УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т, Днепропетр. аграр. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Let $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ be a vector with positive components, D^γ be the corresponding mixed derivative (of order γ_j with respect to j-th variable). In the case where $d > 1$ and $0 < k < r$ are arbitrary, we prove that

$$\sup_{\substack{x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathrm{T}^d) \\ D^{r\gamma} x \neq 0}} \frac{\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}}{\| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{k/r}} = \infty$$

and

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)} \le K \| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}}{\| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}} \right)^\beta$$

for all $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathrm{T}^d)$. Moreover, if $\overline{\beta}$ is the least possible value of the exponent β in this inequality, then

$$(d-1)\left(1 - \frac{k}{r}\right) \le \overline{\beta}(d, \gamma, k, r) \le d - 1.$$

Нехай $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор з додатними координатами, D^γ — відповідна мішана похідна (порядку γ_j за j-ю змінною). Доведено, що при $d > 1$ і довільних $0 < k < r$

$$\sup_{\substack{x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathrm{T}^d) \\ D^{r\gamma} x \neq 0}} \frac{\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}}{\| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{k/r}} = \infty.$$

Разом з тим для всіх $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathrm{T}^d)$

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)} \le K \| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}}{\| x \|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)}} \right)^\beta.$$

Більш того, якщо $\overline{\beta}$ — найменше можливе значення показника β в цій нерівності, то

$$(d-1)\left(1 - \frac{k}{r}\right) \le \overline{\beta}(d, \gamma, k, r) \le d - 1.$$

1. Введение. Пусть G — числовая ось $\mathbf{R}$ или единичная окружность $\mathbf{T}$, реализованная как отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами. Пусть также $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, — пространства всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \left\{ \int_G | x(t) |^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|x\|_{L_\infty(G)} := \sup_{t\in G}\operatorname{vrai}|x(t)|.$$

Для заданных $r \in \mathbb{N}$ и $1 \le s \le \infty$ через $L_s^r(G)$ обозначим пространство всех функций x таких, что производная $x^{(r-1)}$ ($x^{(0)} := x$) локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Пусть $L_{p,s}^r(G) = L_p(G) \cap L_s^r(G)$ для заданного $1 \le \le p \le \infty$. Отметим, что $L_s^r(\mathbf{T}) \subset L_p(\mathbf{T})$ для любого p.

Неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_{p,s}^r(G)$, $G = \mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$, т. е. неравенства вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \le K\|x\|_{L_p(G)}^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(G)}^{1-\alpha}, \tag{1.1}$$

где $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$, особенно неравенства с неулучшаемыми константами, играют важную роль во многих областях математики.

Неравенства такого типа появились в работе Харди и Литтвуда [1]. Первые точные неравенства были получены Ландау [2] в 1913 году. Впоследствии работы многих математиков были посвящены получению точных неравенств для норм промежуточных производных. Один из первых полных результатов в этом направлении получил Колмогоров [3, 4] (см. также [5]). Этот результат и в настоящее время остается одним из наиболее значительных в данной проблематике. Поэтому неравенства вида (1.1) часто называют неравенствами типа Колмогорова.

Отметим, что обзоры известных точных результатов по неравенствам типа Колмогорова для функций одной переменной, а также соответствующие библиографические указания можно найти в работах [6 – 9].

Общие условия существования неравенств вида (1.1) в случае $G = \mathbf{R}$ были приведены в работе [10] (см. также [11]): для заданных r, k и q, p, s неравенство (1.1) имеет место для функций $x \in L_{p,s}^r(G)$, если и только если

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \ge \frac{r}{q}, \tag{1.2}$$

в этом случае показатель α в (1.1) однозначно определяется равенством

$$\alpha = \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}. \tag{1.3}$$

В частности, в случае $q = p = s$ неравенство (1.1) имеет место, если и только если

$$\alpha = 1 - \frac{k}{r}.$$

Общие условия существования неравенств вида (1.1) с константой K, не зависящей от функции x, в случае $G = \mathbf{T}$, $p, q, s \ge 1$ отличаются от (1.2) и (1.3). В работе [12] доказано, что неравенство (1.1) имеет место для любой функции $x \in L_s^r(\mathbf{T})$, любых $k, r \in \mathbf{Z}_+$, $k < r$, и q, p, s, если и только если

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{1-\frac{k}{r}, \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\}. \tag{1.4}$$

В частности, в случае $q = p = s$ неравенство (1.1) для периодических функций имеет место, если и только если

$$-\infty < \alpha \le \alpha_{cr} = 1 - \frac{k}{r}.$$

Отметим, что неравенства вида (1.1) для периодических функций с $\alpha = \alpha_{cr}$

являются наиболее интересными, поскольку именно такие неравенства имеют наиболее важные приложения в теории аппроксимации.

В работе [13] показано, что в случае, когда неравенство типа Колмогорова существует для непериодических функций, заданных на всей числовой оси, точная константа в таком неравенстве не превышает точной константы в аналогичном неравенстве для периодических функций. Точнее, пусть

$$K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha) := \sup_{\substack{x \in L^r_{p,s}(G) \\ x^{(r)} \neq 0}} \frac{\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)}}{\| x \|^{\alpha}_{L_p(G)} \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}},$$

где α определяется формулой (1.3), — точная константа в неравенстве (1.1). Тогда

$$K(\mathbf{R}) \leq K(\mathbf{T}), \quad \text{если} \quad \frac{r - k + q^{-1} - s^{-1}}{r + p^{-1} - s^{-1}} < 1 - \frac{k}{r},$$

и

$$K(\mathbf{R}) = K(\mathbf{T}), \quad \text{если} \quad \frac{r - k + q^{-1} - s^{-1}}{r + p^{-1} - s^{-1}} = 1 - \frac{k}{r}.$$

Для функций многих переменных возникает большое число задач, которые можно трактовать как задачи о неравенствах для промежуточных производных. Это связано, во-первых, с большим выбором дифференциальных операторов, а во вторых — с различным возможным числом сомножителей в правой части неравенств, аналогичных (1.1). Неравенства для производных функций многих переменных не менее важны для математики по сравнению с одномерными неравенствами. Особенно большую роль они играют в теоремах вложения (см. [14, 15]).

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных неравенствам для производных функций многих переменных (см., например, [16 – 18]).

В данной статье нас будут интересовать неравенства, оценивающие норму смешанной производной через норму функции и норму смешанной производной более высокого порядка. При этом рассмотрим случаи периодических и непериодических функций и покажем, что ответ на вопрос о существовании такого рода оценок в случае $q = p = s = \infty$ или $q = p = s = 1$ существенно отличается от случая $1 < q = p = s < \infty$, а также от одномерного случая.

Результаты данной статьи частично анонсированы в [19, 20].

2. Постановка задач. Рассмотрим сначала случай периодических функций.

Пусть $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $\mathbf{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$ — d-мерный куб, $L_p(\mathbf{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство функций $x(t)$, 2π-периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T}^d)} = \|x\|_p := \left\{ \int_{\mathbf{T}^d} |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \|x\|_\infty := \sup_{t \in \mathbf{T}^d} \operatorname{vrai} |x(t)|.$$

Через $L^0_p(\mathbf{T}^d)$ обозначим множество функций $x \in L^0_p(\mathbf{T}^d)$, имеющих нулевое среднее значение на $[-\pi, \pi]$ по любой переменной (при фиксированных значениях остальных переменных).

Пусть, далее,

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d), \quad \gamma_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, d,$$
$$1 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \ldots \le \gamma_d, \quad 1 \le \nu \le d. \tag{2.1}$$

Компоненты вектора $\bar{r}$, задающего дифференциальный оператор, таковы:

$$r = r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d, \quad r > 0.$$

С этим вектором будем связывать вектор

$$\gamma = r^{-1}\bar{r}.$$

Соответствующий „промежуточный" дифференциальный оператор будет определяться с помощью параметра k, $k \in (0, r)$, вектором

$$\bar{k} = k\gamma.$$

Пусть $F_{\bar{r}}(t)$ — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_{\bar{r}}(t) = \pi^{-d} \sum_{l \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \cos\left(l_j t_j + \frac{\pi}{2} r_j\right).$$

Через $L_p^{\bar{r}}(\mathbf{T}^d)$ обозначим множество функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = F_{\bar{r}} * \varphi(t) = \int_{\mathbf{T}^d} F_{\bar{r}}(t-y)\varphi(y)\,dy,$$

где $\varphi \in L_p^0(\mathbf{T}^d)$. В этом случае будем считать, что

$$D^{\bar{r}} x(t) = \varphi(t).$$

Нас будет интересовать следующая задача.

Задача. *Пусть заданы* $p \in [1, \infty]$, *вектор* γ *и параметры* k, r, $0 < k < r$. *При каких значениях* $\alpha \in \mathbf{R}$ *величина*

$$K = K(p; \gamma, k, r; \alpha) := \sup_{\substack{x \in L_p^{r\gamma}(\mathbf{T}^d) \\ D^{r\gamma}x \ne 0}} \frac{\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_p(\mathbf{T}^d)}}{\| x \|^{\alpha}_{L_p(\mathbf{T}^d)} \left\| D^{r\gamma} x \right\|^{1-\alpha}_{L_p(\mathbf{T}^d)}}$$

будет конечной?

Легко получить необходимые условия для α: если величина $K(p; \gamma, k, r; \alpha)$ конечна, то наряду с функцией $x(t)$ рассмотрим ее всевозможные сжатия $x(n_1 t_1, \ldots, n_d t_d)$, где $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Получим, что для любого $(n_1, \ldots \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ должны выполняться неравенства

$$\prod_{j=1}^{d} n_j^{k\gamma_j} \le K \prod_{j=1}^{d} n_j^{r\gamma_j(1-\alpha)},$$

и, следовательно,

$$\alpha \le 1 - \frac{k}{r}. \tag{2.2}$$

При $p \in (1, \infty)$ ответ на сформулированный вопрос известен: из теоремы Бесова [16; 15, с. 244] следует, что имеют место неравенства

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_p(\mathbf{T}^d)} \le K(p; \gamma, k, r) \| x \|^{1-k/r}_{L_p(\mathbf{T}^d)} \left\| D^{r\gamma} x \right\|^{k/r}_{L_p(\mathbf{T}^d)}. \tag{2.3}$$

Далее, так как функция $x \in L_p^0(\mathbf{T}^d)$ имеет нулевое среднее значение по каждой переменной, то для нее с некоторой константой $C(d)$ выполняется неравенство Бора – Фавара (см., например, [21])

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T}^d)} \leq C(d) \left\| D^\gamma x \right\|_{L_p(\mathbf{T}^d)}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что соотношение

$$K(p; \gamma, k, r; \alpha) < \infty$$

выполняется для всех $\alpha \in (-\infty, k/r]$, т. е. необходимое условие (2.2) в случае $p \in (1, \infty)$ является и достаточным.

Заметим, что при доказательстве неравенства (2.3) существенно используется тот факт, что $p \notin \{1, \infty\}$. В данной статье мы используем случаи $p = \infty$ и $p = 1$.

3. Неравенства для $L_\infty(\mathbf{T}^d)$-норм периодических функций. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $d > 1$, $0 < k < r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $K_\varepsilon = K_\varepsilon(\gamma, k, r)$ такая, что для всех $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$ выполняется неравенство*

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \leq K_\varepsilon \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r-\varepsilon} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

При этом в (3.1) *нельзя положить* $\varepsilon = 0$, *т. е.*

$$\sup_{\substack{x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d) \\ D^{r\gamma} x \neq 0}} \frac{\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r}} = \infty. \tag{3.2}$$

Как видим, при $p = \infty$ в случае $d > 1$ показатель $\alpha = 1 - k/r$ в (3.1) невозможен. Возникает вопрос: нельзя ли изменить форму правой части неравенства (3.1) так, чтобы добиться максимально возможного показателя $\alpha = 1 - k/r$ при $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}$ за счет, быть может, „ухудшения" второго сомножителя?

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $d > 1$, $0 < k < r$. Тогда найдется показатель $\beta = \beta(d; \gamma, k, r)$ такой, что с некоторой константой $K = K(\gamma, k, r)$ для всех $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$ имеет место следующее неравенство*:

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \leq K \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}} \right)^\beta. \tag{3.3}$$

При этом для минимально возможного значения $\overline{\beta}$ показателя β в (3.3) *выполняются условия*

$$(d-1)\left(1 - \frac{k}{r}\right) \leq \overline{\beta}(d, \gamma, k, r) \leq d - 1. \tag{3.4}$$

Поскольку при $y \geq 1$ для любого $\varepsilon > 0$ будет $\ln y \leq C_\varepsilon y^\varepsilon$, из теоремы 2 следует утверждение теоремы 1.

***Доказательство теоремы* 2.** Будем использовать аппроксимационные соображения, которые дают возможность получить содержащее некоторый параметр семейство аддитивных неравенств типа Колмогорова. Затем, выбрав надлежащим образом значение этого параметра, установим неравенство (3.3). Идея такого доказательства неравенств типа (1.1) при $d = 1$ принадлежит С. Б. Стечкину [22]:

Пусть $\{M_N;\ N \in \mathbb{N}\}$ — некоторая последовательность подпространств, состоящих из тригонометрических полиномов, $M_N \subset M_{N+1}$, и $A_N: L_\infty(\mathbf{T}^d) \to M_N$ — линейные операторы свертки с некоторыми ядрами $K_N \in M_N$, т. е. $A_N x(t) = A_N(x)(t) = (K_N * x)(t)$.

Поскольку для $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$

$$D^{k\gamma}x(t) = (F_{(r-k)\gamma} * D^{r\gamma}x)(t),$$

то

$$D^{k\gamma}x(t) - A_N(D^{k\gamma}x)(t) = \left\{\left(F_{(r-k)\gamma} - A_N\left(F_{(r-k)\gamma}\right)\right) * D^{r\gamma}x\right\}(t)$$

и

$$\left\| D^{k\gamma}x(t) - A_N(D^{k\gamma}x)(t)\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le$$
$$\le \left\| F_{(r-k)\gamma} - A_N(F_{(r-k)\gamma})\right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \left\| D^{r\gamma}x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}. \tag{3.5}$$

Кроме того,

$$\left\| A_N(D^{k\gamma}x)\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \left\|(D^{k\gamma}K_N) * x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le \left\| D^{k\gamma}K_N\right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) получаем аддитивную оценку

$$\left\| D^{k\gamma}x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le \left\| D^{k\gamma}x - A_N(D^{k\gamma}x)\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + \left\| A_N(D^{k\gamma}x)\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le$$
$$\le \left\| F_{(r-k)\gamma} - A_N(F_{(r-k)\gamma})\right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \left\| D^{r\gamma}x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + \left\| D^{k\gamma}K_N\right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}. \tag{3.7}$$

Теперь следует в зависимости от значений $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}$ и $\left\| D^{r\gamma}x\right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}$ выбрать подпространство M_N и оператор A_N так, чтобы сделать как можно меньше значение правой части (3.7).

Из (3.7) следует, что M_N и A_N надо выбирать так, чтобы в метрике $L_1(\mathbf{T}^d)$, с одной стороны, обеспечить хорошую аппроксимацию ядер Бернулли, а с другой — чтобы нормы производных ядер операторов A_N были поменьше. Для достижения этих целей мы используем исследования [21, 23, 24] по аппроксимации функций с ограниченной смешанной производной тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов.

Для заданного вектора γ и $N \in \mathbb{N}$ определим в $\mathbf{Z}^d$ множество индексов

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbf{Z}^d : l_j > 0,\ j = 1, \ldots, d;\ \prod_{j=1}^{d} l_j^{\gamma_j} \le N \right\}.$$

Множество индексов l таких, что $|l| := (|l_1|, \ldots, |l_d|) \in \Gamma(N, \gamma)$, называют гиперболическим крестом. Через $\mathcal{T}(N, \gamma)$ обозначим совокупность тригонометрических полиномов с таким гиперболическим спектром, т. е. полиномов вида

$$T_N(t) = \sum_{|l| \in \Gamma(N,\gamma)} c_l e^{ilt}, \quad t \in \mathbf{T}^d, \quad lt = \sum_{j=1}^{d} l_j t_j,$$

а через $E_{N,\gamma}(x)_{L_p(\mathbf{T}^d)}$ — наилучшее приближение в $L_p(\mathbf{T}^d)$ функции $x(t)$ подпространством $\mathcal{T}(N, \gamma)$:

$$E_{N,\gamma}(x)_{L_p(\mathbf{T}^d)} = \inf_{T_N \in \mathcal{T}(N,\gamma)} \|x - T_N\|_{L_p(\mathbf{T}^d)}.$$

В [21] для аппроксимации функций такими полиномами построен линейный метод приближения $V_N(x)$, имеющий следующие свойства:

1) для любой функции $x \in L_1^0(\mathbf{T}^d)$

$$(V_N x)(t) = (x * V_N)(t),$$

где ядро свертки $V_N(t)$ — полином из $\mathcal{T}(N, \gamma)$ (это ядро строится в [21] с помощью одномерных ядер Валле Пуссена);

2) для любого $r > 0$ и любого $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$

$$\|x - V_N x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_1 N^{-r} (\ln N)^{d-1} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)},$$

где $C_1 = C_1(r, d)$ не зависит от N;

3) для любого $k > 0$

$$\left\| D^{k\gamma} V_N \right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le C_2 N^k (\ln N)^{d-1},$$

где $C_2 = C_2(k, d)$ не зависит от N.

Наличие этих свойств позволяет использовать оператор V_N для приближения значений оператора $D^{k\gamma}$: так как

$$\left\| D^{k\gamma} x - V_N(D^{k\gamma} x) \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_1 N^{-(r-k)} (\ln N)^{d-1} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}$$

и

$$\left\| V_N(D^{k\gamma} x) \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \left\| (D^{k\gamma} V_N) * x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le$$

$$\le \left\| D^{k\gamma} V_N \right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_2 N^k (\ln N)^{d-1} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)},$$

для произвольного $N \ge 2$ имеем

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le \left\| D^{k\gamma} x - V_N(D^{k\gamma} x) \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + \left\| V_N(D^{k\gamma} x) \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le$$

$$\le C_3 \left(N^k (\ln N)^{d-1} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + N^{-(r-k)} (\ln N)^{d-1} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right). \qquad (3.8)$$

Теперь заметим, что если

$$\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)},$$

то достаточно использовать многомерный вариант неравенства Бора – Фавара в виде

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_4 \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)},$$

и сразу получим (3.3):

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_4 \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \le C_4 \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r}.$$

Пусть теперь

$$\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} > \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}.$$

Тогда выберем в (3.8) значение N из условия

$$N^r = \left[\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \|x\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{-1} \right] + 2,$$

и после простых преобразований получим

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_5 \| x \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(\ln \frac{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_\infty}{\| x \|_\infty} \right)^{d-1}.$$

Неравенство (3.3) доказано при $\beta = d-1$.

Покажем, что

$$\overline{\beta} \ge \left(1 - \frac{k}{r}\right)(d-1). \tag{3.9}$$

Для этого используем неравенство типа Бернштейна для производных полиномов из $\mathcal{T}(N, \gamma)$ (см. [21, 24, 25]):

$$\sup_{T_N \in \mathcal{T}(N,\gamma)} \frac{\left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}} \asymp N^r (\ln N)^{d-1}.$$

Пусть неравенство (3.3) справедливо с некоторым показателем β. Тогда

$$\infty > K \ge$$

$$\ge \sup_{T_N \in \mathcal{T}(N,\gamma)} \frac{\left\| D^{k\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+\left(\left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} / \| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right) \right)^\beta} \ge$$

$$\ge C_6 \sup_{T_N \in \mathcal{T}(N,\gamma)} \frac{\left\| D^{k\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left(N^r (\ln N)^{d-1} \| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right)^{k/r} (\ln N)^\beta} =$$

$$= C_6 \left(N^k (\ln N)^{(d-1)k/r+\beta} \right)^{-1} \sup_{T_N \in \mathcal{T}(N,\gamma)} \frac{\left\| D^{k\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}} \asymp$$

$$\asymp \left(N^k (\ln N)^{(d-1)k/r+\beta} \right)^{-1} \left(N^k (\ln N)^{d-1} \right) = (\ln N)^{(d-1)(1-k/r)-\beta}.$$

Отсюда следует (3.4).

Теорема 2 доказана.

Мы не знаем, каково минимальное значение показателя $\overline{\beta} = \overline{\beta}(d, \gamma, k, r)$ в (3.3) для каждого конкретного набора значений γ, k, r. Но можно привести примеры, показывающие, что верхнюю оценку $\overline{\beta} \le d-1$ в (3.4) одновременно для всех γ, k, r уменьшить нельзя.

Пусть $\gamma = (1, 1, \ldots, 1)$, $k, r \in \mathbb{N}$, k — нечетное, а r — четное. Как показано в [25, 26], полиномы

$$T_N(t) = \sum_{|\nu| \in \Gamma(N,\gamma)} \prod_{j=1}^d \frac{\sin \nu_j t_j}{\nu_j}$$

имеют свойство

$$\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C(d) \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Используя те же рассуждения, что и в [21] (лемма 1.2.1), из (3.10) получаем, что для любого четного r

$$\left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C_1(r, d) N^r \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

С другой стороны, при нечетном k имеем

$$\left\| D^{k\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \sum_{|\nu| \in \Gamma(N,\gamma)} \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_j \right)^{k-1} \geq C_2(k,d) N^k (\ln N)^{d-1}. \quad (3.12)$$

Из (3.10) – (3.12) получаем

$$\infty > \frac{\left\| D^{k\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{\| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \left(\left\| D^{r\gamma} T_N \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} / \| T_N \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right) \right)^{\beta}} \geq$$

$$\geq C_3 \frac{N^k (\ln N)^{d-1}}{N^k (\ln N)^{\beta}},$$

и, следовательно, $\beta \geq d-1$.

***Замечание* 1.** Как известно, для каждого неравенства типа Колмогорова в мультипликативной форме (1.1) есть эквивалентное ему неравенство в аддитивной форме, содержащее свободный параметр. В рассматриваемом случае таким аддитивным неравенством является неравенство (3.8); хотя оно получено для дискретных значений параметра N, нетрудно видеть, что на самом деле справедливо следующее:

при всех значениях $h \in (0, 1/2)$ и всех $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$ выполняется неравенство

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \leq C \left(\ln \frac{1}{h} \right)^{d-1} \left(h^{-k} \| x \|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + h^{r-k} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right). \quad (3.13)$$

***Замечание* 2.** Как уже отмечалось, идея доказательства неравенств типа (1.1) при $d=1$, основанного на аппроксимационных соображениях, принадлежит С. Б. Стечкину [22]. В работах [27, 28] приведена общая схема получения аддитивных неравенств типа Колмогорова, ориентированная, главным образом, на случай функций, заданных на отрезке. Анализируя рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (3.3), можно предложить следующую модификацию этой схемы (можно надеяться, что эта модификация окажется полезной и при получении других неравенств типа Колмогорова для функций многих переменных).

Пусть X, Y — группы по сложению; $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ — неотрицательные полуаддитивные вещественные функционалы на X и Y соответственно. Пусть также заданы отображение T,

$$X \supset D(T) \xrightarrow{T} Y,$$

такое, что

$$\forall x \in D(T) \quad (\|x\|_X = 0 \Rightarrow \|Tx\|_Y = 0),$$

и функционал F

$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} \mathbf{R},$$

причем

$$D(F) \subset D(T)$$

(здесь и ниже $D(A)$ обозначает область определения отображения A).

Предположим, что:

а) найдутся расширяющаяся последовательность подмножеств $H_N \subset D(T)$, $N \in \mathbb{N}$, и неубывающая функция $\psi_1(N)$ такие, что

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall y \in H_N \quad \|Ty\|_Y \leq \psi_1(N)\|y\|_X \tag{3.14}$$

(т. е. для $y \in H_N$ имеет место неравенство типа Бернштейна – Никольского);

б) существует неубывающая функция $\psi_2(N)$, $N \in \mathbb{N}$, такая, что для любого $x \in D(F)$

$$\inf_{y \in H} \{ \psi_1(N)\| y - x \|_X + \| Tx - Ty \|_Y \} \leq \frac{1}{\psi_2(N)} F(x). \tag{3.15}$$

Тогда для любого $x \in D(F)$

$$\| Tx \|_Y \leq \psi_1(N) \| x \|_X + \frac{1}{\psi_2(N)} F(x). \tag{3.16}$$

Конечно, из (3.16) следует, что для любого $x \in D(F)$, $x \neq 0$, имеет место неравенство

$$\| Tx \|_Y \leq \| x \|_X \Psi\left(\frac{F(x)}{\| x \|_X} \right),$$

где

$$\Psi(t) := \inf_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \psi_1(N) + \frac{1}{\psi_2(N)} t \right\}.$$

Однако функция $\Psi(t)$ в случае произвольных $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ имеет неявный характер. Вместе с тем во многих случаях оценки (3.14) и (3.15) имеют вид

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall y \in H_N \quad \| Ty \|_Y \leq \phi(N) N^{\alpha} \| y \|_X, \quad \alpha > 0, \tag{3.17}$$

и

$$\inf_{y \in H} \{ \psi_1(N)\| y - x \|_X + \| Tx - Ty \|_Y \} \leq \frac{\phi(N)}{N^{\beta}} F(x), \quad \beta > 0. \tag{3.18}$$

Тогда аддитивное неравенство (3.16) принимает вид

$$\| Tx \|_Y \leq \phi(N) N^{\alpha} \| x \|_X + \frac{\phi(N)}{N^{\beta}} F(x). \tag{3.19}$$

Пусть дополнительно для $x \in D(F)$ имеет место неравенство типа Бора – Фавара

$$\| Tx \|_Y \leq F(x).$$

Тогда если для $x \in D(F)$ $F(x) \leq \| x \|_X$, то

$$\| Tx \|_Y \leq F(x) = F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)} F(x)^{\beta/(\alpha+\beta)} \leq \| x \|_X^{\beta/(\alpha+\beta)} F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)}.$$

Если же $F(x) > \| x \|_X$, то, полагая в (3.19)

$$N = \left[\frac{F(x)}{\| x \|_X} \right]^{1/(\alpha+\beta)}$$

и замечая, что в случае, когда функция ϕ ведет себя достаточно регулярно,

$$\phi\left(\left[\frac{F(x)}{\|x\|_X}\right]^{1/(\alpha+\beta)}\right) \asymp \phi\left(\left(\frac{F(x)}{\|x\|_X}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\right),$$

получаем

$$\|Tx\|_Y \le K\phi\left(\left(\frac{F(x)}{\|x\|_X}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\right)\|x\|_X^{\beta/(\alpha+\beta)} F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)}.$$

Таким образом, для любого $x \in D(F)$ окончательно имеем

$$\|Tx\|_Y \le K\left(1+\phi\left(\left(\frac{F(x)}{\|x\|_X}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\right)\right)\|x\|_X^{\beta/(\alpha+\beta)} F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)}. \tag{3.20}$$

Как правило, в оценках (3.17) и (3.18) функция $\phi(N)$ такова, что $\phi(N) \to \infty$, $N \to \infty$, и, вместе с тем, для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа c_ε такая, что для любого N $\phi(N) \le c_\varepsilon N^\varepsilon$. В таких случаях для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа K_ε такая, что для любого $x \in D(F)$

$$\|Tx\|_Y \le K_\varepsilon \|x\|_X^{\beta/(\alpha+\beta)-\varepsilon} F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)+\varepsilon}. \tag{3.21}$$

Предположим теперь, что для некоторой последовательности $y_N \in H_N$

$$\frac{\|Ty_N\|_X}{\|y_N\|_X} \asymp \phi(N)N^\alpha$$

и

$$\frac{\|F(y_N)\|_Y}{\|y_N\|_X} << \phi(N)N^{\alpha+\beta}.$$

Тогда

$$\sup_{\substack{\|x\|_X\neq 0\\ x\in D(T)}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X^{\beta/(\alpha+\beta)} F(x)^{\alpha/(\alpha+\beta)}} \ge \frac{\|Ty_N\|_Y}{\|y_N\|_X^{\beta/(\alpha+\beta)} F(y_N)^{\alpha/(\alpha+\beta)}} >>$$

$$>> \frac{\phi(N)N^\alpha}{\left(\phi(N)N^{\alpha+\beta}\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)}} = \phi(N)^{\alpha/(\alpha+\beta)}.$$

С учетом того, что $\phi(N) \to \infty$, $N \to \infty$, отсюда, в частности, следует, что положить в неравенстве (3.21) $\varepsilon = 0$ нельзя.

4. Неравенства для наилучших приближений в $L_\infty(\mathbf{T}^d)$. В теории приближений помимо неравенств типа (1.1) для норм производных важную роль играют аналогичные неравенства для наилучших приближений различными подпространствами (см., например, [29, 30]).

Пусть M — подпространство в $L_\infty(\mathbf{T}^d)$,

$$E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \inf\left\{\|x-y\|_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} : y \in M\right\}$$

— наилучшее приближение функции x подпространством M. Если вместе с каждой функцией $y(t)$ из M для любого $\tau \in \mathbf{T}^d$ функция $y_\tau(t) := y(t+\tau)$ также принадлежит M, то подпространство M называется инвариантным относительно сдвигов.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого подпространства $M \subset L_\infty(\mathbf{T}^d)$, инвариантного относительно сдвигов, и для всех $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d) \setminus M$ выполняются неравенства*

$$E(D^{k\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le$$

$$\le K E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} E(D^{r\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{E(D^{r\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}{E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}}\right)^{d-1}. \quad (4.1)$$

При этом константу K можно выбрать не зависящую от M.

Доказательство. Из соотношений двойственности С. М. Никольского (см., например, [31, 32]) следует

$$E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} = \sup\left\{ \int_{\mathbf{T}^d} x(\tau)g(\tau)\,d\tau \colon g \in BL_1(\mathbf{T}^d) \cap M^\perp \right\}, \quad (4.2)$$

где $BL_1(\mathbf{T}^d)$ — единичный шар в пространстве $L_1(\mathbf{T}^d)$. Из инвариантности M относительно сдвигов следует, что такое же свойство имеет и подпространство $M^\perp$ в $L_1(\mathbf{T}^d)$.

Для каждой функции $x \in L_\infty^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$ рассмотрим ее свертки

$$(x * g)(t) = \int_{\mathbf{T}^d} x(\tau)g(\tau - t)\,d\tau = \int_{\mathbf{T}^d} x(\tau)g_{-t}(\tau)\,d\tau$$

с функциями g из $BL_1(\mathbf{T}^d) \cap M^\perp$, и к функциям $x * g$ применим неравенство (3.13):

$$\sup_t \left| D^{k\gamma}(x * g)(t) \right| \le$$

$$\le C\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{d-1} \left(h^{-k} \sup_t |(x * g)(t)| + h^{r-k} \sup_t \left| D^{r\gamma}(x * g)(t) \right| \right). \quad (4.3)$$

Поскольку $g_{-t} \in M^\perp$, из (4.2) следует, что для всех $t \in \mathbf{T}^d$ и $g \in BL_1(\mathbf{T}^d) \cap \cap M^\perp$:

$$|(x * g)(t)| \le E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}, \qquad \left| D^{r\gamma}(x * g)(t) \right| \le E(D^{r\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)}.$$

Поэтому из (4.3) получаем, что неравенство

$$\sup_t \left| D^{k\gamma}(x * g)(t) \right| \le$$

$$\le C\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{d-1} \left(h^{-k} E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + h^{r-k} E(D^{r\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right)$$

выполняется для всех $g \in BL_1(\mathbf{T}^d) \cap M^\perp$. Снова используя (4.2), получаем аддитивное неравенство (аналог (3.13) для наилучших приближений)

$$E(D^{k\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \le C\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{d-1} \left(h^{-k} E(x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} + h^{r-k} E(D^{r\gamma}x, M)_{L_\infty(\mathbf{T}^d)} \right).$$

Отсюда следует (4.1).

Теорема 3 доказана.

Идею использовать свертки с подходящими функциями g первым использовал Е. М. Стейн [33] для вывода точного неравенства для норм производных в $L_1(\mathbf{T}^1)$ из соответствующего неравенства Колмогорова в $L_\infty(\mathbf{T}^1)$. Реализацию этой же идеи для наилучших приближений см. в [34], а также в [32, 35].

Отметим, что, в частности, неравенство (4.1) справедливо, если в качестве M выбрать подпространство $\mathcal{T}(N,\gamma)$ полиномов с гиперболическим спектром.

5. Неравенства в $L_1(\mathbf{T}^d)$. Неравенства, аналогичные (3.3) и (4.1), имеют место и в пространстве $L_1(\mathbf{T}^d)$.

Теорема 4. *Пусть $d > 1$, $0 < k < r$. Тогда найдется показатель $\beta = \beta(d, \gamma, k, r)$ такой, что с некоторой константой $K = K(\gamma, k, r)$ для всех $x \in L_1^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$ имеет место следующее неравенство:*

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le K \|x\|_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_1(\mathbf{T}^d)}}{\|x\|_{L_1(\mathbf{T}^d)}} \right)^{\beta}. \qquad (5.1)$$

Более того, для любого подпространства $M \subset L_1(\mathbf{T}^d)$, инвариантного относительно сдвига, и любой функции $x \in L_1^{r\gamma}(\mathbf{T}^d) \setminus M$ выполняются аналогичные неравенства для наилучших приближений:

$$E(D^{k\gamma} x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le$$

$$\le KE(x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} E(D^{r\gamma} x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{k/r} \left(1 + \ln^+ \frac{E(D^{r\gamma} x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)}}{E(x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)}} \right)^{\beta}. \qquad (5.2)$$

При этом для минимально возможного значения $\overline{\beta}$ показателя β в (5.1) выполняются условия

$$\frac{k}{r}(d-1) \le \overline{\beta} \le d-1.$$

Доказательство. Неравенство (5.1) с показателем $\beta = d-1$ можно доказать двумя способами.

Во-первых, достаточно заметить, что доказательство неравенства (3.3) остается в силе при замене нормы в $L_\infty(\mathbf{T}^d)$ на норму в $L_1(\mathbf{T}^d)$ по той причине, что для линейных операторов V_N свойство 2 сохраняется и в $L_1(\mathbf{T}^d)$ (см. [21]), а свойства 1 и 3 уже имеют нужную форму.

Во-вторых, можно, опираясь на (3.3), использовать идею Стейна [33] (см. также [34]). При этом получается единообразное доказательство и (5.1), и (5.2); для этого надо повторить рассуждения из доказательства теоремы 3, только вместо (4.2) использовать следующие соотношения двойственности:

$$\|x\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} = \sup\left\{ \int_{\mathbf{T}^d} x(\tau) g(\tau)\, d\tau : g \in BL_\infty(\mathbf{T}^d) \right\},$$

$$E(x, M)_{L_1(\mathbf{T}^d)} = \sup\left\{ \int_{\mathbf{T}^d} x(\tau) g(\tau)\, d\tau : g \in BL_\infty(\mathbf{T}^d) \cap M^\perp \right\}.$$

Осталось доказать, что

$$\frac{k}{r}(d-1) \le \overline{\beta}. \qquad (5.3)$$

Пусть β — показатель, с которым выполняются неравенства (5.1), а значит, и (5.2). Возьмем в (5.2) в качестве M подпространства $\mathcal{T}(N, \gamma)$ и выберем специальным образом функции из $L_1^{r\gamma}(\mathbf{T}^d)$.

Пусть $F_{r_1}(t_1)$, $t_1 \in \mathbf{T}^1$, — одномерное ядро Бернулли порядка r_1, $F_{r_1,h}(t_1)$ — его среднее Стеклова с шагом $h > 0$,

$$F_{r\gamma,h}(t) = \prod_{j=1}^{d} F_{r\gamma_j,h}(t_j), \quad t_1 \in \mathbf{T}^d,$$

— среднее Стеклова многомерного ядра Бернулли $F_{r\gamma}(t)$. Заметим, что $D^{k\gamma} F_{r\gamma,h}(t) = F_{(r-k)\gamma,h}(t)$. В [21] доказано, что

$$E\big(F_{r\gamma}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \asymp N^{-r}(\ln N)^{d-1}. \tag{5.4}$$

По свойству средних Стеклова

$$\big\| F_{r\gamma,h} - F_{r\gamma} \big\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \to 0, \quad h \to 0.$$

Поэтому из (5.4) следует, что для любого N можно выбрать $h = h(N)$ настолько малым, что с некоторыми константами c_k и c_r, не зависящими от N, выполняются неравенства

$$E\big(F_{(r-k)\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \ge c_k N^{-(r-k)}(\ln N)^{d-1}$$

и

$$E\big(F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le c_r N^{-r}(\ln N)^{d-1}. \tag{5.5}$$

Кроме того, ясно, что при всех N

$$E\big(D^{r\gamma} F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le \big\| D^{r\gamma} F_{r\gamma,h(N)} \big\|_{L_1(\mathbf{T}^d)} \le C \tag{5.6}$$

с некоторой абсолютной константой C.

Теперь положим в (5.2) $x = x_N = F_{r\gamma,h(N)}$. Тогда при N из (5.5) и (5.6) получим

$$\infty > K \ge \frac{E\big(F_{(r-k)\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)}}{E\big(F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{1-k/r} E\big(D^{r\gamma} F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)}^{k/r}} \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \ln^+\Big(E\big(D^{r\gamma} F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)} \,/\, E\big(F_{r\gamma,h(N)}, \mathcal{T}(N,\gamma)\big)_{L_1(\mathbf{T}^d)}\Big)} \ge$$

$$\ge C' \frac{N^{-(r-k)}(\ln N)^{d-1}}{\big(N^{-r}(\ln N)^{d-1}\big)^{1-k/r}(\ln N)^{\beta}} = C'(\ln N)^{(d-1)k/r-\beta}.$$

Отсюда следует (5.3).

Теорема 4 доказана.

6. О неравенствах для смешанных производных в пространстве $L_\infty(\mathbf{R}^d)$. Покажем, что в этом случае аналог неравенства (3.3) невозможен даже на классе $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ бесконечно дифференцируемых функций.

Для простоты предположим, что $\gamma \in \mathbb{N}^d$ и $k, r \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Для заданных* $d > 1$, $\gamma \in \mathbb{N}^d$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *и любого* $\delta > 0$

$$\omega(\delta) :=$$

$$:= \sup\left\{ \left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} : x \in C^\infty(\mathbf{R}^d),\ \|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \delta,\ \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} = 1 \right\} = \infty,$$

где $p = 1$ *или* $p = \infty$.

Доказательство. Предположим, что при некотором $\delta_0 > 0$ величина

$$\omega(\delta_0) =$$

$$= \sup\left\{ \left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} : x \in C^\infty(\mathbf{R}^d),\ \|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \delta_0,\ \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} = 1 \right\} =$$

$$= K < \infty.$$

Тогда для любой ненулевой функции $x \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ рассмотрим функцию $y(t) = = a x(bt)$, где $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, и $b \in \mathbf{R}$, $b > 0$, выбраны так, чтобы

$$\|y\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \delta_0, \quad \left\| D^{r\gamma} y \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} = 1,$$

т. е.

$$a = \frac{\delta_0}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}}, \quad b = \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}}{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}} \right)^{1/r(\gamma_1 + \ldots + \gamma_d)}. \tag{6.1}$$

Будем иметь

$$a b^{k(\gamma_1 + \ldots + \gamma_d)} \left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \omega(\delta_0),$$

откуда с учетом (6.1) выводим

$$\left\| D^{k\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \omega(\delta_0) \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}}{\left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}} \right)^{-k(\gamma_1 + \ldots + \gamma_d)/r(\gamma_1 + \ldots + \gamma_d)} \left(\frac{\delta_0}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}} \right)^{-1} =$$

$$= K_1 \|x\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}^{1-k/r} \left\| D^{r\gamma} x \right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^d)}^{k/r}.$$

Однако, как следует из доказательства теоремы 2, такое неравенство невозможно даже для тригонометрических полиномов.

Представляется интересным сопоставить теоремы 1 и 2 с приведенными выше результатами о сравнении констант $K(\mathbf{R})$ и $K(\mathbf{T})$.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. – 1912. – **11**, № 2. – P. 411–478.
2. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktion // Ibid. – 1913. – **13**. – P. 43–49.
3. *Kolmogorov A. N.* Une generalisation de J. Hadamard entre les bornes superieures des derives succesives d'une fonction // C. r. Acad. Sci. – 1938. – **207**. – P. 764–765.
4. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Учен. зап. Моск. ун-та. Математика. – 1939. – **30**, № 3. – С. 3–13.
5. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252–263.
6. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных. Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1985. – С. 387–390.
7. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42–63.

8. *Арестов В. В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **6**. – С. 89–124.
9. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9–29.
10. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функций и их производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 3. – С. 291–298.
11. *Габушин В. Н.* Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 40. – С. 869–892.
12. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21–32.
13. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Сравнение точных констант в неравенствах для производных на вещественной прямой и окружности // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 579–589.
14. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
15. *Бесов О. В., Ильин И. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
16. *Бесов О. В.* Мультипликативные оценки для интегральных норм дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **131**. – С. 3–15.
17. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных в многомерном случае // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 1. – С. 59–74.
18. *Габушин В. Н.* Неравенства между производными в метриках L_p $(0 < p \leq \infty)$ для функций многих переменных и оптимальное дифференцирование функций // Научн. докл. Ин-та математики УрО РАН. – 1988. – С. 56.
19. *Babenko V. F., Korneichuk N. P., Pichugov S. A.* On Kolmogorov type inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions of many variables // Abstrs Int. Conf. Contructive Function Theory dedicated to 70-th Birthday of Blagovest Sendov (June 19–23, 2002, Varna, Bulgaria). – P. 4–5.
20. *Babenko V. F., Korneichuk N. P., Pichugov S. A.* On Kolmogorov type inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions of many variables // Contructive Theory of Functions (Varna, 2002). – Sofia: Darba, 2003. – P. 209–212.
21. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 113 с.
22. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta sci. math. – 1965. – **26**, № 3 – 4. – P. 225–230.
23. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 5. – С. 982–985.
24. *Теляковский С. А.* Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1404–1411.
25. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических полиномов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63**. – С. 426–444.
26. *Теляковский С. А.* Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 1. – С. 33–39.
27. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для норм промежуточных производных // Докл. РАН. – 1997. – **356**, № 2. – С. 154–156.
28. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, определенных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 619–628.
29. *Лигун А. А.* Точные неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 647–654.
30. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functions // Anal. math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11–40.
31. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
32. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
33. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, № 3. – P. 582–592.
34. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Замечание к неравенству А. Н. Колмогорова // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1980. – С. 14–17.
35. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Об одном приеме Стейна // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 7–10.

Получено 21.04.2003