УДК 517.946

И. И. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We investigate the continuity of solutions of quasilinear parabolic equations near nonsmooth boundary of a cylindrical domain. We prove a sufficient condition of the regularity of boundary point that coincides with the Wiener condition for the Laplace p-operator. The model case of the considered equations is presented by the equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = 0$ with the Laplace p-operator Δ_p for $2n/(n+1) < p < 2$.

Досліджується неперервність розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь біля негладкої границі циліндричної області. Доведено достатню умову регулярності граничної точки, яка збігається з умовою Вінера для p-оператора Лапласа. Модельним випадком рівнянь, які розглядаються, є рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = 0$ з p-оператором Лапласа Δ_p при $2n/(n+1) < p < 2$.

1. Введение. В настоящей статье изучается поведение вблизи негладкой границы цилиндрической области решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (x, t) \in \Omega_T; \tag{1.1}$$

$(x, t) \in \Omega_T \equiv \Omega \times (0, T)$ при условии, что функции $a_j(x, t, u, \xi)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, возрастают при больших $|\xi|$, как $|\xi|^{p-1}$, $2n/(n+1) < p < 2$. Гельдеровость решений уравнения (1.1) внутри Ω_T, а также вплоть до достаточно гладкой границы области Ω_T была доказана Е. Ди Бенедетто [1, 2].

Для уравнения теплопроводности вопрос о непрерывности решений вплоть до границы был рассмотрен А. Н. Тихоновым [3]. Для квазилинейного параболического уравнения с линейным ростом главной части достаточное условие регулярности граничной точки получено Н. Эклундом [4], В. П. Цимером [5]. Необходимое условие регулярности граничной точки получено И. В. Скрыпником [6].

В случае $p > 2$ критерий регулярности граничной точки был получен автором [7, 8].

2. Доказательство основной теоремы при предполагаемых априорных оценках. Пусть Ω — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Рассмотрим уравнение (1.1), предположив, что функции $a_i(x, t, u, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, определены при $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $u \in R^1$, $\xi \in R^n$, удовлетворяют условию Каратеодори, условию $a_i(x, t, u, 0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, u, \xi)\xi_i \geq C_1|\xi|^p, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[a_i(x, t, u, \xi) - a_i(x, t, v, \eta)](\xi_i - \eta_i) - [a_0(x, t, u, \xi) - a_0(x, t, v, \eta)](u - v) \geq 0, \tag{2.2}$$

$$|a_i(x, t, u, \xi)| \leq C_2(|u| + |\xi| + 1)^{p-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Для определения решения уравнения (1.1) введем стекловское среднее по t произвольной функции $v(x, t) \in L_1(\Omega_T)$:

$$[v(x,t)]_h = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(x,s)\,ds, \quad 0 < h < T, \quad 0 < t < T-h.$$

Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x,t) \in L_{2,p}(\Omega_T)$ такую, что при всех $\psi(x,t) \in L_2(\Omega_T) \cap L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ выполнено тождество

$$\int_0^{T-h}\int_\Omega \left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_h\psi + \sum_{i=1}^n \left[a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \left[a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h \psi\right\}dx\,dt = 0$$

при всех $0 < h < T$.

***Замечание* 2.1.** Условия (2.1), (2.3) на коэффициенты уравнения (1.1) могут быть ослаблены аналогично условиям в работе [1].

Определение 2.1. *Будем говорить, что* $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ — *регулярная граничная точка области* Ω_T *для уравнения* (2.1), *если для любого определенного в* Ω_T *решения* $u(x,t)$ *этого уравнения, удовлетворяющего условию*

$$\varphi(x,t)[u(x,t)-f(x,t)] \in \overset{\circ}{V}_{2,p}(\Omega_T)$$

с функцией $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}_T) \cap W^{1,1}_{p,2}(\Omega_T)$ *и бесконечно дифференцируемой функцией* $\varphi(x,t)$, *равной единице в окрестности* (x_0,t_0), *выполнено равенство*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\(x,t)\in\Omega_T}} u(x,t) = f(x_0,t_0).$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнены условия* (2.1) – (2.3) *и* $2n/(n+1) < p < 2$. *Для того чтобы точка* $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ *была регулярной граничной точкой области* Ω_T *для уравнения* (1.1), *достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \left\{\frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-p}}\right\}^{1/(p-1)}\frac{dr}{r} = \infty.$$

Здесь $B(x_0,r)$ — *шар радиуса* r *с центром в точке* x_0, $C_p(E)$ — p-*емкость множества* $E \subset R^n$.

Отметим, что из монографии [2] следует существенность предположения $p > 2n/(n+1)$.

Зафиксируем точку $(x_0,t_0) \in S_T \equiv \partial\Omega \times (0,T)$ и рассмотрим цилиндр

$$Q_R \equiv B(x_0,R) \times (t_0 - R^p, t_0)$$

с числом R, удовлетворяющим неравенству $t_0 - R^p > 0$.

Определим

$$\mu^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_R\cap\Omega_T} u, \quad \mu^- = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_R\cap\Omega_T} u,$$

$$\mu_f^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_R\cap\Omega_T} f, \quad \mu_f^- = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_R\cap\Omega_T} f.$$

Не ограничивая общности, можем считать изучаемое далее решение $u(x,t)$ уравнения (1.1) ограниченным, и пусть $M_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_T}|u(x,t)|$.

Выберем произвольно число ω, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname*{ess\,osc}_{Q_R\cap\Omega_T} u \le \omega \le 2M_0.$$

Пусть s_0 — достаточно большое натуральное число, зависящее лишь от n, p,

C_1, C_2 и определяемое формулируемыми в дальнейшем условиями. Обозначим

$$\Delta(R) = \left\{\frac{C_p(B(x_0, R)\setminus\Omega)}{R^{n-p}}\right\}^{1/(p-1)},$$

$$Q(r, \Delta(R)) = B(x_0, r) \times \left(t_1,\ t_1 + \left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_*}}\right)^{2-p} r^p\right),$$

где число s_* больше, чем s_0, зависит от s_0, n, p, C_1, C_2 и будет определено ниже; t_1 — выбираемое далее число такое, что

$$t_0 - R^p < t_1 < t_1 + \left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_*}}\right)^{2-p} R^p < t_0.$$

С помощью вспомогательных решений, определенных в следующем пункте, доказывается такая теорема.

Теорема 2.2. *Существуют числа* ε, t_1, s_*, s_1, α, *зависящие лишь от* M_0, n, p, C_1, C_2, *удовлетворяющие условиям* $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $s_0 < s_1 < s_*$, $Q(8R, \Delta(R)) \subset Q_R$ *и такие, что из неравенств*

$$\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R) \geq R^{\varepsilon/(2-p)}, \qquad \operatorname{meas}(B(x_0, R)\setminus\Omega) < \alpha \operatorname{meas} B(x_0, R), \tag{2.4}$$

$$\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0}} \geq \mu_f^+ \tag{2.5}$$

следует оценка

$$\operatorname{meas}\left\{(x, t) \in Q(8R, \Delta(R)) : u(x, t) \geq \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \leq (1-\alpha) \operatorname{meas} Q(8R, \Delta(R)).$$

Аналогичным образом из неравенств (2.4) *и*

$$\mu^- + \frac{\omega}{2^{s_0}} \leq \mu_f^- \tag{2.6}$$

следует оценка

$$\operatorname{meas}\left\{(x, t) \in Q(8R, \Delta(R)) : u(x, t) \leq \mu^- + \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \leq (1-\alpha) \operatorname{meas} Q(8R, \Delta(R)).$$

С помощью рассуждений, аналогичных [2, с. 168 – 175], доказывается следующая теорема.

Теорема 2.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1 *и неравенства* (2.4), (2.5). *Тогда для всех*

$$(x, t) \in B(x_0, R/2) \times (t_*,\ t_* + \beta(\omega\Delta(R))^{2-p} R^p)$$

выполнено неравенство

$$u(x, t) \leq \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_*+1}}\Delta(R),$$

где β — *некоторое число, зависящее лишь от* n, p, C_1, C_2, t_* *и такое, что*

$$t_1 < t_* < t_* + \beta(\omega\Delta(R))^{2-p} R^p < t_1 + \left(\frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right)^{2-p} R^p.$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и неравенства* (2.4), (2.6). *Тогда для всех*

$$(x, t) \in B(x_0, R/2) \times (t_*,\ t_* + \beta(\omega\Delta(R))^{2-p} R^p)$$

выполнено неравенство

$$u(x,t) \geq \mu^- + \frac{\omega}{2^{s_*+1}}\Delta(R)$$

с числами β, t_*, *удовлетворяющими условиям теоремы* 2.3.

Из теорем 2.3, 2.4, аналогично рассуждениям работы [7], получим регулярность решения $u(x,t)$ в точке (x_0, t_0).

Заметим, что второе неравенство в условии (2.4) является неограничительным, так как можно добиться его выполнения, переходя, если нужно, к новой области $\tilde{\Omega}$ такой, что $\Omega \subset \tilde{\Omega}$.

3. Оценки вспомогательных решений. Пусть $E_R = B(x_0, R)\setminus\Omega$, определим

$$Q_1 = (B(x_0, 8R)\setminus E_R) \times \left(t_0 - R^p\left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_0}}\right)^{2-p},\ t_0 - \frac{1}{2}R^p\left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_0}}\right)^{2-p}\right),$$

$$Q_2 = B(x_0, 8R) \times \left(t_0 - \frac{1}{2}R^p\left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_0}}\right)^{2-p},\ t_0 - \frac{1}{4}R^p\left(\frac{\omega\,\Delta(R)}{2^{s_0}}\right)^{2-p}\right).$$

В дальнейшем будем считать выполненными условия теоремы 2.1.

В области Q_1 определим функцию $v(x,t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\,a_i\left(x, t, \mu^+ - v, -\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -a_0\left(x, t, \mu^+ - v, -\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$v\left(x,\ t_0 - R^p\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right) = 0, \quad x \in B(x_0, 8R)\setminus E_R, \tag{3.2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial B(x_0, 8R) \times$$
$$\times\left(t_0 - R^p\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p},\ t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right), \tag{3.3}$$

$$v(x,t) = \frac{\omega}{2^{s_0}}, \quad (x,t) \in \partial E_R \times$$
$$\times\left(t_0 - R^p\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p},\ t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right). \tag{3.4}$$

В области Q_2 определим функцию $w(x,t)$ как решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям

$$w\left(x,\ t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right) = 0, \quad x \in E_R, \tag{3.5}$$

$$w\left(x,\ t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right) = v\left(x,\ t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right), \tag{3.6}$$
$$x \in B(x_0, 8R)\setminus E_R,$$

$$w(x,t) = 0, \quad x \in \partial B(x_0, 8R) \times$$
$$\times\left(t_0 - \frac{R^p}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p},\ t_0 - \frac{R^p}{4}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}\right). \tag{3.7}$$

Без ограничения общности считаем, что

$$t_0 = R^p\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right)^{2-p}, \quad B(x_0, 8R) = B(0, 8R) = B_{8R}.$$

Рассмотрим также емкостный потенциал $g(x)$, определяемый как решение задачи Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = 0, \quad x \in B_{8R}\setminus E_R, \tag{3.8}$$

$$g(x) = 1, \quad x \in E_R, \tag{3.9}$$

$$g(x) = 0, \quad x \in \partial B_{8R}. \tag{3.10}$$

В дальнейшем через γ_i обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, p, C_1, C_2. Легко проверить (см., например, [6]), что

$$\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx \le \gamma_1 C_p(E_R). \tag{3.11}$$

Лемма 3.1. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g^2(x)\,dx \le \gamma_2\,\Delta(R)R^n. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — такая функция, что $0 \le \varphi(x) \le 1$, $\varphi(x) \in$ $\in C_0^\infty(B_{8R})$,

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in E_R, \quad \int\limits_{B_{8R}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^p dx \le \gamma_3 C_p(E_R).$$

Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (3.8) – (3.10), пробную функцию

$$[g(x)+\theta]^{-\lambda}g(x) - (1+\theta)^{-\lambda}\varphi(x)$$

с $\lambda \in (0, 1)$, $\theta > 0$. Стандартным путем получаем оценку

$$\int\limits_{B_{8R}} g^{-\lambda}(x)\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx \le \gamma_4 C_p(E_R).$$

Отсюда и из теоремы вложения имеем

$$\int\limits_{B_{8R}}[g(x)]^{(p-\lambda)n/(n-p)}dx \le \gamma_5\left[C_p(E_R)\right]^{n/(n-p)}.$$

Используя ограничение на p и применяя далее неравенство Гельдера, получаем оценку

$$\int\limits_{B_{8R}}[g(x)]^{(p-\lambda)/(p-1)}dx \le \gamma_6\left[\frac{C_p(E_R)}{R^{n-p}}\right]^{1/(p-1)}R^n,$$

из которой при $\lambda = 2-p$ непосредственно следует неравенство (3.12).

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнены условия* (2.1), (2.3) *и неравенство* (2.4) *с* $\varepsilon \le (n+1-2n/p)(2-p)$. *Тогда имеют место оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \gamma_7\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^n, \tag{3.13}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<3t_0/4}\int\limits_{B_{8R}} w^2(x,t)\,dx + \int\limits_{t_0/2}^{3t_0/4}\int\limits_{B_{8R}}\left|\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \gamma_8\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^n. \tag{3.14}$$

Доказательство. Подставляя в соответствующее задаче (3.1) – (3.4) интегральное тождество пробную функцию

$$\left[v(x,t)-\frac{\omega}{2^{s_0}}g(x)\right]_h\chi_\tau(t),$$

где $\chi_\tau(t)$ — характеристическая функция интервала $(0,\tau)$, $0<\tau<t_0/2$, имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2(x,t)\,dx + \iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^p dx \le$$

$$\le\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g^2(x)\,dx + \gamma_9\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^p t_0\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx + \gamma_9 t_0 R^n.$$

Отсюда, используя условие (2.4) и лемму 3.1, получаем (3.13).

Для доказательства неравенства (3.14) в соответствующее задаче (3.1), (3.5) – (3.7) интегральное тождество подставим пробную функцию $[w(x,t)]_h\chi_\tau(t)$ и затем используем неравенства (2.1), (2.3), (3.13).

Обозначим $v_\mu(x,t)=\min\{v(x,t),\mu\}$, $\mu\le\omega/2^{s_0}$.

Лемма 3.3. *Предположим, что выполнены условия леммы* 3.2. *Тогда справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v_\mu(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le\gamma_{10}\mu\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^n + \gamma_{10}R\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^n, \tag{3.15}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<3t_0/4}\int\limits_{B_{8R}} w_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_{t_0/2}^{3t_0/4}\int\limits_{B_{8R}}\left|\frac{\partial w_\mu(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le\gamma_{11}\mu\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^n + \gamma_{11}R\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^n. \tag{3.16}$$

Доказательство. Подставляя в соответствующее задаче (3.1) – (3.4) интегральное тождество функцию $[v_\mu(x,t)-\mu g(x)]_h\chi_\tau(t)$, имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v_\mu^2(x,t)\,dx + \iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v_\mu(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le\gamma_{12}\mu\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v(x,t)g(x)\,dx + \gamma_{12}\mu\iint\limits_{Q_1}\left(|v|+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{p-1}\left(g+\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\right)dx\,dt + \gamma_{12}t_0R^n.$$

Используя неравенства (2.4), Пуанкаре и леммы 3.1, 3.2, отсюда получаем (3.15).

Аналогично устанавливается неравенство (3.16).

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия леммы* 3.2. *Тогда справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{4R\le|x|\le 8R,\,0<t<t_0/2} v(x,t) + \operatorname*{ess\,sup}_{4R\le|x|\le 8R,\,t_0/2<t<3t_0/4} w(x,t) \le \gamma_{13}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R), \tag{3.17}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\le 8R,\, 5t_0/8<t<3t_0/4} w(x,t) \le \gamma_{13}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R). \tag{3.18}$$

Доказательство. Докажем неравенство (3.17) (неравенство (3.18) доказывается аналогично). Рассмотрим две числовые последовательности $\rho_i^{(1)} = 8R(1+2^{-i})/3$, $\rho_i^{(2)} = 8R(3-2^{-i})/3$, $i = 1, 2, \ldots$. Определим последовательность функций $\xi_i(x) \in C_0^\infty(R^n)$ таких, что $\xi_i(x) = 1$, $x \in G_i = \{\rho_i^{(1)} \le |x| \le \rho_i^{(2)}\}$, $\xi_i(x) = 0$, $x \notin G_{i+1}$, $\left|\dfrac{\partial \xi_i(x)}{\partial x}\right| \le \dfrac{\gamma_{14} 2^i}{R}$.

Подставим в соответствующие задачам (3.1) – (3.4) и (3.1), (3.5) – (3.7) интегральные тождества пробные функции $[v(x,t)]_h^l \xi_i^k(x)\chi_\tau(t)$, $[w(x,t)]_h^l \xi_i^k(x)\tilde\chi_\tau(t)$, $l,\ k>1$, где $\tilde\chi_\tau$ — характеристическая функция интервала $(t_0/2, \tau)$, $t_0/2<\tau<3t_0/4$. После стандартных преобразований получим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2} \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} [v(x,t)]^{l+1}\xi_i^k(x)\,dx + \iint\limits_{Q_1} [v(x,t)]^{l-1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p \xi_i^k(x)\,dx\,dt +$$
$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<3t_0/4} \int\limits_{B_{8R}} [w(x,t)]^{l+1}\xi_i^k(x)\,dx + \iint\limits_{Q_2} [v(x,t)]^{l-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p \xi_i^k(x)\,dx\,dt \le$$
$$\le \gamma_{15}(l+k)^{p+1}\frac{2^{ip}}{R^p}\left\{\iint\limits_{Q_1}[v(x,t)]^{l-1+p}\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_2}[w(x,t)]^{l-1+p}\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,dt\right\}. \tag{3.19}$$

Обозначим

$$\mu_i = \operatorname*{ess\,sup}_{G_i\times(0,t_0/2)} v(x,t) + \operatorname*{ess\,sup}_{G_i\times(t_0/2,3t_0/4)} w(x,t).$$

Используя вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \subset L_{np/(n-p)}(\Omega)$, получаем

$$\iint\limits_{Q_1} v^l(x,t)\xi_i^k(x)\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_2} w^l(x,t)\xi_i^k(x)\,dx\,dt \le$$
$$\le \gamma_{16}(l+k)^p\left\{\sup_t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^{l_1 n/(n+p)}(x,t)\xi_i^{kn/(n+p)}(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + \sup_t \int\limits_{B_{8R}} w^{l_1 n/(n+p)}(x)\xi_i^{kn/(n+p)}(x)\,dx\right\}^{p/n} \left\{\iint\limits_{Q_1} v^{l_2 n/(n+p)-p}(x,t)\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p \xi_i^{kn/(n+p)}(x)\,dx\,dt + \right.$$
$$+ \iint\limits_{Q_1} v^{l_2 n/(n+p)}(x,t)\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right|^p \xi_i^{kn/(n+p)-p}(x)\,dxdt +$$
$$+ \iint\limits_{Q_2} w^{l_2 n/(n+p)-p}(x,t)\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p \xi_i^{kn/(n+p)}(x)\,dxdt +$$
$$\left. + \iint\limits_{Q_2} w^{l_2 n/(n+p)}(x,t)\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right|^p \xi_i^{kn/(n+p)-p}(x)\,dxdt\right\},$$

где $l_1 = l+2-p$, $l_2 = l-p(2-p)/n$. Отсюда, используя итерационный метод Мозера и неравенство (3.19), находим

$$\mu_i^{2+2p/n} \le \gamma_{17}\left(\frac{2^i}{R}\right)^{n+p}\left\{\int_0^{t_0/2}\int_{G_{i+1}}[v(x,t)]^{p+2p/n}\,dxdt\; +\right.$$

$$\left.+\int_{t_0/2}^{3t_0/4}\int_{G_{i+1}}[w(x,t)]^{p+2p/n}\,dx\,dt\right\} = \gamma_{17}\left(\frac{2^i}{R}\right)^{n+p} \times$$

$$\times\left\{\int_0^{t_0/2}\int_{G_{i+1}}[v_{\mu_{i+1}}(x,t)]^{p+2p/n}\,dxdt + \int_{t_0/2}^{3t_0/4}\int_{G_{i+1}}[w_{\mu_{i+1}}(x,t)]^{p+2p/n}\,dxdt\right\}.$$

Воспользуемся далее вложением

$$L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(\Omega)) \subset L_{p+2p/n}(\Omega_T),$$

оценками (3.15), (3.16) и получим

$$\mu_i^{2+2p/n} \le \gamma_{18}\left(\frac{2^i}{R}\right)^{n+p}\left\{\left[\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int_{B_{8R}\setminus E_R} v_{\mu_{i+1}}^2(x,t)\,dx\right]^{p/n} \times\right.$$

$$\times\int_0^{t_0/2}\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v_{\mu_{i+1}}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt + \left[\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<3t_0/4}\int_{B_{8R}} w_{\mu_{i+1}}^2(x,t)\,dx\right]^{p/n} \times$$

$$\left.\times\int_{t_0/2}^{3t_0/4}\int_{B_{8R}}\left|\frac{\partial w_{\mu_{i+1}}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt\right\} \le \gamma_{19}\,2^{i(n+p)}[\mu_{i+1}+R]^{1+p/n}\left[\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right]^{1+p/n}. \tag{3.20}$$

Если при некотором $i = i_0$ выполнено

$$\mu_{i_0} \le R, \tag{3.21}$$

то в силу (2.4)

$$\mu_{i_0} \le \gamma_{20}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R),$$

и, таким образом, выполнено (3.17). Если же для всех $i \ge 1$ неравенство (3.21) не выполнено, то из (3.20) имеем

$$\mu_i^{2+2p/n} \le \gamma_{21}\cdot 2^{i(n+p)}\mu_{i+1}^{1+p/n}\left[\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right]^{1+p/n}.$$

Итерируя последнее неравенство, также получаем (3.17).

Лемма 3.5. *Предположим, что выполнены условия леммы* 3.1. *Существуют число* $0<\alpha<1$ *и натуральное число* $s_1 \in (s_0, s_*)$, *не зависящие от* ω, R, *такие, что выполнено хотя бы одно из неравенств*

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in Q_1 : v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \ge \alpha\operatorname{meas} Q_1, \tag{3.22}$$

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in Q_2 : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \ge \alpha\operatorname{meas} Q_2. \tag{3.23}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$, $\varphi(x)=1$ при $|x|\le 5R$, $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge 6R$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \le \frac{\gamma}{R}$.

Подставляя в соответствующие задачам (3.1) – (3.4) и (3.1), (3.5) – (3.7) интегральные тождества пробные функции $[v(x,t)]_h - (\omega/2^{s_0})\varphi(x)$, $[w(x,t)]_h -$ $- (\omega/2^{s_0})\varphi(x)\tilde{\chi}_\tau(t)$, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx + C_1\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\varphi(x)\,v\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx +$$

$$+ \gamma_{22}\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_1}\left[1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1}\right]\left[\varphi+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right]dx\,dt,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{8R}} w^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx + C_1\iint\limits_{B_{8R}\times(t_0/2,\,t)}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le \frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}}\varphi(x)\,w(x,t)\,dx - \frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\varphi(x)\,v\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx +$$

$$+ \gamma_{22}\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_2}\left[1+\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\right]^{p-1}\left[\varphi+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right]dx\,dt.$$

Здесь t — произвольное число из интервала $(5t_0/8,\, 3t_0/4)$. Складывая два последних неравенства и применяя неравенство Юнга, имеем

$$\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \gamma_{23}\frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}} w(x,t)\,dx + \gamma_{23}\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\left\{\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1}dx\,dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0/2}^{3t_0/4}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{p-1}dx\,dt\right\} + \gamma_{23}\frac{\omega}{2^{s_0}}t_0\,R^{n-1}. \tag{3.24}$$

Непосредственно из определения p-емкости следует оценка

$$\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \ge \gamma_{24}\,t_0\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^p C_p(E_R). \tag{3.25}$$

При оценке первого интеграла правой части (3.24) введем множество

$$\left\{w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} = \left\{x\in B_{8R} : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\}$$

и аналогично определяемое множество $\{w(x,t)\le(\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}$. Применяя неравенство (3.18), получаем

$$\int\limits_{B_{8R}} w(x,t)\,dx = \int\limits_{\{w(x,t)>(\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} w(x,t)\,dx + \int\limits_{\{w(x,t)\le(\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} w(x,t)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{\{w(x,t)>(\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} w(x,t)\,dx + \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\,\mathrm{meas}\,B_{8R} \le$$

$$\le \gamma_{25}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\,\mathrm{meas}\left\{x : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} + \gamma_{25}\frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\,R^n. \tag{3.26}$$

Для оценки второго интеграла правой части (3.24) выполним дополнительную подстановку в интегральное тождество, соответствующее задаче (3.1) – (3.4), пробной функции $([v(x,t)]_h + R)^{1-\delta p/(p-1)}\zeta^p(x)$, где $0<\delta<(p-1)/2$, $\zeta(x)\in C_0^\infty(R^n)$ и удовлетворяет условиям $\zeta(x)=1$ при $5R\le|x|\le 6R$, $\zeta(x)=0$ вне интервала $4R\le|x|\le 7R$, $0\le\zeta(x)\le 1$, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|\le\gamma_{26}\frac{1}{R}$. В результате указанной подстановки и последующего оценивания получим

$$\bullet \int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{5R \le |x| \le 6R} (v+R)^{-\delta p/(p-1)} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le \gamma_{27} \int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{4R \le |x| \le 7R} \left\{ R^{-\delta p/(p-1)} + (v+R)^{p-\delta p/(p-1)} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|^p \right\} dx\,dt.$$

Используя последнее неравенство и неравенство Гельдера, имеем

$$\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{5R \le |x| \le 6R} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1} dx\,dt \le \left(\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{5R \le |x| \le 6R} |v_x|^p (v+R)^{-\delta p/(p-1)} dx\,dt \right)^{(p-1)/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{5R \le |x| \le 6R} (v+R)^{\delta p} dx\,dt \right)^{1/p} \le \gamma_{28} \left(\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{B_{8R}} (v+R)^{\delta p} \zeta(x)\,dx\,dt \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{B_{8R}} \left\{ (v+R)^{p-\delta p/(p-1)} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|^p + R^{-\delta p/(p-1)} \right\} dx\,dt \right)^{(p-1)/p}. \tag{3.27}$$

Далее, воспользовавшись неравенством (3.17) и неравенством Юнга, из (3.27) получим

$$\int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{5R \le |x| \le 6R} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1} dx\,dt \le$$

$$\le \gamma_{29} \left(\iint\limits_{\{v \le (\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} v^{\delta p}\, dx\,dt + \iint\limits_{\{v > (\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} v^{\delta p} \zeta(x)\,dx\,dt + t_0 R^{n+\delta p} \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{R^p} \iint\limits_{\{v \le (\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} v^{p-\delta p/(p-1)} dx\,dt + \iint\limits_{\{v > (\omega/2^{s_1})\Delta(R)\}} v^{p-\delta p/(p-1)} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|^p dx\,dt + \right.$$

$$\left. + t_0 R^{n+p-\delta p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \le \gamma_{30} \left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^{p-1} \frac{C_p(E_R)}{R^{n-1}} \operatorname{meas}\left\{ v > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} +$$

$$+ \gamma_{30}\, 2^{-(s_1-s_0)\delta} \left\{ \left[\frac{\omega}{2^{s_0}} \Delta(R) \right]^{p-1} R^{n-p+1} + R^n \right\} t_0, \tag{3.28}$$

где

$$\left\{ v \le \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} = \left\{ (x,t) \in (B_{8R} \setminus E(R)) \times \left(0, \frac{t_0}{2}\right) : v(x,t) \le \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\}.$$

Аналогичная оценка может быть получена для последнего интеграла в (3.24). Объединяя неравенства (3.24) – (3.28), выбирая достаточно большим натуральное число s_1 и используя (2.4), имеем

$$\gamma_{31} t_0 \operatorname{meas} B_{8R} \le t_0 \operatorname{meas}\left\{ x : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} +$$

$$+ \int\limits_{t_0/2}^{3t_0/4} \operatorname{meas}\left\{ x : w(x,\tau) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_0/2} \operatorname{meas}\left\{x : v(x, \tau) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R)\right\} d\tau. \tag{3.29}$$

Из (3.29) следует, что выполняется одно из неравенств

$$\int_0^{t_0/2} \operatorname{meas}\left\{(x, \tau) : v(x, \tau) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R)\right\} d\tau \ \geq \ \frac{\gamma_{31}}{2} \operatorname{meas} Q_1, \tag{3.30}$$

$$t_0 \operatorname{meas}\left\{x : w(x, t) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R)\right\} +$$

$$+ \int_{t_0/2}^{3t_0/4} \operatorname{meas}\left\{(x, \tau) : w(x, \tau) > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R)\right\} d\tau \ \geq \ \frac{\gamma_{31}}{2} \operatorname{meas} Q_2. \tag{3.31}$$

Если выполнено (3.30), то получаем неравенство (3.22) с $\alpha = \gamma_{31}/2$; если же выполнено (3.31), то — неравенство (3.23).

4. Оценки решений уравнения (1.1). Полученные в лемме 3.5 оценки позволяют доказать аналогичные результаты для решения $u(x, t)$ уравнения (1.1) в предположении, что выполнено неравенство (2.5).

Используя теорему сравнения, имеем

$$u(x, t) \leq \mu^+ - v(x, t), \qquad (x, t) \in Q_1, \tag{4.1}$$

$$u(x, t) \leq \mu^+ - w(x, t), \qquad (x, t) \in Q_2 \cap \Omega_T. \tag{4.2}$$

На основании неравенств (2.4), (3.22), (3.23), (4.1), (4.2) устанавливается следующая лемма.

Лемма 4.1. *Существуют* $t_1 \in (0, 3t_0/4)$ *и* $0 < \alpha_1 < 1$, *зависящие лишь от* n, p, C_1, C_2, *такие, что*

$$\operatorname{meas}\left\{x \in B_{8R} \setminus E_R : u(x, t_1) \leq \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R)\right\} \ \leq \ (1 - \alpha_1) \operatorname{meas} B_{8R}.$$

Теперь доказательство теоремы 2.2 следует аналогично доказательству соответствующего утверждения в [2].

1. *Di Benedetto E.* On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ann. sci. norm. supér. Pisa Cl. Sci. Ser. IV, XIII. – 1986. – P. 487–535.
2. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations. – New York: Springer, 1993.
3. *Тихонов А. Н.* Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных // Бюл. Моск. ун-та. Секция А. – 1938. – **1**, вып. 9. – С. 1–49.
4. *Eklund N.* Boundary behavior of solutions of parabolic equations with discontinuous coefficients // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 788–792.
5. *Ziemer W. P.* Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations // J. Different. Equat. – 1980. – **35**, № 3. – P. 291–305.
6. *Скрыпник И. В.* Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 7. – С. 3–22.
7. *Скрыпник И. И.* Регулярность граничной точки для вырождающихся параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1550–1565.
8. *Скрыпник И. И.* Необходимое условие регулярности граничной точки для вырождающихся параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2003. – **8**. – С. 147–167.

Получено 09.01.2004