УДК 512.552.4

М. А. Власенко, Н. Д. Попова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КОНФИГУРАЦИЯХ ПОДПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ФИКСИРОВАННЫМИ УГЛАМИ МЕЖДУ НИМИ

We investigate a set of irreducible configurations of subspaces of the Hilbert space such that the angle between every two subspaces is fixed. This is a problem of *-representations of some algebras that are generated by idempotents and depend on parameters (on a set of angles). We distinguish a class of problems of finite and tame representation type. For these problems, we give conditions on angles under which the configurations of subspaces exist and describe all irreducible representations.

Досліджується множина незвідних конфігурацій підпросторів гільбертового простору, де кут між кожними двома підпросторами є фіксованим. Це задача про $*$-зображення деяких алгебр, породжених ідемпотентами і залежних від параметрів (набору кутів). Виділено клас задач скінченного і ручного зображувального типу, для них вказано умови на кути, за яких конфігурації підпросторів існують, і наведено опис усіх незвідних зображень.

1. Введение. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, L_1, $L_2 \subset H$ — замкнутые подпространства. Будем говорить, что угол $\phi \in [0, \pi/2]$ между L_1 и L_2 фиксирован, если для ортогональных проекторов P_{L_1} и P_{L_2} на эти подпространства выполнены условия

$$P_{L_1} P_{L_2} P_{L_1} = (\cos^2\phi) P_{L_1}, \qquad P_{L_2} P_{L_1} P_{L_2} = (\cos^2\phi) P_{L_2}. \tag{1}$$

В работах [1, 2] дана классификация всех пар подпространств гильбертова пространства. Из [2] следует, что при $0 < \phi < \pi/2$ сумма $L_1 + L_2$ изоморфна $K \oplus K$ для некоторого гильбертова пространства K, причем при этом изоморфизме L_1 и L_2 переходят соответственно в подпространства $\{\langle x, 0\rangle; x \in K\}$ и $\{\langle x, (\operatorname{tg}\phi)x\rangle; x \in K\}$. При $\phi = \pi/2$ подпространства L_1 и L_2 ортогональны, при $\phi = 0$ они совпадают.

В настоящей работе рассматривается следующая задача. С помощью конечного графа (без кратных ребер и петель) с числами, расставленными на ребрах, задаются условия на конфигурацию подпространств в гильбертовом пространстве. Вершинам графа соответствуют подпространства, и угол между каждыми двумя из них задается числом, стоящим на ребре, соединяющем соответствующие вершины, либо равен $\pi/2$, если вершины не соединены. Требуется определить, существуют ли такие конфигурации подпространств, и, если существуют, описать все неприводимые конфигурации с точностью до унитарного преобразования. Такие задачи возникали, например, в работе [3].

Описанную выше задачу можно сформулировать в терминах $*$-представлений некоторой алгебры, связанной с графом с расстановкой чисел. Пусть Γ — граф, Γ_0 и Γ_1 — множества соответственно его вершин и ребер, $\tau : \Gamma_1 \to (0; 1)$ — некоторая расстановка чисел на ребрах Γ. Соответствующую алгебру будем обозначать $A_{\Gamma,\tau}$, точное определение дано в п. 1. Там же найден рост этих алгебр, в некоторых случаях установлена конечномерность над центром.

Поскольку подпространства, соответствующие различным компонентам связности графа, ортогональны, ограничимся рассмотрением конфигураций, заданных связными графами. В п. 2 для графов с не более чем одним циклом показано, что в неприводимой конфигурации все подпространства одномерны. В п. 3 рассмотрены условия на параметры, при которых представления существуют. Если Γ — дерево и такие конфигурации существуют, то неприводимое представление единственно с точностью до унитарного преобразования; если Γ имеет один цикл, то в зависимости от расстановки чисел может существовать либо однопараметрическое множество различных неприводимых представлений, либо единственное неприводимое представление, либо представлений вообще не существует; размерности неприводимых представлений во всех случаях ограничены числом вершин графа (п. 3).

Если в графе Γ есть два связанных между собой цикла, то $A_{\Gamma,\tau}$ содержит свободную подалгебру с двумя образующими (п. 1). В п. 4 приведен пример алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ для графа с двумя циклами, размерности неприводимых представлений которой не ограничены.

1. Предварительные результаты об алгебрах. Пусть Γ — некоторый конечный граф без кратных ребер и петель, Γ_0 и $\Gamma_1 \subset \Gamma_0 \times \Gamma_0$ — множества соответственно вершин и ребер графа Γ. Пусть $\tau : \Gamma_1 \to (0; 1)$ — некоторая расстановка чисел на ребрах Γ. Произвольным образом отождествим вершины графа с числами $0, \ldots, |\Gamma_0| - 1$. Обозначим $\tau(i, j) = \tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Определение 1. $A_{\Gamma,\tau}$ *есть алгебра с* **1** *над полем* $\mathbb{C}$, *порожденная идемпотентами* $\{p_i; i \in \Gamma_0\}$, *с соотношениями*

$$p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, \qquad p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, \quad \text{если} \quad (i, j) \in \Gamma_1,$$

$$p_i p_j = p_j p_i = 0 \text{ — в противном случае.}$$

В дальнейшем будем рассматривать $A_{\Gamma,\tau}$ как $*$-алгебру, имея в виду следующую инволюцию:

$$(p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k})^* = p_{i_k} \ldots p_{i_2} p_{i_1}.$$

Тогда образующие идемпотенты самосопряжены: $p_i^* = p_i$.

***Замечание* 1.** Можно проверить, что если все τ_{ij} одинаковы, то $A_{\Gamma,\tau}$ является фактором обобщенной алгебры Темперли – Либа, соответствующей системе Кокстера с графом Кокстера Γ.

В случае всех равных чисел τ_{ij} представления таких алгебр рассматривались в [3] для графа-цепи и в [4] для графа-цикла.

Лемма 1 следует из [5], мы приведем лишь набросок доказательства. О базисе Гребнера и бриллиантовой лемме см., например, [6].

Лемма 1. *Если граф* Γ *не содержит циклов, то алгебра* $A_{\Gamma,\tau}$ *конечномерна. Если каждая компонента связности* Γ *содержит не более одного цикла, то* $A_{\Gamma,\tau}$ *имеет размерность Гельфанда – Кириллова* 1. *Если некоторая компонента связности* Γ *содержит более одного цикла,* $A_{\Gamma,\tau}$ *содержит свободную подалгебру с двумя образующими.*

Доказательство. Зададим произвольный порядок на образующих алгебры $\{p_\alpha; \alpha \in \Gamma_0\}$, тогда на мономах из этих образующих задан однородный лексикографический порядок. Легко проверить, что соотношения в алгебре не редуцируются одно в другое и все их композиции редуцируются к 0. Тогда согласно бриллиантовой лемме соотношения образуют базис Гребнера в порожденном ими идеале свободной алгебры $\mathbb{C}\langle p_\alpha; \alpha \in \Gamma_0 \rangle$, и мономы, не содержащие старших слов этих соотношений, вместе с **1** образуют линейный базис в алгебре $A_{\Gamma,\tau}$. Теперь видно, что мономам линейного базиса соответствуют пути в графе Γ, в которых все соседние ребра различны. Отсюда следуют утверждения леммы.

Рассмотрим алгебру, соответствующую графу-циклу с n вершинами. Пусть $I = \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$ — множество остатков по модулю n, тогда

$$A_{\Gamma,\tau} = \mathbb{C}\left\langle p_{\bar{k}},\ \bar{k} \in I \;\middle|\; \begin{array}{l} p_{\bar{k}} = p_{\bar{k}}^2, \\ p_{\bar{k}} p_{\bar{i}} = p_{\bar{i}} p_{\bar{k}} = 0, \quad \bar{i} \neq \overline{k \pm 1}, \\ p_{\overline{k+1}} p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} = \tau_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}}, \\ p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} p_{\bar{k}} = \tau_{\bar{k}} p_{\bar{k}} \end{array} \right\rangle.$$

Лемма 2. *Алгебра* $A_{\Gamma,\tau}$, *соответствующая графу-циклу* Γ, *конечномерна над своим центром.*

Доказательство. Рассмотрим набор чисел с двумя индексами $\{\beta_i^{\bar{k}};\ 0 \le i \le n,\ \bar{k} \in I\}$, рекуррентно заданный как

$$\beta_0^{\bar{k}} = \beta_1^{\bar{k}} = 1 \quad \forall\, \bar{k}, \qquad \beta_{i+2}^{\overline{k+2}} = \beta_{i+1}^{\overline{k+1}} - \tau_{\bar{k}} \beta_i^{\bar{k}} \quad \forall\, i, \quad \forall\, \bar{k}. \tag{2}$$

Легко проверить индукцией по i, что при всех $\bar{k}$

$$\beta_{i+2}^{\bar{k}} = \beta_{i+1}^{\bar{k}} - \tau_{\overline{k-i-2}} \beta_i^{\bar{k}} \quad \forall\, i. \tag{3}$$

Проверим, что элемент

$$\omega = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-i}^{\bar{k}} \left(p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} \ldots p_{\overline{k+i-1}} + p_{\overline{k+i-1}} p_{\overline{k+i-2}} \ldots p_{\bar{k}}\right) + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-1}^{\bar{k}} p_{\bar{k}} \tag{4}$$

лежит в центре алгебры $A_{\Gamma,\tau}$. Из соображений симметрии достаточно проверить, что $[\omega, p_{\bar{0}}] = 0$. Кроме того, поскольку $\omega = \omega^*$ и $p_{\bar{0}} = p_{\bar{0}}^*$, достаточно проверить, что $\omega p_{\bar{0}} = (\omega p_{\bar{0}})^*$. При доказательстве леммы 1 мы построили линейный базис в $A_{\Gamma,\tau}$, соответствующий путям в Γ. Тогда ясно, что

$$\omega p_{\bar{0}} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} \cdots p_{\overline{n-1}} p_{\bar{0}} + \sum_{m=0}^{n-1} B_m p_{\bar{m}} p_{\overline{m-1}} \cdots p_{\bar{1}} p_{\bar{0}} + C p_{\bar{0}},$$

где A_k, B_m и C — числовые коэффициенты, которые мы сейчас определим. При $k > 1$ слагаемое при A_k получается при умножении на $p_{\bar{0}}$ следующих слагаемых элемента ω:

$$p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} \cdots p_{\overline{n-1}},$$

$$p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} \cdots p_{\overline{n-1}} p_{\bar{0}},$$

$$p_{\bar{k}} p_{\overline{k+1}} \cdots p_{\overline{n-1}} p_{\bar{0}} p_{\bar{1}},$$

и тогда в силу (3)

$$A_k = (-1)^k \left(\beta_k^{\bar{k}} - \beta_{k-1}^{\bar{k}} + \tau_{\bar{0}} \beta_{k-2}^{\bar{k}}\right) = 0.$$

Аналогично проверяется, что $A_0 = 1$, $A_1 = 0$. При $n-1 > m > 0$ слагаемое $p_{\bar{m}} p_{\overline{m-1}} \cdots p_{\bar{1}} p_{\bar{0}}$ получается умножением на $p_{\bar{0}}$ слагаемых

$$p_{\overline{m}}\, p_{\overline{m-1}} \cdots p_{\overline{1}},$$

$$p_{\overline{m}}\, p_{\overline{m-1}} \cdots p_{\overline{1}}\, p_{\overline{0}},$$

$$p_{\overline{m}}\, p_{\overline{m-1}} \cdots p_{\overline{1}}\, p_{\overline{0}}\, p_{\overline{n-1}},$$

и тогда в силу (2)

$$B_m = (-1)^{n-m}\left(\beta^{\overline{1}}_{n-m} - \beta^{\overline{0}}_{n-m-1} + \tau_{\overline{n-1}}\beta^{\overline{n-1}}_{n-m-2}\right) = 0,$$

а также $B_0 = 1$, $B_{n-1} = 0$. Таким образом, при некотором $C \in \mathbb{R}$

$$\omega p_{\overline{0}} = p_{\overline{0}}\, p_{\overline{1}} \ldots p_{\overline{n-1}}\, p_{\overline{0}} + p_{\overline{0}}\, p_{\overline{n-1}} \ldots p_{\overline{1}}\, p_{\overline{0}} + C p_{\overline{0}},$$

т. е. $\omega p_{\overline{0}}$ — самосопряженный элемент, что и требовалось проверить.

Теперь покажем, что $A_{\Gamma,\tau}$ конечномерна как модуль над $\mathbb{C}[\omega]$. Действительно, каждый достаточно длинный моном линейного базиса содержит один из следующих подмономов длины $n+4$:

$$p_{\overline{n-2}}\, p_{\overline{n-1}}\, p_{\overline{0}}\, p_{\overline{1}} \cdots p_{\overline{n-1}}\, p_{\overline{0}}\, p_{\overline{1}} \quad \text{либо} \quad p_{\overline{1}}\, p_{\overline{0}}\, p_{\overline{n-1}} \cdots p_{\overline{1}}\, p_{\overline{0}}\, p_{\overline{n-1}}\, p_{\overline{n-2}}.$$

Рассмотрим первый случай. Моном длины n $p_{\overline{0}}\, p_{\overline{1}} \ldots p_{\overline{n-1}}$ является линейной комбинацией элемента ω, мономов длины меньше n и мономов, которые при умножении слева на $p_{\overline{n-2}}\, p_{\overline{n-1}}$ или справа на $p_{\overline{0}}\, p_{\overline{1}}$ сокращаются до мономов меньшей длины (с числовыми коэффициентами). Аналогично рассматривается второй случай. Таким образом, любой достаточно длинный моном линейного базиса в $A_{\Gamma,\tau}$ является линейной комбинацией мономов меньшей длины с коэффициентами из $\mathbb{C}[\omega]$, что и доказывает лемму.

2. В неприводимых конфигурациях все подпространства одномерны. Здесь и в следующем пункте Γ — связный граф с не более чем одним циклом. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $A_{\Gamma,\tau}$ имеет нетривиальные неприводимые представления, то ранги всех образующих-проекторов в них равны* 1.

Для начала заметим, что имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Алгебра $A_{\Gamma,\tau}$ не имеет бесконечномерных неприводимых представлений в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Если Γ — дерево или цикл, то утверждение леммы следует из конечномерности (соответственно конечномерности над центром) алгебры $A_{\Gamma,\tau}$.

В общем случае конечномерность представлений теперь следует из такого утверждения. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — неприводимое множество ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, причем $P_0 P_i = 0$ при всех $i > 1$ и $P_0 P_1 P_0 = \alpha P_0$ для некоторого $0 < \alpha < 1$. Тогда либо $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, либо множество проекторов $P_1, \ldots, P_n$ не имеет конечномерных собственных подпространств, на которых не все они равны 0. Действительно, если $L \subset \boldsymbol{H}$ — конечномерное собственное подпространство набора проекторов $P_1, \ldots, P_n$, на котором они неприводимы и не все равны 0, то $\boldsymbol{L} + P_0(\boldsymbol{L})$ — конечномерное собственное подпространство для $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Это так, поскольку $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} P_i(\boldsymbol{L})$, а тогда $P_0(\boldsymbol{L}) = P_0 P_1(\boldsymbol{L})$ и $P_i P_0(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{L}$ для всех $i \geq 1$.

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 1.

Доказательство. Заметим, что если P, Q — ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве, причем $PQP = \alpha P$ и $QPQ = \alpha Q$ для некоторого $0 < \alpha \leq 1$, то $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} Q$. Оператор $\dfrac{QP}{\sqrt{\alpha}}$ является частичной изометрией, отображающей $\operatorname{Im} P$ на $\operatorname{Im} Q$, причем $\left(x, \dfrac{QP}{\sqrt{\alpha}}x\right)_H = \sqrt{\alpha}\,\|x\|^2$ для всех $x \in \operatorname{Im} P$.

Пусть имеется неприводимое представление $\pi\colon A_{\Gamma,\tau} \to L(H)$ алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, где $\pi(p_i) = P_i$. Из леммы 3 следует, что $\dim \boldsymbol{H} < \infty$. Зафиксируем произвольную вершину $p_0 \in \Gamma_0$, причем если Γ содержит цикл, то пусть p_0 — одна из вершин цикла. Введем ориентацию на ребрах графа Γ следующим образом. Если Γ — дерево, то пусть все ребра с концами в p_0 будут ориентированы от p_0 и в каждую вершину входит не более одного ребра. Если Γ содержит цикл, то ориентируем все ребра цикла в одном направлении. Затем снова ориентируем оставшиеся ребра так, чтобы в каждую вершину входило не более одного ребра. Для каждого ребра $\beta \in \Gamma_1$ рассмотрим частичную изометрию $U_\beta = \dfrac{P_j P_i}{\sqrt{\tau(\beta)}}$, где p_i — начало, а p_j — конец ребра β. Отметим, что p_0 сообщена с каждой вершиной $p_i \in \Gamma_0$ единственным кратчайшим путем по стрелкам, и пусть $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — этот путь (β_1 начинается в p_0, β_k заканчивается в p_i). Обозначим $V_i = U_{\beta_k} \ldots U_{\beta_1}$.

Пусть Γ — дерево. Тогда для произвольного $x \in \operatorname{Im} P_0$ линейная оболочка векторов $\{x, V_1 x, \ldots, V_n x\}$ является инвариантным подпространством представления π. Для $y \in \operatorname{Im} P_0$, $y \perp x$ легко проверить, что $y \perp V_i x$ для всех i. Значит, линейная оболочка $\{x, V_1 x, \ldots, V_n x\}$ совпадает с $\boldsymbol{H}$ только когда $\mathbb{C}x = \operatorname{Im} P_0$, что доказывает теорему для графа без циклов.

Пусть Γ — граф с циклом и $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — путь по циклу из p_0 в p_0. Обозначим $V_0 = U_{\beta_k} \ldots U_{\beta_1}$. Поскольку $V_0|_{\operatorname{Im} P_0}$ — унитарный оператор и $\operatorname{rank} P_0 < \infty$, V_0 имеет собственный вектор $x \in \operatorname{Im} P_0$. И снова линейная оболочка векторов $\{x, V_1 x, \ldots, V_n x\}$ является инвариантным подпространством представления π.

Теорема доказана.

***Пример* 1.** Пусть Γ — цепь с n вершинами и одинаковыми числами τ на всех ребрах. Какова наибольшая длина цепи n для заданного τ, при которой существует нетривиальная конфигурация подпространств? Для $\tau \in (0;\, 1/4]$ длина рассматриваемой цепочки подпространств не ограничена, для

$$\tau \in \left(\frac{1}{4\cos^2 \pi/(N+2)};\ \frac{1}{4\cos^2 \pi/(N+1)}\right], \quad N > 1,$$

максимальная длина цепочки равна N. Этот результат получен в [3] для

$$\tau \in \bigcup_{N>1} \left(\frac{1}{4\cos^2 \pi/(N+2)};\ \frac{1}{4\cos^2 \pi/(N+1)}\right).$$

Мы можем получить его, используя предыдущую теорему, согласно которой достаточно проанализировать случай одномерных подпространств конфигурации. Тогда выберем в каждом из них по единичному вектору. С помощью теоремы Пифагора можно получить, что максимальное n — длина выпущенной из 0 траектории динамической системы

$$f(x) = \frac{\tau}{1-x}: [0; 1] \to [0; 1],$$

которая останавливается, если значения выходят из отрезка $[0; 1]$. Рассматривая эту динамическую систему на компактифицированной комплексной плоскости, дробно-линейной заменой переменной систему сводим к линейной. Отсюда легко получить приведенный выше ответ.

3. Множество неприводимых представлений и множество допустимых значений параметров. Покажем, что если Γ — дерево, то алгебра $A_{\Gamma,\tau}$ конечного представленческого типа, а если Γ содержит не более одного цикла, то ручного типа при почти всех значениях параметров, при которых представления существуют. Напомним, что граф Γ связный. Пусть $|\Gamma_0| = n$ — количество вершин графа.

Рассмотрим самосопряженную матрицу $A = A(\Gamma, \tau) = \{A_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$, где $A_{i,i} = 1$, $A_{i,j} = 0$, если p_i и p_j из Γ_0 не связаны ребром, и $A_{i,j} = \sqrt{\tau_{i,j}}$ — в противном случае.

Теорема 2. *Пусть Γ — дерево. Нетривиальные представления алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ существуют, если и только если матрица $A(\Gamma, \tau)$ неотрицательно определена. Неприводимое нетривиальное представление $A_{\Gamma,\tau}$ единственно с точностью до унитарной эквивалентности, и его размерность равна рангу матрицы $A(\Gamma, \tau)$.*

Доказательство. Допустим, что существует нетривиальное неприводимое представление $\pi: A_{\Gamma,\tau} \to L(\boldsymbol{H})$ алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, где $\pi(p_i) = P_i$. Пусть U_β, $\beta \in \Gamma_1$, V_i, $0 < i < n$, — операторы, построенные при доказательстве теоремы 1, для этого представления. Далее мы также используем обозначения из этого доказательства.

Тогда для любого $x \in \operatorname{Im} P_0$ с $\|x\| = 1$ получаем $\operatorname{Im} P_i = \mathbb{C} V_i x$ для всех i и

$$A(\Gamma, \tau) = \|x, V_1 x, \ldots, V_{n-1} x\|^2,$$

где в правой части записана матрица Грама системы векторов. Тогда $\dim \boldsymbol{H} = \operatorname{rank}\{x, V_1 x, \ldots, V_{n-1} x\} = \operatorname{rank} A(\Gamma, \tau)$, и поскольку набор исходных векторов определяется по их матрице Грама с точностью до унитарного преобразования, неприводимое представление единственно. Обратно, по любым векторам $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ с $\|x_0, \ldots, x_{n-1}\|^2 = A(\Gamma, \tau)$ можно построить представление $A_{\Gamma,\tau}$ по формуле $\operatorname{Im} P_i = \mathbb{C} x_i$, и оно будет неприводимо в линейной оболочке этих векторов. (Неприводимость следует из связности графа Γ.) Еще заметим, что любая неотрицательно определенная матрица является матрицей Грама некоторого набора векторов. Это доказывает утверждение теоремы.

Пусть теперь Γ — связный граф с одним циклом, $|\Gamma_0| = n$ и для определенности вершины p_0 и p_{n-1} являются соседними вершинами цикла. Рассмотрим самосопряженную матрицу $A^\phi = A^\phi(\Gamma, \tau) = \{A^\phi_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$, где $A^\phi_{i,j} = A_{i,j}$, если $(i, j), (j, i) \neq (0, n-1)$, $A^\phi_{0,n-1} = e^{-\sqrt{-1}\phi} A_{0,n-1}$ и $A^\phi_{n-1,0} = e^{\sqrt{-1}\phi} A_{n-1,0}$.

Теорема 3. *Пусть Γ — связный граф с одним циклом. Нетривиальные представления $A_{\Gamma,\tau}$ существуют, если и только если для некоторого ϕ матрица A^ϕ неотрицательно определена. Каждому такому ϕ соответ-*

ствует единственное нетривиальное неприводимое представление размерности $\operatorname{rank} A^{\phi}$, *и при различных* ϕ *эти представления унитарно не эквивалентны.*

Доказательство. Допустим, что существует нетривиальное неприводимое представление $\pi: A_{\Gamma,\tau} \to L(H)$ алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ в гильбертовом пространстве H, где $\pi(p_i) = P_i$. Мы снова воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1. Напомним, что для построения операторов V_i мы ориентировали граф специальным образом. Пусть ребро цикла ориентировано от p_{n-1} к p_0. $V_0|_{\operatorname{Im} P_0}$ — унитарный оператор, причем $\operatorname{Im} P_0 \cong \mathbb{C}$, значит, $V_0|_{\operatorname{Im} P_0} = e^{\sqrt{-1}\phi}$ для некоторого $\phi \in [0, 2\pi)$. Кроме того, отметим, что класс унитарной эквивалентности оператора $V_0|_{\operatorname{Im} P_0}$ является унитарным инвариантом рассматриваемого представления. Т. е. представления с различными значениями параметра ϕ не эквивалентны. Заметим, что для любого вектора $x \in \operatorname{Im} P_0$ единичной длины

$$(x, V_{n-1}x)_H = (P_0 x, P_0 V_{n-1} x)_H = \sqrt{\tau_{0,n-1}}(x, V_0 x)_H = e^{-\sqrt{-1}\phi}\sqrt{\tau_{0,n-1}}.$$

Тогда

$$A^{\phi}(\Gamma, \tau) = \|x, V_1 x, \ldots, V_{n-1}x\|^2.$$

Дальнейшие рассуждения при фиксированном ϕ такие же, как в случае графа-дерева.

Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда Γ представляет собой цикл с числами $\tau_1, \ldots, \tau_n$ на ребрах

$$A^{\phi}(\Gamma, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & \cdots & e^{-\sqrt{-1}\phi}\sqrt{\tau_n} \\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\sqrt{-1}\phi}\sqrt{\tau_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Выясним, при каких условиях алгебра $A_{\Gamma,\tau}$ имеет представления. Пусть d_k — k-й главный минор. Тогда

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1 - \tau_1, \quad d_{k+1} = d_k - \tau_k d_{k-1}$$

при $k < n-1$. Если имеется индекс $k < n-1$, при котором $d_{k-1} > 0$ и $d_k = 0$, то $d_{k+1} < 0$, и A^{ϕ} не будет неотрицательно определенной. Значит, условие

$$d_k > 0, \quad k < n-1; \quad d_{n-1},\ d_n \geq 0$$

является необходимым для существования представлений. Тогда размерность представлений не меньше $n-2$.

Условие существования неприводимых представлений максимально возможной размерности n легко получить из критерия Сильвестра. Действительно, пусть F_k — такие полиномы, что $d_{k+1} = F_k(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ при $k < n-1$. Тогда

$$d_n = F_{n-2}(\tau_2, \ldots, \tau_{n-1}) - \tau_1 F_{n-3}(\tau_3, \ldots, \tau_{n-1}) -$$
$$- \tau_n F_{n-3}(\tau_2, \ldots, \tau_{n-2}) + (-1)^{n-1} 2\sqrt{\tau_1 \ldots \tau_n}\cos\phi.$$

Обозначим

$$F = \frac{F_{n-2}(\tau_2, \ldots, \tau_{n-1}) - \tau_1 F_{n-3}(\tau_3, \ldots, \tau_{n-1}) - \tau_n F_{n-3}(\tau_2, \ldots, \tau_{n-2})}{2\sqrt{\tau_1 \ldots \tau_n}}.$$

Тогда условия существования представления размерности n имеют вид

$$d_k > 0 \quad \text{при} \quad k \leq n-1 \quad \text{и} \quad F > -1. \tag{5}$$

Случай двух остальных размерностей аналогичен. Эти условия получены в [4] при одинаковых числах τ_i.

Отметим, что если выполнены все условия (5), кроме последнего, и $F = -1$, то $A_{\Gamma,\tau}$ имеет единственное неприводимое представление, его размерность равна $n-1$. Например,

$$n = 3; \quad \tau_1 = \tau_2 = \frac{2}{3}, \quad \tau_3 = \frac{1}{9}.$$

Т. е. некоторые алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ для Γ с циклом являются алгебрами конечного представленческого типа, а не ручного.

4. Пример задачи с двумя циклами, размерности неприводимых представлений которой не ограничены. Здесь мы приведем пример алгебры $A_{\Gamma,\tau}$, размерности неприводимых представлений которой не ограничены. Граф Γ будет состоять из двух циклов с одной общей точкой.

Пусть имеется неприводимое представление $\pi: A_{\Gamma,\tau} \to L(\boldsymbol{H})$ произвольной алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, где $\pi(p_i) = P_i$. Напомним, что Γ_1 — множество ребер графа Γ. Обозначим через $\Gamma_1^{i,j}$ множество путей в графе Γ, начинающихся в p_i и заканчивающихся в p_j. Как и ранее, каждому пути $\gamma \in \Gamma_1^{i,j}$ поставим в соответствие изометрию $\operatorname{Im} P_i$ на $\operatorname{Im} P_j$, равную

$$\left.\frac{P_j P_{i_k} \ldots P_{i_1} P_i}{\sqrt{\tau_{ji_k} \ldots \tau_{i_1 i}}}\right|_{\operatorname{Im} P_i} : \operatorname{Im} P_i \to \operatorname{Im} P_j, \tag{6}$$

где $p_i, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, p_j$ — последовательность вершин пути γ. Изометрию (6) будем обозначать $\pi(\gamma)$.

Лемма 4. *Пусть граф Γ связный и для некоторого j множество унитарных операторов $\{\pi(\gamma); \gamma \in \Gamma_1^{j,j}\}$ неприводимо в $\operatorname{Im} P_j$. Тогда представление π неприводимо на $\sum_{p_i \in \Gamma_0} \operatorname{Im} P_i$.*

Доказательство. Очевидно, можно считать $\boldsymbol{H} = \sum_{p_i \in \Gamma_0} \operatorname{Im} P_i$. Предположим, что π приводимо, и пусть $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2$, где $\boldsymbol{H}_i$ — инвариантные подпространства представления π. Пусть $P_k^i = P_k|_{H_i}$ для всех k и $i = 1, 2$. Поскольку Γ — связный граф, в любом представлении $A_{\Gamma,\tau}$ образы $p_i \in \Gamma_0$ изометричны. Тогда P_j^1, $P_j^2 \neq 0$, и $\operatorname{Im} P_j^i$ являются инвариантными подпространствами для всех операторов из $\pi(\Gamma_1^{j,j}) = \{\pi(\gamma); \gamma \in \Gamma_1^{j,j}\}$, что противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Отметим, что в обозначениях леммы 4, если $\langle \operatorname{Im} \pi_1(p_j), \pi_1(\Gamma_1^{j,j}) \rangle$ и $\langle \operatorname{Im} \pi_2(p_j), \pi_2(\Gamma_1^{j,j}) \rangle$ унитарно не эквивалентны, то представления π_1 и π_2

также унитарно не эквивалентны. Мы уже использовали подобные аргументы и раньше (при доказательстве теорем 2 и 3).

***Пример* 3.** Пусть граф Γ представляет собой объединение двух циклов с одной общей вершиной. Пусть $p_0, \ldots, p_n$ и $p_0, q_1, \ldots, q_m$ — вершины каждого из циклов (по порядку) и $n, m > 2$. Рассмотрим расстановку чисел τ на графе Γ: на ребрах первого цикла поставим числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (между p_0 и p_1 стоит α_0 и т. д.), на ребрах второго цикла — аналогично $\beta_0, \ldots, \beta_m$. Пусть наборы чисел $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \ldots, \beta_m$ таковы, что существуют представления для каждого из циклов в отдельности. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $\alpha_0 + \alpha_n + \beta_0 + \beta_m < 1$, *то для каждой тройки* $\langle \boldsymbol{H}, U, V\rangle$, *где* U *и* V — *неприводимая пара унитарных операторов в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$, *существует неприводимое представление алгебры* $A_{\Gamma,\tau}$, *в котором* $\operatorname{Im} P_0 \cong \boldsymbol{H}$, *и для унитарно не эквивалентных троек* $\langle \boldsymbol{H}_1, U_1, V_1\rangle$ *и* $\langle \mathbf{H}_2, U_2, V_2\rangle$ *соответствующие представления* $A_{\Gamma,\tau}$ *также унитарно не эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\langle H, U, V\rangle$ — неприводимая тройка. Пусть Γ_α — граф-цепочка с n вершинами и числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ на ребрах. Аналогично определим Γ_β. Пусть $\pi_\alpha : A_{\Gamma_\alpha,\alpha} \to L(V_\alpha)$ и $\pi_\beta : A_{\Gamma_\beta,\beta} \to L(V_\beta)$ — нетривиальные неприводимые представления соответствующих алгебр. Они существуют, и все образующие проекторы имеют в них ранг 1. Построим представление π алгебры $A_{\Gamma,\tau}$ в пространстве $\boldsymbol{H}_1 = (V_\alpha \otimes \boldsymbol{H}) \oplus (V_\beta \otimes \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}$. Положим $\pi(p_i) == \pi_\alpha(p_i) \otimes \boldsymbol{I}_H$ и $\pi(q_j) = \pi_\beta(q_j) \otimes \boldsymbol{I}_H$ при $i, j > 0$.

Теперь построим $\pi(p_0)$. Пусть $i_1 : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Im}\pi(p_1)$, $i_3 : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Im}\pi(q_1)$ — произвольные изометрии,

$$U_\alpha = \frac{\pi(p_n)\ldots\pi(p_1)}{\sqrt{\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1}}, \qquad U_\beta = \frac{\pi(q_m)\ldots\pi(q_1)}{\sqrt{\beta_{m-1}\ldots\beta_1}},$$

$i_2 = U_\alpha \circ i_1 : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Im}\pi(p_n)$, $i_4 = U_\beta \circ i_3 : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Im}\pi(q_m)$. $\boldsymbol{H}$ будем отождествлять с последней компонентой в прямой сумме $\boldsymbol{H}_1$. Тогда $\boldsymbol{H} \oplus_{j=1}^4 i_j(\boldsymbol{H}) \subset \subset \boldsymbol{H}_1$. Пусть $\delta = \alpha_0 + \alpha_n + \beta_0 + \beta_m$, $\delta_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{1-\delta}}$, $\delta_2 = \sqrt{\frac{\alpha_n}{1-\delta}}$, $\delta_3 = \sqrt{\frac{\beta_0}{1-\delta}}$, $\delta_4 = \sqrt{\frac{\beta_m}{1-\delta}}$. Определим $\pi(p_0)$ как проектор на подпространство

$$\boldsymbol{L} = \left\{x + \delta_1 i_1(x) + \delta_2 i_2(U^* x) + \delta_3 i_3(x) + \delta_4 i_4(V^* x);\ x \in \boldsymbol{H}\right\}.$$

Обозначим $P_i = \pi(p_i)$, $Q_j = \pi(q_j)$. Легко проверить, что π — представление $A_{\Gamma,\tau}$. Например, проверим, что $P_0 P_1 P_0 = \alpha_0 P_0$. Обозначим $\hat{x} = x + + \delta_1 i_1(x) + \delta_2 i_2(U^* x) + \delta_3 i_3(x) + \delta_4 i_4(V^* x)$ для $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда $P_1 \hat{x} = \delta_1 i_1(x)$, и пусть $P_0 P_1 \hat{x} = \hat{z}$ для некоторого $z \in \boldsymbol{H}$. Тогда для всех $y \in \boldsymbol{H}$

$$0 = (\hat{z} - \delta_1 i_1(x), \hat{y})_{H_1} = \frac{1}{1-\delta}(z, y)_H - \delta_1^2 (x, y)_H,$$

и $z = \delta_1^2 (1-\delta) x = \alpha_0 x$, $P_0 P_1 \hat{x} = \alpha_0 \hat{x}$. Проверим теперь, что $P_0 P_n P_0 = \alpha_n P_0$. $P_n \hat{x} = \delta_2 i_2(U^* x)$, и если $\hat{z} = P_0 P_n \hat{x}$, то для всех $y \in \boldsymbol{H}$

$$0 = (\hat{z} - \delta_2 i_2(U^* x), \hat{y})_{H_1} = \frac{1}{1-\delta}(z, y)_H - \delta_2^2 (x, y)_H,$$

далее аналогично. Равенство $P_1 P_0 P_1 = \alpha_0 P_1$ теперь следует из того, что $\operatorname{Im} P_1 P_0 P_1 = \operatorname{Im} P_1$; во всех остальных случаях аналогично. Итак, π — представление $A_{\Gamma,\tau}$, причем $\operatorname{Im} P_0 \cong \boldsymbol{H}$, где изометрия $i_0 : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Im} P_0$ задается как $i_0(x) = \sqrt{1-\delta}\,\hat{x}$.

Пусть $\gamma_\alpha \in \Gamma_1^{0,0}$ — обход цикла по вершинам $p_0, p_1, \ldots, p_n, p_0$, $\gamma_\beta \in \Gamma_1^{0,0}$ — обход второго цикла по вершинам $p_0, q_1, \ldots, q_m, p_0$. Тогда

$$i_0 : \langle \boldsymbol{H}, U, V \rangle \to \langle \operatorname{Im} P_0, \pi(\gamma_\alpha), \pi(\gamma_\beta) \rangle$$

— изометрия. Теперь осталось воспользоваться леммой 4 и замечанием после этой леммы.

1. *Davis Ch.* Separation of two linear subspaces // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1958. – **19**. – P. 172 – 187.
2. *Halmos P. R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 381 – 389.
3. *Wenzl H.* On sequences of projections // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1987. – **9**, № 1. – P. 5 – 9.
4. *Popova N.* On one algebra of Temperley – Lieb type // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2001. – P. 486 – 489.
5. *Vlasenko M.* On the growth of an algebra generated by a system of projections with fixed angles // Meth. Func. Anal. and Top. – 2004. – **10**, № 1. – P. 98 – 104.
6. *Уфнаровский В.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Достижения науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1990. – **57**. – С. 5 – 178.

Получено 28.07.2003