УДК 517.956

А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев
(Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан,
НАН Республики Казахстан, Алматы)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ПЛОСКОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

For a linear system of second order hyperbolic equations with two independent variables, we investigate problems of the existence and uniqueness of a solution periodic in both variables and a solution bounded on a plane and periodic in one of the variables. By using the method of introducing functional parameters, we obtain sufficient conditions of the one-valued solvability of the problems considered.

Для лінійної системи гіперболічних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними досліджено питання існування та єдиності періодичного за обома змінними розв'язку і періодичного за однією із змінних обмеженого на площині розв'язку. Методом уведення функціональних параметрів отримано достатні умови однозначної розв'язності розглядуваних задач.

Периодические и ограниченные решения систем гиперболических уравнений различными методами исследованы многими авторами [1 – 6]. В настоящей работе вопросы существования, единственности и нахождения двоякопериодических, ограниченных и периодических по одной из двух переменных решений изучаются методом введения функциональных параметров, являющихся обобщением метода параметризации [7] на системы гиперболических уравнений второго порядка. Применение этого метода позволяет установить коэффициентные условия однозначной разрешимости задачи нахождения ограниченного и периодического по одной из переменных решения, а также расширить класс систем гиперболических уравнений, для которых существует единственное двоякопериодическое решение. В частности, при $n = 1$ из полученных результатов следует существование единственного двоякопериодического решения гиперболического уравнения, коэффициенты которого не удовлетворяют условиям теоремы 1.2 из [6].

На плоскости R^2 рассматривается система гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

где $A(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$ непрерывны,

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \qquad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|.$$

Непрерывная на R^2 функция $u(x,t)$, имеющая непрерывные частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\,\partial x}$, называется классическим решением системы (1), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(x,t) \in R^2$.

Пусть $\Omega = J_1 \times J_2$ $\left(J_i \subseteq R^1,\ i = 1, 2\right)$. Обозначим через $C^*(\Omega, R^n)$ пространство ограниченных функций $u\colon \Omega \to R^n$, непрерывных по $t \in J_2$ при $x \in J_1$ и равномерно относительно $t \in J_2$ непрерывных по $x \in J_1$ с нормой $\|u(x,t)\|_* = \sup_{(x,t)\in\Omega} \|u(x,t)\|$.

Исследуются следующие две задачи:

Задача I. При предположениях (ω, T)-периодичности матриц $A(x,t)$, $C(x,t)$ функции $f(x,t)$ требуется найти (ω, T)-периодическое классическое решение системы (1).

Задача II. При предположениях периодичности по x с периодом ω и принадлежности пространству $C^*(R^2, R^1)$ элементов матриц $A(x,t)$, $C(x,t)$ и координат вектор-функции $f(x,t)$ требуется найти ω-периодическое по x классическое решение системы (1), принадлежащее пространству $C^*(R^2, R^n)$ вместе со своей производной по x.

Для задачи I аналогом условия периодичности Пуанкаре по (x,t) являются соотношения

$$u(0,t) = u(\omega,t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega]. \tag{3}$$

Непрерывная в $\overline{\Omega}_1 = [0,\omega] \times [0,T]$ функция $u(x,t)$, имеющая в нем непрерывные частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$ (на границе $\overline{\Omega}_1$ предполагается существование односторонних частных производных), удовлетворяющая системе (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}_1$ и условиям (2), (3), называется классическим решением задачи (1)–(3).

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3). Тогда в силу свойств характеристик $x = m\omega$, $t = kT$, $m, k \in Z$, и равенств (2), (3) функция $u^*(x,t)$, как периодическое продолжение $u(x,t)$ на R^2 по x, t соответственно с периодами ω, T, является классическим решением системы (1) и удовлетворяет условиям периодичности по обеим переменным $u^*(x+\omega,t) = u^*(x,t)$, $u^*(x,t+T) = u^*(x,t)$, $(x,t) \in R^2$.

Для задачи II аналогично можно записать соотношение

$$u(0,t) = u(\omega,t), \quad t \in R^1, \tag{4}$$

$$u(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right), \tag{5}$$

где $\overline{\Omega}_2 = [0,\omega] \times R^1$.

Непрерывная в $\overline{\Omega}_2 = [0,\omega] \times R^1$ функция $u(x,t)$, имеющая в нем непрерывные частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяющая системе (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}_2$ и условиям (4), (5), называется классическим решением задачи (1), (4), (5).

Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1), (4), (5), то вновь используя свойства характеристик, условия (4), (5) и продолжая его на R^2 периодически по x с периодом ω, получаем функцию $u^*(x,t)$ — классическое решение системы (1), удовлетворяющее условию периодичности по x: $u^*(x+\omega,t) = u^*(x,t)$, $(x,t) \in R^2$ и $u^*(x,t) \in C^*(R^2, R^n)$, $\dfrac{\partial u^*(x,t)}{\partial x} \in C^*(R^2, R^n)$.

Цель работы — установить коэффициентные достаточные условия существования и единственности решений задач I и II.

Обозначим через $\mu(t)$ значение неизвестной функции $u(x,t)$ при $x = 0$ и выполним замену $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \mu(t)$. Тогда задача (1)–(3) сведется к следующей эквивалентной задаче с функциональным параметром:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t\partial x} = A(x,t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + C(x,t)\tilde{u} + C(x,t)\mu(t) + f(x,t) \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_1, \tag{6}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0, \quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\tilde{u}(\omega,t) = 0, \quad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$\mu(0) = \mu(T). \tag{10}$$

Здесь последнее равенство следует из соотношений (3), (7). В силу (10) вытекающее из (3) равенство $\tilde{u}(x,0)+\mu(0) = \tilde{u}(x,T)+\mu(T)$ записано в виде (8). Если $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $(\mu(t) = u(0,t),\ \tilde{u}(x,t) = u(x,t) - u(0,t))$ — решение задачи (6)–(10). Наоборот, если пара $(\mu(t), \tilde{u}(x,t))$ — решение задачи (6)–(10), то функция $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \mu(t)$ является решением задачи (1)–(3). Введение функционального параметра $\mu(t)$ позволяет процесс нахождения решения исходной задачи разбить на два этапа: 1) определение функции $\mu(t)$; 2) определение функции $\tilde{u}(x,t)$. При найденном $\mu(t)$ функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением полупериодической краевой задачи (6)–(8) [8]. Введя обозначения $\tilde{v}(x,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}$, $F(x,t) = C(x,t)\tilde{u}(x,t) + C(x,t)\mu(t) + f(x,t)$, задачу (6)–(8) можно записать в виде

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v} + F(x,t), \tag{11}$$

$$\tilde{v}(x,0) = \tilde{v}(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{12}$$

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^x \tilde{v}(\xi,t)\,d\xi, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_1. \tag{13}$$

Равенство (12) следует из (8), а в (13) учтено соотношение (7). Поскольку из условий (7), (9) вытекают равенства $\dfrac{\partial\tilde{u}(0,t)}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial\tilde{u}(\omega,t)}{\partial t} = 0$ для всех $t\in[0,T]$, интегрируя обе части (6) по $x\in[0,\omega]$, получаем функциональное уравнение для определения неизвестной функции $\mu(t)$:

$$\int_0^\omega C(\xi,t)\,d\xi\cdot\mu(t) = -\int_0^\omega A(\xi,t)\tilde{v}(\xi,t)\,d\xi -$$

$$-\int_0^\omega C(\xi,t)\tilde{u}(\xi,t)\,d\xi - \int_0^\omega f(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T]. \tag{14}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$, $\mu(t)$ имеем замкнутую систему уравнений (11)–(14). Поскольку неизвестными являются как $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$, так и $\mu(t)$, применяется метод последовательных приближений, и решение задачи находится по следующему алгоритму.

Шаг 0. Считая, что $\tilde{u}=0$, $\tilde{v}=0$ и матрица $C_\omega(t)=\int_0^\omega C(\xi,t)\,d\xi$ обратима при всех $t\in[0,T]$, из уравнения (14) определяем $\mu^{(0)}(t)$. Из непрерывности на $\overline{\Omega}_1$ матрицы $C(x,t)$, функции $f(x,t)$ и равенств $C(x,0)=C(x,T)$, $f(x,0) = f(x,T)$ следует непрерывность $\mu^{(0)}(t)$ на $[0,T]$ и соотношение $\mu^{(0)}(0) = \mu^{(0)}(T)$. Решая полупериодическую краевую задачу (6)–(8) при $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, находим непрерывные на $\overline{\Omega}_1$ функции $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(0)}(x,t) = \dfrac{\partial\tilde{u}^{(0)}(x,t)}{\partial x}$.

Шаг 1. Считая, что $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t) = \tilde{v}^{(0)}(x,t)$, из уравнения (14) определяем $\mu^{(1)}(t)$. Из непрерывности на $\overline{\Omega}_1$ матрицы $A(x,t)$, функций $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(0)}(x,t)$ и равенств $A(x,0)=A(x,T)$, $\tilde{u}^{(0)}(x,0)=\tilde{u}^{(0)}(x,T)$, $\tilde{v}^{(0)}(x,0)=\tilde{v}^{(0)}(x,T)$ следует непрерывность функции $\mu^{(1)}(t)$ на $[0,T]$ и соотношение $\mu^{(1)}(0)=\mu^{(1)}(T)$. Решая полупериодическую краевую задачу (6)–(8) при $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$, находим непрерывные на $\overline{\Omega}_1$ функции $\tilde{u}^{(1)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(1)}(x,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}^{(1)}(x,t)}{\partial x}$ и т. д.

Задача (11), (12) при фиксированном $x\in[0,\omega]$ является периодической по t краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения. Изменяя x на интервале $[0,\omega]$, получаем семейство периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. *Семейство краевых задач* (11), (12) *называется корректно разрешимым с функцией* $K(x)$, *если для любой непрерывной на* $\overline{\Omega}_1$ *функции* $F(x,t)$ *существует единственное непрерывное на* $\overline{\Omega}_1$ *решение* $\tilde{v}(x,t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|\tilde{v}(x,t)\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|\tilde{v}(x,t)\| \le K(x)\,\|F(x,t)\|_1,$$

где $K(x)$ — *непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция, не зависящая от* $F(x,t)$.

Используя матрицу $A(x,t)$ и число $h>0$: $Nh=T$, строим следующую $(nN\times nN)$-мерную матрицу:

$$Q_\nu(h,x) = \begin{vmatrix} Ih & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\left[I+D_{\nu,N}(h,x)\right]h \\ I+D_{\nu,1}(h,x) & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu,2}(h,x) & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I+D_{\nu,N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(h,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\,d\tau_\nu\ldots d\tau_1.$$

Достаточные условия корректной разрешимости задачи (11), (12) и оценку решения дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $h>0$: $Nh=T$ *и* $\nu=1,2,\ldots$ *матрица* $Q_\nu(h,x)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

а) $\left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(h,x)$,

б) $q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x)\max(1,h)\left[e^{\alpha(x)h} - \sum\limits_{j=0}^{\nu}\dfrac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right] \le \beta < 1$,

где $\gamma_\nu(h,x)$ — *непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция при фиксированных* ν, h, $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|$, $\beta=\mathrm{const}$.

Тогда задача (11), (12) *имеет единственное непрерывное на* $\overline{\Omega}_1$ *решение* $\tilde{v}^*(x,t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\tilde{v}^*(x,t)\right\| \le [k_1(x,h,\nu)+k_2(x,h,\nu)]\max_{t\in[0,T]}\|F(x,t)\|, \tag{15}$$

где

$$k_1(x,h,\nu) = \frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\max(1,h)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}k_0(x,h,\nu) +$$

$$+ h\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\ \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_0(x,h,\nu) =$$

$$= \left[e^{\alpha(x)h}-1\right]\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\ \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}h + he^{\alpha(x)h},$$

$$k_2(x,h,\nu) = \left\{\left[e^{\alpha(x)h}-1\right]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\max(1,h)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}+1\right\}k_0(x,h,\nu).$$

Доказательство. Существование, единственность и оценка (15) при фиксированном $x\in[0,\omega]$ следуют из теоремы 1 [7, с. 54]. Непрерывность решения $\tilde{v}^*(x,t)$ на $\overline{\Omega}_1$ вытекает из (15) в силу непрерывности функций $k_i(x,h,\nu)$ $i = 1, 2$, $F(x,t)$ соответственно на $[0,\omega]$, $\overline{\Omega}_1$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть семейство краевых задач* (11), (12) *корректно разрешимо с функцией* $K(x)$, *матрица* $C_\omega(t)\colon R^n\to R^n$ *обратима при всех* $t\in[0,T]$ *и*

$$q = \left\|[C_\omega(t)]^{-1}\right\|_1\int_0^\omega\left\{\|A(\xi,t)\|_1 e^{K(\xi)\|C(\xi,t)\|_1\xi}+\|C(\xi,t)\|_1\int_0^\xi e^{K(\xi_1)\|C(\xi_1,t)\|_1\xi_1}d\xi_1\right\}d\xi\times$$

$$\times\max_{x\in[0,\omega]}\{K(x)\|C(x,t)\|_1\} < 1.$$

Тогда задача I *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из обратимости матрицы $C_\omega(t)$ при всех $t\in[0,T]$ следует существование единственного решения уравнения (14) — функции $\mu(t)$, и имеет место оценка

$$\|\mu(t)\| \le$$

$$\le \left\|[C_\omega(t)]^{-1}\right\|\left\{\int_0^\omega\|A(\xi,t)\|\|\tilde{v}(\xi,t)\|d\xi+\int_0^\omega\|C(\xi,t)\|\|\tilde{u}(\xi,t)\|d\xi+\int_0^\omega\|f(\xi,t)\|d\xi\right\}. \tag{16}$$

Из корректной разрешимости задачи (11), (12) следует неравенство

$$\|\tilde{v}(x,t)\|_1 \le K(x)\{\|C(x,t)\|_1\|\tilde{u}(x,t)\|_1+\|C(x,t)\|_1\|\mu(t)\|_1+\|f(x,t)\|_1\}.$$

Используя соотношения (13) и неравенства Беллмана – Гронуолла, получаем оценку для функции $\tilde{v}(x,t)$:

$$\|\tilde{v}(x,t)\|_1 \le e^{K(x)\|C(x,t)\|_1 x}\max_{x\in[0,\omega]}\{K(x)\|C(x,t)\|_1\|\mu(t)\|_1+K(x)\|f(x,t)\|_1\}. \tag{17}$$

На основе алгоритма, неравенств (16), (17) и соотношения (13) оценим разности последовательных приближений:

$$\left\|\tilde{v}^{(k)}(x,t)-\tilde{v}^{(k-1)}(x,t)\right\|_1 \le$$

$$\le e^{K(x)\|C(x,t)\|_1 x}\max_{x\in[0,\omega]}\left\{K(x)\|C(x,t)\|_1\left\|\mu^{(k)}(t)-\mu^{(k-1)}(t)\right\|_1\right\}, \tag{18a}$$

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\| \le \left\|[C_\omega(t)]^{-1}\right\|\left\{\int_0^\omega\|A(\xi,t)\|\left\|\tilde{v}^{(k)}(\xi,t)-\tilde{v}^{(k-1)}(\xi,t)\right\|d\xi+\right.$$

$$+\int_0^{\omega}\|C(\xi,t)\|\left\|\tilde{u}^{(k)}(\xi,t)-\tilde{u}^{(k-1)}(\xi,t)\right\|d\xi\Bigg\}, \tag{18б}$$

$$\left\|\tilde{u}^{(k)}(x,t)-\tilde{u}^{(k-1)}(x,t)\right\|_1 \le \int_0^x\left\|\tilde{v}^{(k)}(\xi,t)-\tilde{v}^{(k-1)}(\xi,t)\right\|_1 d\xi. \tag{18в}$$

Используя оценки (18в) и (18а), из неравенств (18б) получаем

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\| \le$$

$$\le \left\|[C_\omega(t)]^{-1}\right\|\int_0^{\omega}\Bigg\{\|A(\xi,t)\|e^{K(\xi)\|C(\xi,t)\|_1\xi}\max_{\xi\in[0,\omega]}\{K(\xi)\|C(\xi,t)\|_1\}+$$

$$+\|C(\xi,t)\|\int_0^{\xi}e^{K(\xi_1)\|C(\xi_1,t)\|_1\xi_1}\max_{\xi_1\in[0,\omega]}\{K(\xi_1)\|C(\xi_1,t)\|_1\}d\xi_1\Bigg\}d\xi\times$$

$$\times\left\|\mu^{(k)}(t)-\mu^{(k-1)}(t)\right\|_1,$$

откуда следует основная оценка

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\|_1 \le q\left\|\mu^{(k)}(t)-\mu^{(k-1)}(t)\right\|_1. \tag{19}$$

Неравенство $q<1$ обеспечивает равномерную сходимость последовательности $\mu^{(k)}(t)$ к непрерывной на $[0,T]$ функции $\mu^*(t)$, и для нее выполняется равенство (10). Из неравенств (18а), (18в) вытекает равномерная относительно $(x,t)\in\overline{\Omega}_1$ сходимость последовательностей $\tilde{v}^{(k)}(x,t)$, $\tilde{u}^{(k)}(x,t)$ соответственно к функциям $\tilde{v}^*(x,t)$, $\tilde{u}^*(x,t)$, принадлежащим $C\left(\overline{\Omega}_1,R^n\right)$. Очевидно, что функция $u^*(x,t)=\mu^*(t)+\tilde{u}^*(x,t)$ принадлежит $C\left(\overline{\Omega}_1,R^n\right)$ и является решением задачи (1)–(3).

Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Пусть существуют два решения: $u_{(1)}(x,t)$ и $u_{(2)}(x,t)$. Тогда соответствующие им пары $\left(\mu_{(1)}(t),\tilde{u}_{(1)}(x,t)\right)$, $\left(\mu_{(2)}(t),\tilde{u}_{(2)}(x,t)\right)$, где $\mu_{(i)}(t)=u_{(i)}(0,t)$, $\tilde{u}_{(i)}(x,t)=u_{(i)}(x,t)-u_{(i)}(0,t)$, $i=1,2$, являются решениями краевой задачи с параметром (6)–(10). Аналогично (18а), (18в), (19) для разностей $\tilde{v}_{(1)}(x,t)-\tilde{v}_{(2)}(x,t)$, $\tilde{u}_{(1)}(x,t)-\tilde{u}_{(2)}(x,t)$, $\mu_{(1)}(t)-\mu_{(2)}(t)$ устанавливаются неравенства

$$\left\|\tilde{v}_{(1)}(x,t)-\tilde{v}_{(2)}(x,t)\right\|_1 \le e^{K(x)\|C(x,t)\|_1x}\max_{x\in[0,\omega]}\left\{K(x)\|C(x,t)\|_1\left\|\mu_{(1)}(t)-\mu_{(2)}(t)\right\|_1\right\},$$

$$\left\|\tilde{u}_{(1)}(x,t)-\tilde{u}_{(2)}(x,t)\right\|_1 \le \int_0^x\left\|\tilde{v}_{(1)}(\xi,t)-\tilde{v}_{(2)}(\xi,t)\right\|_1d\xi,$$

где $\tilde{v}_{(i)}(x,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}_{(i)}(x,t)}{\partial x}$, $i=1,2$,

$$\left\|\mu_{(1)}(t)-\mu_{(2)}(t)\right\|_1 \le q\left\|\mu_{(1)}(t)-\mu_{(2)}(t)\right\|_1. \tag{20}$$

Из (20) в силу условия $q<1$ имеем $\left\|\mu_{(1)}(t)-\mu_{(2)}(t)\right\|_1=0$, откуда следует $\tilde{v}_{(1)}(x,t)=\tilde{v}_{(2)}(x,t)$, $\tilde{u}_{(1)}(x,t)=\tilde{u}_{(2)}(x,t)$ при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}_1$.

Теорема 2 доказана.

Условия теоремы 2 одновременно с существованием единственного решения задачи I обеспечивают сходимость последовательности $\left\{\mu^{(k)}(t),\tilde{u}^{(k)}(x,t)\right\}$, $k=0$, $1,2,\ldots$, определяемой по предложенному алгоритму. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: 1) нахождение введенного функционального параметра $\mu(t)$ из уравнения (14) при фиксированных $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$; 2) решение полупериодической краевой задачи (6)–(8) при найденном $\mu(t)$. Из обратимости матрицы $C_\omega(t)$ при всех $t\in[0,T]$ следует однозначная разрешимость функционального уравнения (14). Корректная разрешимость семейств краевых задач (11), (12) позволяет найти решение полупериодической краевой задачи (6)–(8).

Теорема 1 дает достаточные условия корректной разрешимости задачи (11), (12), и при выполнении ее требований в теореме 2 функция корректной разрешимости $K(x)$ будет равна непрерывной на $[0,\omega]$ функции $k_1(x,h,\nu)+k_2(x,h,\nu)$ из оценки (15).

Следующие примеры показывают существенность требований обратимости матриц $Q_\nu(h,x)$, $C_\omega(t)$ для единственности решения задачи I.

***Пример* 1.** На плоскости R^2 рассматривается система двух гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x} = -\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}u, \quad u = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}. \tag{1a}$$

Ищется $(2\pi,2\pi)$-периодическое решение системы (1a). В этом примере матрица $Q_\nu(h,x)$ не имеет обратной при всех $x\in[0,\omega]$, а система (1a) имеет семейство $(2\pi,2\pi)$-периодических решений $u(x,t) = C_0\begin{pmatrix}\sin x\cos t\\ \cos x\sin t\end{pmatrix}$, где C_0 — произвольная постоянная.

***Пример* 2.** На плоскости R^2 рассматривается система двух гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x} = -\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}. \tag{1б}$$

Снова ищется $(2\pi,2\pi)$-периодическое решение системы (1б). В этом примере матрица $C_\omega(t)\equiv 0$ и необратима. Легко проверить, что $u(x,t) = C_0\begin{pmatrix}\sin(x+t)\\ \cos(x+t)\end{pmatrix}$ является семейством $(2\pi,2\pi)$-периодических решений системы (1б), где C_0 — произвольная постоянная.

Рассмотрим задачу II. Обозначим через $\mu(t)$ значение неизвестной функции $u(x,t)$ при $x=0$ и выполним замену $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\mu(t)$. Тогда задача (1), (4), (5) сведется к следующей эквивалентной задаче с функциональным параметром:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t\partial x} = A(x,t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + C(x,t)\tilde{u} + C(x,t)\mu(t) + f(x,t), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_2, \tag{21}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0, \quad t\in R, \tag{22}$$

$$\tilde{u}(x,t)\in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right), \quad \frac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}\in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right), \tag{23}$$

$$\tilde{u}(\omega,t) = 0, \quad t\in R. \tag{24}$$

Если $u(x,t)$ — решение задачи (1), (4), (5), то пара $(\mu(t)=u(0,t),\ \tilde{u}(x,t) = u(x,t)-u(0,t)$ является решением задачи (21)–(24). Наоборот, если пара $(\mu(t),\tilde{u}(x,t))$ — решение задачи (21)–(24), то функция $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)+\mu(t)$ является решением задачи (1), (4), (5). При найденном $\mu(t)$ функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением краевой задачи (21), (22), (23). Введя обозначения $\tilde{v}(x,t) =$

$= \dfrac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x}$, $F(x,t) = C(x,t)\tilde{u}(x,t) + C(x,t)\mu(t) + f(x,t)$, задачу (21)–(23) можно записать в виде

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v} + F(x,t), \qquad \tilde{v}(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right), \tag{25}$$

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^x \tilde{v}(\xi,t)\,d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_2, \qquad \tilde{u}(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right). \tag{26}$$

В (26) учтены соотношения (22), (23). Поскольку из условий (22), (24) вытекают равенства $\dfrac{\partial \tilde{u}(0,t)}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial \tilde{u}(\omega,t)}{\partial t} = 0$ для всех $t \in R$, интегрируя обе части (21) по $x \in [0,\omega]$, получаем функциональное уравнение для определения неизвестной функции $\mu(t)$:

$$\int_0^\omega C(\xi,t)\,d\xi\,\mu(t) = -\int_0^\omega A(\xi,t)\tilde{v}(\xi,t)\,d\xi - \int_0^\omega C(\xi,t)\tilde{u}(\xi,t)\,d\xi - \int_0^\omega f(\xi,t)\,d\xi, \quad t \in R. \tag{27}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$, $\mu(t)$ имеем замкнутую систему уравнений (25)–(27). Решение задачи находится по следующему алгоритму.

Шаг 0. Считая, что $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} = 0$, матрица $\tilde{C}_\omega(t) = \int_0^\omega C(\xi,t)\,d\xi$ обратима при всех $t \in R$ и $\left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|$ ограничена на R, из уравнения (27) определяем $\mu^{(0)}(t)$. В силу того что элементы матрицы $C(x,t)$ и функции $f(x,t)$ принадлежат пространству $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^1\right)$, найденная функция $\mu^{(0)}(t)$ является непрерывной и ограниченной на R. Решая краевую задачу (21)–(23) при $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, находим $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(0)}(x,t) = \dfrac{\partial \tilde{u}^{(0)}(x,t)}{\partial x}$, принадлежащие $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$.

Шаг 1. Считая, что $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t) = \tilde{v}^{(0)}(x,t)$, из уравнения (27) определяем $\mu^{(1)}(t)$. Ввиду принадлежности элементов матриц $C(x,t)$, $A(x,t)$ и функций $f(x,t)$, $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(0)}(x,t)$ пространству $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^1\right)$ найденная функция $\mu^{(1)}(t)$ будет непрерывной и ограниченной на R. Решая краевую задачу (21)–(23) при $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$, находим $\tilde{u}^{(1)}(x,t)$, $\tilde{v}^{(1)}(x,t) = \dfrac{\partial \tilde{u}^{(1)}(x,t)}{\partial x}$, принадлежащие $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$, и т. д.

Задача (25) при фиксированном $x \in [0,\omega]$ является задачей нахождения ограниченного на R решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Определение 2. *Семейство задач* (25) *называется корректно разрешимым с функцией* $\tilde{K}(x)$, *если для любой* $F(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$ *существует единственное решение* $\tilde{v}(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|\tilde{v}(x,t)\|_2 = \sup_{t \in R}\|\tilde{v}(x,t)\| \le \tilde{K}(x)\|F(x,t)\|_2,$$

где $\tilde{K}(x)$ — *непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция, не зависящая от* $F(x,t)$.

Используя матрицу $A(x,t)$ и число $h > 0$, строим двусторонне-бесконечную матрицу

$$Q_{\nu,h}(x) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & I+D_{\nu,r}(h,x) & -I & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & I+D_{\nu,r+1}(h,x) & -I & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Пусть m_n — пространство ограниченных последовательностей $\lambda_r \in R^n$, $r \in Z$ с нормой $\|\lambda\|_{m_n} = \|(\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)\|_{m_n} = \sup\limits_{r \in Z}\|\lambda_r\|$, $L(m_n)$ — пространство линейных ограниченных операторов $L\colon m_n \to m_n$ с индуцированной нормой.

Теорема 3. *Пусть при некоторых* $h > 0$ *и* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *для каждого* $x \in [0, \omega]$ *матрица* $Q_{\nu,h}(x)\colon m_n \to m_n$ *ограниченно обратима и выполняются неравенства:*

а) $\left\|\left[Q_{\nu,h}(x)\right]^{-1}\right\|_{L(m_n)} \leq \gamma_{\nu,h}(x)$,

б) $q_{\nu,h}(x) = \gamma_{\nu,h}(x)\max(1,h)\left[e^{\tilde{\alpha}(x)h} - \sum\limits_{j=0}^{\nu}\dfrac{\left[\tilde{\alpha}(x)h\right]^j}{j!}\right] \leq \tilde{\beta} < 1$,

где $\gamma_{\nu,h}(x)$ *— непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция при фиксированных* ν, h, $\tilde{\alpha}(x) = \sup\limits_{t \in R}\|A(x,t)\|$, $\beta = \text{const}$.

Тогда задача (25) *имеет единственное решение* $\tilde{v}^*(x,t) \in C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$ *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{t \in R}\left\|\tilde{v}^*(x,t)\right\| \leq \left[\tilde{k}_1(x,h,\nu) + \tilde{k}_2(x,h,\nu)\right]\sup_{t \in R}\|F(x,t)\|, \tag{28}$$

где

$$\tilde{k}_1(x,h,\nu) = \frac{\gamma_{\nu,h}(x)}{1-q_{\nu,h}(x)}\frac{\left|\tilde{\alpha}(x)h\right|^\nu}{\nu!}\tilde{k}_0(x,h,\nu) + h\gamma_{\nu,h}(x)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left|\tilde{\alpha}(x)h\right|^j}{j!},$$

$$\tilde{k}_0(x,h,\nu) = \left[e^{\tilde{\alpha}(x)h} - 1\right]h\gamma_{\nu,h}(x)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left|\tilde{\alpha}(x)h\right|^j}{j!} + he^{\tilde{\alpha}(x)h},$$

$$\tilde{k}_2(x,h,\nu) = \left\{\left[e^{\tilde{\alpha}(x)h} - 1\right]\frac{\gamma_{\nu,h}(x)}{1-q_{\nu,h}(x)}\frac{\left|\tilde{\alpha}(x)h\right|^\nu}{\nu!} + 1\right\}\tilde{k}_0(x,h,\nu).$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы с применением теоремы 1 [9, с. 391].

Теорема 4. *Пусть семейство задач* (25) *корректно разрешимо с функцией* $\tilde{K}(x)$, *матрица* $\tilde{C}_\omega(t)\colon R^n \to R^n$ *обратима при всех* $t \in R$, $\left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|$ *ограничена и выполняется неравенство*

$$\tilde{q} = \left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|_2\int_0^\omega\left\{\|A(\xi,t)\|_2\, e^{\tilde{K}(\xi)\|C(\xi,t)\|_2\xi} + \|C(\xi,t)\|_2\int_0^\xi e^{\tilde{K}(\xi_1)\|C(\xi_1,t)\|_2\xi_1}\,d\xi_1\right\}d\xi \times$$

$$\times \max_{x \in [0,\omega]}\left\{\tilde{K}(x)\|C(x,t)\|_2\right\} < 1.$$

Тогда существует единственное решение задачи II.

Доказательство. Из обратимости матрицы $\tilde{C}_\omega(t)$ при всех $t \in R$ следует, что уравнение (27) имеет единственное решение

$$\mu(t) = -\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\left\{\int\limits_0^\omega A(\xi, t)\tilde{v}(\xi, t)\,d\xi + \int\limits_0^\omega C(\xi, t)\tilde{u}(\xi, t)\,d\xi + \int\limits_0^\omega f(\xi, t)\,d\xi\right\}.$$

При этом $\mu(t)$ будет ограниченной на R в силу ограниченности правой части, и имеет место оценка

$$\|\mu(t)\| \le$$

$$\le \left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|\left\{\int\limits_0^\omega \|A(\xi, t)\|\|\tilde{v}(\xi, t)\|\,d\xi + \int\limits_0^\omega \|C(\xi, t)\|\|\tilde{u}(\xi, t)\|\,d\xi + \int\limits_0^\omega \|f(\xi, t)\|\,d\xi\right\}. \quad (29)$$

Из корректной разрешимости задачи (25) следует оценка

$$\|\tilde{v}(x, t)\|_2 \le \tilde{K}(x)\left\{\|C(x, t)\|_2\|\tilde{u}(x, t)\|_2 + \|C(x, t)\|_2\|\mu(t)\|_2 + \|f(x, t)\|_2\right\}.$$

Теперь, учитывая соотношение (26) и применяя неравенство Беллмана – Гронуолла, получаем оценку функции $\tilde{v}(x, t)$ через $\mu(t)$, $f(x, t)$:

$$\|\tilde{v}(x, t)\|_2 \le e^{\tilde{K}(x)\|C(x, t)\|_2 x} \max_{x \in [0, \omega]}\left\{\tilde{K}(x)\|C(x, t)\|_2\|\mu(t)\|_2 + \tilde{K}(x)\|f(x, t)\|_2\right\}. \quad (30)$$

По алгоритму с учетом неравенств (29), (30) и соотношения (26) оценим разности последовательных приближений:

$$\left\|\tilde{v}^{(k)}(x, t) - \tilde{v}^{(k-1)}(x, t)\right\|_2 \le$$

$$\le e^{\tilde{K}(x)\|C(x, t)\|_2 x} \max_{x \in [0, \omega]}\left\{\tilde{K}(x)\|C(x, t)\|_2\left\|\mu^{(k)}(t) - \mu^{(k-1)}(t)\right\|_2\right\}, \quad (31а)$$

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)\right\| \le \left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|\left\{\int\limits_0^\omega \|A(\xi, t)\|\left\|\tilde{v}^{(k)}(\xi, t) - \tilde{v}^{(k-1)}(\xi, t)\right\|d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\omega \|C(\xi, t)\|\left\|\tilde{u}^{(k)}(\xi, t) - \tilde{u}^{(k-1)}(\xi, t)\right\|d\xi\right\}, \quad (31б)$$

$$\left\|\tilde{u}^{(k)}(x, t) - \tilde{u}^{(k-1)}(x, t)\right\|_2 \le \int\limits_0^x \left\|\tilde{v}^{(k)}(\xi, t) - \tilde{v}^{(k-1)}(\xi, t)\right\|_2 d\xi. \quad (31в)$$

Используя оценки (31в) и (31а), из неравенств (31б) получаем

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)\right\| \le$$

$$\le \left\|\left[\tilde{C}_\omega(t)\right]^{-1}\right\|\int\limits_0^\omega\left\{\|A(\xi, t)\|e^{\tilde{K}(\xi)\|C(\xi, t)\|_2 \xi}\max_{\xi \in [0, \omega]}\left\{\tilde{K}(\xi)\|C(\xi, t)\|_2\right\} + \right.$$

$$\left. + \|C(\xi, t)\|\int\limits_0^\xi e^{\tilde{K}(\xi_1)\|C(\xi_1, t)\|_2 \xi_1}\max_{\xi_1 \in [0, \omega]}\left\{\tilde{K}(\xi_1)\|C(\xi_1, t)\|_2\right\}d\xi_1\right\}d\xi \times$$

$$\times \left\|\mu^{(k)}(t) - \mu^{(k-1)}(t)\right\|_2.$$

Отсюда вытекает основная оценка

$$\left\|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)\right\|_2 \le \tilde{q}\left\|\mu^{(k)}(t) - \mu^{(k-1)}(t)\right\|_2. \quad (32)$$

Неравенство $\tilde{q} < 1$ обеспечивает равномерную сходимость последовательности $\mu^{(k)}(t)$ к непрерывной и ограниченной на R функции $\mu^*(t)$. Из неравенств

(31а), (31в) следует равномерная относительно $(x, t) \in \overline{\Omega}_2$ сходимость последовательностей $\tilde{v}^{(k)}(x, t)$, $\tilde{u}^{(k)}(x, t)$ соответственно к функциям $\tilde{v}^*(x, t)$, $\tilde{u}^*(x, t)$, принадлежащим $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$. Очевидно, что функция $u^*(x, t) = = \mu^*(t) + \tilde{u}^*(x, t)$ принадлежит $C^*\left(\overline{\Omega}_2, R^n\right)$ и является решением задачи (1), (4), (5).

Докажем единственность решения задачи (1), (4), (5). Пусть существуют два решения: $u_{(1)}(x, t)$ и $u_{(2)}(x, t)$. Тогда соответствующие им пары $(\mu_{(1)}(t), \tilde{u}_{(1)}(x, t))$, $(\mu_{(2)}(t), \tilde{u}_{(2)}(x, t))$ будут решениями краевой задачи (21)–(24). Аналогично (31а), (31в), (32) оцениваем разности $\tilde{v}_{(1)}(x, t) - \tilde{v}_{(2)}(x, t)$, $\tilde{u}_{(1)}(x, t) - - \tilde{u}_{(2)}(x, t)$, $\mu_{(1)}(t) - \mu_{(2)}(t)$:

$$\left\|\tilde{v}_{(1)}(x, t) - \tilde{v}_{(2)}(x, t)\right\|_2 \leq$$

$$\leq e^{\tilde{K}(x)\|C(x,t)\|_2 x} \max_{x \in [0, \omega]}\left\{\tilde{K}(x)\| C(x, t)\|_2 \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_2\right\},$$

$$\left\|\tilde{u}_{(1)}(x, t) - \tilde{u}_{(2)}(x, t)\right\|_2 \leq \int_0^x \left\|\tilde{v}_{(1)}(\xi, t) - \tilde{v}_{(2)}(\xi, t)\right\|_2 d\xi,$$

где $\tilde{v}_{(i)}(x, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}_{(i)}(x, t)}{\partial x}$, $i = 1, 2$,

$$\left\|\mu_{(1)}(t) - \mu_{(2)}(t)\right\|_2 \leq \tilde{q}\left\|\mu_{(1)}(t) - \mu_{(2)}(t)\right\|_2. \tag{33}$$

Из (33) в силу условия $\tilde{q} < 1$ имеем $\left\|\mu_{(1)}(t) - \mu_{(2)}(t)\right\|_2 = 0$, откуда следует $\tilde{v}_{(1)}(x, t) = \tilde{v}_{(2)}(x, t)$, $\tilde{u}_{(1)}(x, t) = \tilde{u}_{(2)}(x, t)$ при всех $(x, t) \in \overline{\Omega}_2$.

Теорема доказана.

1. *Cesari L.* Periodic solutions of partial differential equations // Тр. межд. симп. по нелинейным колебаниям. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – Т. 2. – С. 440 – 457.
2. *Aziz A. K.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**, № 3. – P. 557 – 566.
3. *Vejvoda O. et al.* Partial differential equations: time-periodic solutions. – Hague etc.: Martinus Nijhoff Publ., 1982. – 358 p.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
6. *Кигурадзе Т. И.* О двоякопериодических решениях одного класса нелинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 2. – С. 238 – 245.
7. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.
8. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Метод параметризации применительно к полупериодической краевой задаче для гиперболического уравнения // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2001. – № 1. – С. 23 – 29.
9. *Джумабаев Д. С.* Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 3. – С. 388 – 404.

Получено 02.12.2002,
после доработки — 27.03.2003