in [0, T]$ и, использовав формулы (3) и (9), рассмотрим

$$\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) = R(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int_0^{\tau_2} \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=0}^{i-2} Q_2^{k-j} A(\tau_{k-j}) \right) \left(Q_1^{k-i+1} - Q_2^{k-i+1} \right) \times$$

$$\times A(\tau_{k-i+1}) \left(\prod_{j=1}^{k-1} Q_1^{k-j} A(\tau_{k-j}) \right) \exp\left(B(\tau_1) w(\tau_1, u) - \int_0^{\tau_1} B(\alpha) w(\alpha, u)\, d\alpha \right) d\tau_1 \ldots d\tau_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int_0^{\tau_2} \left(\prod_{i=0}^{k-1} Q_2^{k-i} A(\tau_{k-i}) \right) R(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k,$$

где

$$Q_p^q = \exp\left(\int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} D(s) u_p(s) ds \right) =$$

$$= \exp\left(B(\tau_{q+1}) w(\tau_{q+1}, u_p) - B(\tau_q) w(\tau_q, u_p) + \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} B(s) w(s, u_p) ds \right), \quad p = 1, 2,$$

$$R(t) = \exp\left(B(t) w(t, u_1) - \int_0^t B'(s) w(s, u_1)\, ds \right) - \exp\left(B(t) w(t, u_2) - \int_0^t B'(s) w(s, u_2)\, ds \right).$$

Тогда

$$\|Q_1^q - Q_2^q\|_S \le \max_{0 \le \theta \le 1} \left\{ \|\exp(Q^*)\|_S \right\} \Bigg\| B(\tau_{q+1}) w(\tau_{q+1}, u_1) - B(\tau_q) w(\tau_q, u_1) +$$

$$+ \int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} B'(s) w(s, u_1) ds - B(\tau_{q+1}) w(\tau_{q+1}, u_2) + B(\tau_q) w(\tau_q, u_2) - \int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} B'(s) w(s, u_2) ds \Bigg\|_{R^n},$$

где

$$Q^* = (1-\theta)\int\limits_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} D(s)u_1(s)B(s)\,ds + \theta\int\limits_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} D(s)u_2(s)B(s)\,ds, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Таким образом, можно записать

$$\|Q^*\|_S \le (1-\theta)D^M B^M \upsilon^M |\tau_{q+1}-\tau_q| + \theta D^M B^M \upsilon^M |\tau_{q+1}-\tau_q| = D^M B^M \upsilon^M |\tau_{q+1}-\tau_q|.$$

Следовательно,

$$\|Q_1^q - Q_2^q\|_S \le$$
$$\le e^{D^M B^M \upsilon^M |\tau_{q+1}-\tau_q|}\left(2B^M + B^{DM}|\tau_{q+1}-\tau_q|\right)\max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n}. \tag{14}$$

Более того,

$$\|Q_p^q\|_S \le e^{D^M B^M \upsilon^M |\tau_{q+1}-\tau_q|}. \tag{15}$$

Аналогично можно получить

$$\|R(t)\|_S \le e^{D^M B^M \upsilon^M |t|}\left(B^M + tB^{DM}\right)\max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n}. \tag{16}$$

Используя соотношения (14) – (16), находим

$$\|\Phi(t,u_1)-\Phi(t,u_2)\|_S \le \left\{e^{D^M B^M \upsilon^M T}\left(B^M + TB^{DM}\right) + \right.$$
$$+ \left(2B^M + TB^{DM}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int\limits_0^{\tau_2} e^{D^M B^M \upsilon^M \sum\limits_{q=1}^{k}|\tau_{q+1}-\tau_q|}\left(A^M\right)^k e^{D^M B^M \upsilon^M \tau_1}\,d\tau_1\ldots d\tau_k +$$
$$\left. + \left(B^M + TB^{DM}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{t=\tau_{k+1}} \ldots \int\limits_0^{\tau_2} e^{D^M B^M \upsilon^M \sum\limits_{q=1}^{k}|\tau_{q+1}-\tau_q|}\left(A^M\right)^k e^{D^M B^M \upsilon^M \tau_1}\,d\tau_1\ldots d\tau_k\right\} \times$$
$$\times \max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n}.$$

Полагая $t = \tau_{k+1} \ge \tau_k \ge \ldots \ge \tau_1$, имеем $\sum\limits_{q=1}^{k}|\tau_{q+1}-\tau_q| = \tau_{k+1} - \tau_1 = t - \tau_1$. Следовательно,

$$\|\Phi(t,u_1)-\Phi(t,u_2)\|_S \le$$
$$\le e^{D^M B^M \upsilon^M T}\left\{\left(B^M + TB^{DM}\right) + \left(2B^M + TB^{DM}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k\left(A^M\right)^k \frac{T^k}{k!} + \left(B^M + \right.\right.$$
$$\left. + TB^{DM}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(A^M\right)^k \frac{T^k}{k!}\right\}\max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n} = e^{D^M B^M \upsilon^M T}\left\{e^{A^M T}\left(B^M + TB^{DM}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(2B^M + TB^{DM}\right)\left(A^M T\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(A^M\right)^{k-1}\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}\right\}\max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n} =$$
$$= e^{(D^M B^M \upsilon^M + A^M)T}\left\{\left(B^M + TB^{DM}\right)\left[1 + A^M T\right] + B^M A^M T\right\}\max_{\tau\in[0,t]}\|w(\tau,u_1)-w(\tau,u_2)\|_{R^n}.$$

В результате получаем следующую оценку:

$$\| \Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) \|_S \leq K_1 K_2 \max_{\tau\in[0,t]} \| w(\tau, u_1) - w(\tau, u_2) \|_{R^n}. \tag{17}$$

Проведя аналогичные рассуждения, легко показать, что

$$\| \Phi^{-1}(t, u_1) - \Phi^{-1}(t, u_2) \|_S \leq K_1 K_2 \max_{\tau\in[0,t]} \| w(\tau, u_1) - w(\tau, u_2) \|_{R^n}, \tag{18}$$

а также

$$\| \Phi(t, u) \|_S \leq K_2 \tag{19}$$

и

$$\| \Phi^{-1}(t, u) \|_S \leq K_2. \tag{20}$$

Используя условия предположения и формулу (6), получаем оценку

$$\| E_w(s) \|_S \leq \frac{e^{D^M B^M \upsilon^M s} - 1}{B^M} + e^{D^M B^M \upsilon^M s} \left(D^M \upsilon^M\right)^2 s^3 B^{DM},$$

откуда

$$\| E_w(s) \|_S \leq K_3 + K_4 K_5 D^M \upsilon^M s. \tag{21}$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была получена оценка (14), имеем

$$\begin{aligned} &\| E_{w1}(t) \exp(B(t) w(t, u_1)) - E_{w2}(t) \exp(B(t) w(t, u_2)) \|_S \leq \\ &\leq K_4 \left(1 + K_4 K_5 \left(1 + B^M D^M \upsilon^M T\right)\right) \max_{\tau\in[0,t]} \| w(\tau, u_1) - w(\tau, u_2) \|_{R^n}. \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь можно вывести оценку для решения системы (1), (2):

$$\begin{aligned} &h(X(t,u_1), X(t,u_2)) \leq \|\Phi(t,u_1) - \Phi(t,u_2)\|_S \Bigg(\|x^0\|_{R^n} + \int_0^t \|\Phi^{-1}(s,u_1)\|_S \, \|A(s)\|_S \|E_{w1}(s)\|_S \times \\ &\times \exp\left(\|B(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n}\right) \|C(s)\|_S \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} \, ds - \int_0^t \|\Phi^{-1}(s,u_1)\|_S \|E_{w1}(s)\|_S \times \\ &\times \exp\left(\|B(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n}\right) \left(\|B'(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n} \|C(s)\|_S \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|C'(s)\|_S \times \right. \\ &\left. \times \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|C(s)\|_S \left\{ \|DN'(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|DN(s)\|_S \|(D^\top(s))'\|_{R^n} \right\} \right) ds \Bigg) + \\ &+ \|\Phi(t,u_2)\|_S \int_0^t \|\Phi^{-1}(s,u_1) - \Phi^{-1}(s,u_2)\|_S \, \|A(s)\|_S \|E_{w1}(s)\|_S \exp\left(\|B(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n}\right) \times \\ &\times \|C(s)\|_S \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} \, ds - \|\Phi(t,u_2)\|_S \int_0^t \|\Phi^{-1}(s,u_1) - \Phi^{-1}(s,u_2)\|_S \, \|E_{w1}(s)\|_S \times \\ &\times \exp\left(\|B(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n}\right) \left(\|B'(s)\|_S \|w(s,u_1)\|_{R^n} \|C(s)\|_S \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|C'(s)\|_S \times \right. \\ &\left. \times \|DN(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|C(s)\|_S \left\{ \|DN'(s)\|_S \|D^\top(s)\|_{R^n} + \|DN(s)\|_S \|(D^\top(s))'\|_{R^n} \right\} \right) ds + \\ &+ \|\Phi(t,u_2)\|_S \int_0^t \|\Phi^{-1}(s,u_2)\|_S \, \|A(s)\|_S \|E_{w1}(s) \exp(B(s) w(s,u_1)) - E_{w2}(s) \exp(B(s) w(s,u_2))\|_S \times \end{aligned}$$

$$\times\|C(s)\|_S\|DN(s)\|_S\|D^{\top}(s)\|_{R^n}ds-\|\Phi(t,u_2)\|_S\int_0^t\|\Phi^{-1}(s,u_2)\|_S\,\|E_{w1}(s)\exp(B(s)w(s,u_1))-$$

$$-E_{w2}(s)\exp(B(s)w(s,u_2))\|_S\Big(\|B'(s)\|_S\|w(s,u_1)\|_{R^n}\|C(s)\|_S\|DN(s)\|_S\|D^{\top}(s)\|_{R^n}+\|C'(s)\|_S\times$$

$$\times\|DN(s)\|_S\|D^{\top}(s)\|_{R^n}+\|C(s)\|_S\big\{\|DN'(s)\|_S\|D^{\top}(s)\|_{R^n}+\|DN(s)\|_S\|(D^{\top}(s))'\|_{R^n}\big\}\Big)ds-$$

$$-\|\Phi(t,u_2)\|_S\int_0^t\|\Phi^{-1}(s,u_2)\|_S\|E_{w2}(s)\|_S\exp\big(\|B(s)\|_S\|w(s,u_2)\|_{R^n}\big)\big(\|B'(s)\|_S\times$$

$$\times\|w(s,u_1)-w(s,u_2)\|_{R^n}\|C(s)\|_S\|DN(s)\|_S\|D^{\top}(s)\|_{R^n}\big)ds+\|E_{w1}(t)\exp(B(t)w(t,u_1))-$$

$$-E_{w2}(t)\exp(B(t)w(t,u_2))\|_S\|C(t)\|_S\|DN(t)\|_S\|D^{\top}(t)\|_{R^n}+\|\Phi(t,u_1)-\Phi(t,u_2)\|_S\times$$

$$\times\int_0^t\|\Phi^{-1}(s,u_2)\|_S\,h(F(s),0)ds+\|\Phi(t,u_2)\|_S\int_0^t\|\Phi^{-1}(s,u_1)-\Phi^{-1}(s,u_2)\|_S\,h(F(s),0)\,ds.$$

Из формулы (9), записанной в виде $\int_0^t D(s)u(s)ds = D(t)u(t) - \int_0^t D'(s)u(s)ds$, следует

$$\|w(t,u)\|_{R^n} \le D^M v^M - D^{DM}\left\|\int_0^t u(s)\,ds\right\|_{R^n}.$$

Учитывая последнее неравенство, предположения данной леммы, оценки (17) – (22) и свойства

$$h\left(\int_{t_0}^{t_1} F(s)\,ds,\ 0\right) \le \int_{t_0}^{t_1} h(F(s),0)\,ds,$$

$$\|M\cdot y\|_{R^n} \le \|M\|\cdot\|y\|_{R^n},$$

где M — матрица размерности $n\times n$, $y\in R^n$ — вектор, получаем оценку (12). В результате из неравенства (12) получим оценку (13), что и завершит доказательство.

Замечание **1.** Аналогичная оценка получена в работе [3] для системы вида

$$\dot x = A(t)x + uB(t)x + C(t)u + f(t),$$

$$x(t_0) = x^0,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерности $n\times n$, $C(t), f(t)$ — функции со значениями из R^n, $u\in[u_{\min}, u_{\max}]\subset R^1$, $x\in R^n$, $t\in[t_0,t_1]$.

Лемма 3. *Пусть выполняются все условия предположения. Тогда множество достижимости* $\overline{Y}$ *системы*

$$\dot x \in A(t)x + D(t)U(t)B(t)x + C(t)U(t) + F(t), \qquad x(0) = x^0,$$

является компактным.

Доказательство. В силу предположения, определения множества $\overline{Y}$ и результатов [4] получим, что множество $\overline{Y}$ является компактным.

Построим множество $\breve{Y}$, состоящее из всех непустых подмножеств множества $\overline{Y}$. Из следствия [5] следует, что множество $\breve{Y}$ является компактным.

Определение 4. *Множеством достижимости* $Y(t)$ *системы* (1), (2) *назовем множество всех множеств из пространства* $\operatorname{conv}(R^n)$, *в которые можно перейти на отрезке времени* $[0, t]$ *из начального состояния* x^0 *при всевозможных допустимых управлениях* $u(\cdot) \in LU[0, t]$, *т.е.* $Y(t) = \{X(t, u) \mid u(\cdot) \in \in LU[0, t]\}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия предположения. Тогда множество достижимости* $Y(t)$ *системы* (1), (2) *является непустым и компактным.*

Доказательство. Непустота $Y(t)$ очевидна. Осталось доказать компактность. Для этого докажем, что множество $Y(t)$ замкнуто. Выберем произвольную сходящуюся последовательность $\{X(t, u_p)\}_{p=1}^{\infty} \in Y$ и обозначим $\overline{X} = \lim\limits_{p\to\infty} X(t, u_p)$. Докажем, что $\overline{X} \in Y$. Очевидно, что последовательности $\{X(t, u_p)\}_{p=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}$. Поскольку последовательность $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}$ является ограниченной, из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность $\{u_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому $u_*(\cdot)$. Но так как $U(t) \in \operatorname{conv}(R^m)$ для всех $t \in [0, T]$, то согласно теореме Мазура [6] существует последовательность выпуклых комбинаций $\left\{v^p(t) = \sum\limits_{i=1}^{m_p} \alpha_i^p u_i^p(t)\right\}$, $t \in [0, T]$, $\alpha_i^p \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m_p} \alpha_i^p = 1$, которая сильно сходится к $u_*(\cdot)$. Следовательно, в последовательности $\{v^p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$ найдется подпоследовательность, которая почти всюду на $[0, T]$ сходится к $u_*(\cdot)$ [1], т. е. $u_*(\cdot) \in LU[0, T]$. Тогда получим $\lim\limits_{p\to\infty} X(t, u_p) = X(t, u_*)$, где $X(t, u_*) \in Y$. Таким образом, $\lim\limits_{p\to\infty} X(t, u_p) = \overline{X}$ и $\lim\limits_{p\to\infty} X(t, u_p) = X(t, u_*) \in Y$. Следовательно, $X(t, u_*) = \overline{X} \in Y$. Значит, множество достижимости $Y(t)$ является замкнутым. Очевидно, что $Y \subset \breve{Y}$, где $\breve{Y}$ является компактным множеством. В силу теоремы 3 [1, с. 99] получаем, что $Y(t)$ — компактное множество, что и завершает доказательство.

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 542 с.
2. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. – М.: Наука, 1985. – С. 194–252.
3. *Celikovsky S.* On the continuous dependence of trajectories of bilinear systems on controls and its applications // Kybernetika. – 1988. – **24**, № 4. – P. 278–292.
4. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
5. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений: Учеб. пос. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1982.
6. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.

Получено 01.10.2002