УДК 517.5

І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ ФУР'Є $\overline{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

We find asymptotic formulas for deviations of the Fourier operators on the classes $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ and $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ of continuous functions in a uniform metric. We also obtain asymptotic laws of decreasing of functionals which characterize the problem of simultaneous approximation of $\overline{\psi}$ -integrals of continuous functions by the Fourier operators in the uniform metric.

Знайдено асимптотичні формули відхилень операторів Фур'є на класах неперервних функцій $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ і $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ в рівномірній метриці. Отримано асимптотичні закони спадання функціоналів, які характеризують задачу про одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів неперервних функцій за допомогою операторів Фур'є в рівномірній метриці.

1. Постановка задачі та формулювання основних результатів. Нехай $\hat{L}$ (див. [1]) — множина функцій $\varphi(\cdot)$, що задані на дійсній осі $\mathbb{R}$ і мають скінченну норму

$$\|\varphi\| = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|dt.$$

Нехай, далі, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi_1(t), \psi_2(t)$ таких, що майже для всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_{1+} + i\hat{\psi}_{2-},$$

де

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ixt}dx,$$

ψ_{1+}, ψ_{2+} і ψ_{1-}, ψ_{2-} — парні і непарні продовження функцій ψ_1 і ψ_2 відповідно.

Тоді через $\hat{L}^{\overline{\psi}}$ позначимо множину всіх функцій $f \in \hat{L}$, які майже для всіх x можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\hat{\psi}(t)dt = A_0 + \varphi * \hat{\psi}(x), \tag{1}$$

де A_0 — деяка константа, $\varphi \in \hat{L}$, а інтеграл розуміють як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються.

Якщо $f \in \hat{L}$ і $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\hat{L}$, то пишуть $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій з $\hat{L}^{\overline{\psi}}$ і $\hat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають $\hat{C}^{\overline{\psi}}$ і $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ відповідно. Функцію $f(\cdot)$ в рівності (1) називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і записують $f(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi, \cdot)$. Іноді функцію $\varphi(\cdot)$ називають $\overline{\psi}$-похідною $f(\cdot)$ і записують $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Уперше означення $\overline{\psi}$-похідних функцій з $\hat{L}$ в дещо іншій формі наведено в роботі [2]. Означення $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій можна знайти, наприклад, у роботі [3] (гл. IX) (див. також [4 – 8]).

При означенні множин $\hat{L}^{\overline{\psi}}$ функції $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ підпорядковано умові, щоб перетворення Фур'є $\hat{\psi}(x)$ функції $\psi(t) = \psi_{1+}(t) + i\psi_{2-}(t)$ існувало майже для всіх x. Тепер вкажемо достатні умови для того, щоб перетворення Фур'є $\hat{\psi}(x)$ було сумовним на всій осі.

Нехай $\mathfrak{A}$ — множина всіх неперервних при $t \geq 0$ функцій ψ, які задовольняють умови:

1) $\psi(u) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, ψ зростає на $[0; 1]$;

2) ψ опукла донизу на $[1; \infty)$ і $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = 0$;

3) $\psi'(u) := \psi'(u+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0; \infty)$:

$$\bigvee_0^{\infty} \psi'(u) \leq K < \infty.$$

Підмножину всіх функцій ψ з $\mathfrak{A}$, які задовольняють умову

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty,$$

позначають через $\mathfrak{A}'$, а підмножину всіх функцій ψ з $\mathfrak{A}$, для яких виконується

$$\eta'(t) = \eta'(\psi, t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \leq K \quad \forall\, t \geq 1,$$

де $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $t \geq 1$, K — деяка додатна константа, — через F_0.

Твердження 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$. *Тоді перетворення Фур'є* $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_{1+}(t) + i\hat{\psi}_{2-}(t)$ *сумовне на всій осі і при* $|t| \to \infty$ $\hat{\psi}(t) = O(t^{-2})$.

Доведення. Враховуючи означення перетворення Фур'є функції $\psi = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$ і виконуючи нескладні перетворення, отримуємо

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_{1+}(t) + i\hat{\psi}_{2-}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi_1(v)\cos vt\, dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\, dv.$$

У роботі [6] (твердження 10) доведено, що при виконанні умов твердження 1 функції $\hat{\psi}_{1+}(t)$ і $i\hat{\psi}_{2-}(t)$ є сумовними на всій осі і при $|t| \to \infty$ $\hat{\psi}_{1+}(t) = O(t^{-2})$, $i\hat{\psi}_{2-}(t) = O(t^{-2})$. Враховуючи це, завершуємо доведення твердження 1.

Далі будемо вважати, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$.

Нехай $\mathscr{E}_\sigma$ — клас цілих функцій експоненціального типу σ $(\sigma > 0)$. З основними відомостями про $\mathscr{E}_\sigma$ можна ознайомитись, наприклад, у роботах Н. І. Ахієзера [9] або О. П. Тімана [10].

Оператором Фур'є порядку (σ, c), $\sigma > c > 0$, називають (див., наприклад, [8]) довільний оператор $A_{\sigma c}$: $\mathfrak{N} \to \mathscr{E}_\sigma$, $\mathfrak{N} \subset \hat{L}$, який кожній періодичній функції $f \in \hat{L}$ ставить у відповідність тригонометричний поліном $t_n(\cdot)$ степеня не вище (σ), у якого коефіцієнти з номерами, що не перевищують c, є коефіцієнтами Фур'є функції $f(\cdot)$, де

$$(\sigma) = \begin{cases} [\sigma], & \sigma > [\sigma]; \\ \sigma - 1, & \sigma = [\sigma], \end{cases}$$

$[\sigma]$ — ціла частина числа σ. З означення випливає, що для довільної 2π-періодичної функції $f \in \hat{L}$

$$A_{\sigma(\sigma)}(f) = S_{(\sigma)}(f),$$

де $S_n(f)$ — n-та частинна сума ряду Фур'є функції $f(\cdot)$.

Нехай $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}$ і

$$F_{\sigma c}(f, x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\psi\lambda}_{\sigma c}, \tag{2}$$

де $\widehat{\psi\lambda}_{\sigma c}$ — перетворення Фур'є функції $\psi(t)\lambda_{\sigma c}(t)$ при $c = \sigma - h > 0$ і

$$\lambda_{\sigma c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le c; \\ 1 - \dfrac{|t| - c}{\sigma - c} \dfrac{\psi(\sigma \operatorname{sign}(t))}{\psi(t)}, & c < |t| < \sigma; \\ 0, & \sigma \le |t|, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \psi_{1+}(t) + i\psi_{2-}(t).$$

Такі оператори розглядались у роботах [1, 2, 4 – 8]. Із роботи [2] випливає, що оператори $F_{\sigma c}(f, x)$, $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}$, є операторами Фур'є порядку (σ, c).

Мета даної роботи полягає в знаходженні асимптотичних рівностей для величин

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}, x) = \sup\left\{\left|\rho_{\sigma c}(f; x)\right| : f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right\},$$

де $\rho_{\sigma c}(f; x) = f(x) - F_{\sigma c}(f, x)$, коли $\mathfrak{N}$ — одинична куля S_∞ у просторі $\mathcal{M}$ істотно обмежених функцій

$$S_\infty \stackrel{\text{df}}{=} S_{\mathcal{M}} = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \le 1\},$$

і тоді $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = \hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$, а також коли

$$\mathfrak{N} = H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega(|t - t'|),\ t, t' \in \mathbb{R}\},$$

де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. У цьому випадку $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = \hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega$.

Основним у цьому напрямку є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1, \psi_2 \in F_0$ *і* $c = \sigma - h > 0$, *де* h — *деяке додатне число. Тоді величини*

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup\left\{\left|\rho_{\sigma c}(f; x)\right| : f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right\},$$

де $\mathfrak{N} = S_\infty \cup H_\omega$, *не залежать від значення* x. *Якщо при цьому виконується умова*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1, t) - t}{\eta(\psi_2, t) - t} \le K_2 < \infty \quad \forall t \ge 1, \tag{3}$$

то при $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty) &= \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(\sigma)\left|\ln(\eta(\sigma) - \sigma)\right| + O(1)\,\overline{\psi}(\sigma), \\ \mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega) &= \frac{2}{\pi^2} e_\sigma(\omega)\overline{\psi}(\sigma)\left|\ln(\eta(\sigma) - \sigma)\right| + O(1)\,\overline{\psi}(\sigma)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\overline{\psi}(\sigma) = (\psi_1^2(\sigma)+\psi_1^2(\sigma))^{1/2}$, $\eta(\sigma) = \eta(\psi_1,\sigma)$ *(або* $\eta(\psi_2,\sigma)$), $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ,

$$e_\sigma(\omega) = \theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt, \tag{5}$$

$\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності.*

У роботі також розглядаються функціонали, що характеризують одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів функцій із класів S_∞ та H_ω, що означаються таким чином.

Нехай $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(1)}, \overline{\psi}^{(2)}, \ldots, \overline{\psi}^{(m)}\}$, де $\overline{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $i = \overline{1,m}$, — пари функцій, такі, що $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}'$. Нехай, далі, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — довільний вектор із дійсними координатами, $\mathfrak{N}$ — клас S_∞ або клас H_ω і

$$\Sigma_{\sigma,m}(\varphi, x, \overline{\psi}, c) = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)}\left(\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi(x) - F_\sigma(\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi, x)\right), \tag{6}$$

де $\varphi \in \mathfrak{N}$,

$$F_\sigma(f, x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\psi\lambda}_\sigma,$$

$\widehat{\psi\lambda}_\sigma$ — перетворення Фур'є функції $\psi(t)\lambda_\sigma(t)$ при $\sigma > 1$ і

$$\lambda_\sigma(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le \sigma - 1; \\ 1 - (|t| - \sigma + 1)\dfrac{\psi(\sigma\,\mathrm{sign}(t))}{\psi(t)}, & \sigma - 1 < |t| < \sigma; \\ 0, & \sigma \le |t|, \end{cases}$$

де $\psi(t) = \psi_{1+}(t) + i\psi_{2-}(t)$. Із побудови операторів $F_\sigma(f, x)$, $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}$, випливає, що вони є операторами Фур'є порядку $(\sigma, \sigma - 1)$.

Величину в (6) визначено на множині $\mathfrak{N}$, тому має сенс вираз

$$\Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N}, \overline{\psi}, c) = \Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N}, x, \overline{\psi}, c) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left\| \Sigma_{\sigma,m}(\varphi, x, \overline{\psi}, c)\right\|_C, \tag{7}$$

де $\mathfrak{N} = S_\infty$ або $\mathfrak{N} = H_\omega$.

Дослідження величини (7) і є задачею про одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів неперервних функцій операторами Фур'є в рівномірній метриці.

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(i)}\}$ $(\overline{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}),\ i = \overline{1,m})$ — *послідовність пар така, що* $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)} \in F_0$, $i = \overline{1,m}$, *і* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — m-*вимірний дійсний вектор. Тоді величини*

$$\Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N}, \overline{\psi}, c) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)}\left[\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi(x) - F_\sigma(\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi, x)\right]\right\|_C,$$

де $\mathfrak{N} = S_\infty \cup H_\omega$, *не залежать від значення* x. *Якщо при цьому виконуються умови*

$$0 < K_1^{(i)} \le \frac{\eta(\psi_1^{(i)}, t) - t}{\eta(\psi_2^{(i)}, t) - t} \le K_2^{(i)} < \infty \quad \forall\, t \ge 1, \quad i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

то при $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\Sigma_{\sigma,m}(S_\infty, \overline{\psi}, c) = \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{m_1-1} R_k \ln\frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} - R_{m_1}\ln\alpha_\sigma^{(m_1)} + \right.$$

$$\left. + Q_{m_1+1}\ln\alpha_\sigma^{(m_1+1)} + \sum_{k=m_1+1}^{m-1} Q_{k+1}\ln\frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}}\right) + O(1), \tag{9}$$

$$\Sigma_{\sigma,m}(H_\omega, \overline{\psi}, c) = \frac{2}{\pi^2}e_\sigma(\omega)\left(\sum_{k=1}^{m_1-1} R_k \ln\frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} - R_{m_1}\ln\alpha_\sigma^{(m_1)} + \right.$$

$$\left. + Q_{m_1+1}\ln\alpha_\sigma^{(m_1+1)} + \sum_{k=m_1+1}^{m-1} Q_{k+1}\ln\frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}}\right) + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $e_\sigma(\omega)$ — *величина, яка визначається рівністю* (5),

$$R_k = R_k(\overline{\psi}, c) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

$$Q_k = Q_k(\overline{\psi}, c) = \sqrt{(A_k - A_{m_1})^2 + (B_k - B_{m_1})^2},$$

$$A_k = A_k(\overline{\psi}, c) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cos\gamma_\sigma^{(i)}, \qquad B_k = B_k(\overline{\psi}, c) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sin\gamma_\sigma^{(i)},$$

$$\gamma_\sigma^{(i)} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}(\sigma)}{\psi_1^{(i)}(\sigma)},$$

$$\alpha_\sigma^{(k)} = (\eta(\psi_1^{(k)}, \sigma) - \sigma)^{-1} \quad (\textit{або}\ (\eta(\psi_2^{(k)}, \sigma) - \sigma)^{-1}), \quad k = \overline{1, m};$$

у рівностях (9) *величини* $\alpha_\sigma^{(k)}$ *впорядковано за зростанням, причому вважається, що при* $k = \overline{1, m_1}$ $\alpha_\sigma^{(k)} < 1$, *а при* $k = \overline{m_1+1, m}$ $\alpha_\sigma^{(k)} \geq 1$; $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ.

Нехай $\mathfrak{A}_C$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ таких, що задовольняють умову

$$0 < C_1 \leq \frac{t}{\eta(\psi, t) - t} \leq C_2 < \infty \quad \forall\, t \geq 1.$$

Як відомо (див. теорему III.13.1 із [3]), $\mathfrak{A}_C \in F_0$. Тоді якщо $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$, то буде виконуватись умова (8) і тоді

$$\sum_{k=1}^{m-1} R_k \ln\frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} - R_m \ln\alpha_\sigma^{(m)} = R_m \ln\sigma + O(1).$$

Таким чином, з теореми 2 отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(i)}\}$, $\overline{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\Sigma_{\sigma,m}(S_\infty, \overline{\psi}, c) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln\sigma + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,m}(H_\omega, \overline{\psi}, c) = \frac{2}{\pi^2} e_\sigma(\omega) R_m \ln\sigma + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ.

Зауваження 1. Теорему 1 у випадку $\psi_1(t) = \psi(t)\cos(\beta\pi/2)$, $\psi_2(t) = \psi(t)\sin(\beta\pi/2)$ при $\varphi \in F_0$ доведено в роботі [4] (теорема IX.12.2).

***Зауваження* 2.** Нехай $C_\infty^{\overline{\psi}}$ і $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ — підмножини 2π-періодичних функцій з $\hat{C}_\infty^{\overline{\psi}}$ і $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega$. Для класів $C_\infty^{\overline{\psi}}$ і $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ при $\sigma = n \in N$ теорема 1 є аналогом теореми V.10.1 з [3]. Остання замість величини $|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)|$ містить величину $\ln^+(\eta(\sigma)-\sigma)$, де $\ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}$. Якщо знайдеться константа K така, що

$$0 < \eta(\sigma) - \sigma \le K,$$

то величина $\ln^+(\eta(\sigma)-\sigma)$ також буде обмеженою, і тоді наближення сумами Фур'є на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ і $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ будуть мати відповідно порядок $\overline{\psi}(\sigma)$ і $\overline{\psi}(\sigma)\omega(1/\sigma)$, тобто порядок величин найкращих поліноміальних наближень на цих класах. Але у випадку, коли величина $\eta(\sigma)-\sigma$ не обмежена знизу жодним додатним числом, тобто коли

$$\lim_{\sigma\to 0}(\eta(\sigma)-\sigma) = 0,$$

величини $\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}_\infty^{\overline{\psi}})$ і $\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega)$ не будуть прямувати до нуля зі швидкістю спадання величини $\overline{\psi}(\sigma)$ і, відповідно, $\overline{\psi}(\sigma)\omega(1/\sigma)$. Зазначимо, що це буде так, наприклад, для функцій $\psi_1(t) = \exp(-\alpha_1 t^{r_1})$, $\psi_2(t) = \exp(-\alpha_2 t^{r_2})$, $t \ge 1$, α_1, $\alpha_2 > 0$, r_1, $r_2 > 1$, які породжують класи цілих функцій. Подібний ефект було уперше відмічено в роботах [4, 5].

***Зауваження* 3.** Теорему 2 в дещо інших термінах у прийнятих у даній роботі позначеннях у випадках, коли $\psi_1^{(i)}(t) = \psi^{(i)}(t)\cos(\beta_i\pi/2)$, $\psi_2^{(i)}(t) = \psi^{(i)}(t) \times \times \sin(\beta_i\pi/2)$ при $\psi \in \mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{A}_\infty^+$, де

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{A}\colon 0 < \frac{t}{\eta(t)-t} \le c \quad \forall t \ge 1\right\},$$

$$\mathfrak{A}_\infty^+ = \left\{\psi \in \mathfrak{A}\colon \frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty\right\},$$

c — деяка додатна константа, встановлено в роботі [11] (див. також [12]).

2. Доведення теорем 1 і 2. ***Доведення теореми* 1.** Покажемо спочатку, що величини $\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})$, де $\mathfrak{N} = S_\infty$ або $\mathfrak{N} = H_\omega$, не залежать від значення x. Класи $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ є інваріантними відносно зсуву аргументу: якщо $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, то для довільного τ функція $f_1(x) = f(x+\tau)$ також належить до $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Отже, якщо функція f належить до $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, то знайдеться функція $f_1 \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ така, що $\rho_{\sigma c}(f;x) = \rho_{\sigma c}(f_1;0)$. Тому

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup\left\{\left|\rho_{\sigma c}(f;0)\right| \colon f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right\}. \tag{10}$$

Звідси випливає, що величини $\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})$ дійсно не залежать від значення x.

Далі для отримання асимптотичних рівностей (4) необхідними є такі леми.

Лема 1. *Нехай* ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, $a_1 = a_1(\sigma)$ *і* $a_2 = a_2(\sigma)$ — *довільні неперервні при всіх* $\sigma \ge 1$ *функції такі, що для деяких додатних констант* $\overline{a}_i$

$$\sigma a_i(\sigma) \ge \overline{a}_i \quad \forall \sigma \ge 1, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Тоді якщо $f \in \hat{C}_\infty^{\overline{\psi}}$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge h > 0$ $(\sigma \ge 1)$

$$\rho_{\sigma c}(f,x) = -\nu_1 \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_1 \le |t| \le M_1} f^{\overline{\psi}}(x-t) \frac{\sin \sigma t}{t} dt +$$

$$+ \nu_2 \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_2 \le |t| \le M_2} f^{\overline{\psi}}(x-t) \frac{\cos \sigma t}{t} dt + b_\sigma^{\psi_1}(a_1, f, x) + b_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x); \quad (12)$$

якщо ж $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge h > 0$ $(\sigma \ge 1)$

$$\rho_{\sigma c}(f,x) = -\nu_1 \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_1 \le |t| \le M_1} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\sin \sigma t}{t} dt +$$

$$+ \nu_2 \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_2 \le |t| \le M_2} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\cos \sigma t}{t} dt +$$

$$+ d_\sigma^{\psi_1}(a_1, f, x) + d_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x), \quad (13)$$

де

$$\left| b_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \right| \le O(1)(\psi_i(\sigma) + Q_\sigma(a_i, \psi_i)),$$

$$\left| d_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \right| \le O(1)(\psi_i(\sigma) + Q_\sigma(a_i, \psi_i))\, \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$Q_\sigma(a_i, \psi_i) = \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(t+\sigma)}{t} dt + \int\limits_{a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma + 1/t)}{t} dt,$$

$$\nu_i = \operatorname{sign}(a_i(\sigma) - h^{-1}),$$

$$m_i = \min\left\{a_i(\sigma);\, h^{-1}\right\}, \quad M_i = \max\left\{a_i(\sigma);\, h^{-1}\right\}, \quad i = 1, 2,$$

$O(1)$ — *величини, які не залежать ні від* σ, *ні від функцій* $f(\cdot)$, *що належать відповідним класам.*

Лема 2. *Нехай* ψ_1, $\psi_2 \in F_0$ *і задовольняють умову* (3). *Тоді якщо* $f \in \hat{C}_\infty^{\overline{\psi}}$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge h > 0$ $(\sigma \ge 1)$

$$\rho_{\sigma c}(f,x) = -\nu_a \frac{\overline{\psi}(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} f^{\overline{\psi}}(x-t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt + O(1)\overline{\psi}(\sigma); \quad (14)$$

якщо ж $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega$, *то для довільних* x *і* $\sigma \ge h > 0$ $(\sigma \ge 1)$

$$\rho_{\sigma c}(f,x) = -\nu_a \frac{\overline{\psi}(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt +$$

$$+ O(1)\overline{\psi}(\sigma)\, \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad (15)$$

де

$$a(\sigma) = \min\left\{(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma)^{-1};\, (\eta(\psi_2, \sigma) - \sigma)^{-1}\right\},$$

$$\nu_a = \operatorname{sign}(a(\sigma) - h^{-1}), \quad (16)$$

$$m_a = \min\left\{a(\sigma);\, h^{-1}\right\}, \quad M_a = \max\left\{a(\sigma);\, h^{-1}\right\},$$

$$\gamma_\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}, \quad (17)$$

$O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по* σ.

Припустимо, що леми доведено. Тоді якщо $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, то за означенням $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$. З іншого боку, для довільного $y \in \mathfrak{N}$ у класі $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ є функція $f(\cdot)$ така, що майже скрізь $f^{\overline{\psi}}(\cdot) = y(\cdot)$. Тому, враховуючи (10) – (17) і виконуючи заміну змінних $t = -z$, отримуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty) = \sup_{\varphi \in S_\infty} \frac{\overline{\psi}(\sigma)}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t + \gamma_\sigma)}{t} dt \right| + O(1)\overline{\psi}(\sigma),$$
$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega) = \sup_{\varphi \in H_\omega} \frac{\overline{\psi}(\sigma)}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t + \gamma_\sigma)}{t} dt \right| + \tag{18}$$
$$+ O(1)\overline{\psi}(\sigma)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

У роботі [4, с. 224 – 228] у прийнятих у даній роботі позначеннях доведено, що

$$\sup_{\varphi \in S_\infty} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t + \gamma_\sigma)}{t} dt \right| = \frac{4}{\pi} |\ln a(\sigma)| + O(1),$$
$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t + \gamma_\sigma)}{t} dt \right| = \frac{2}{\pi} e_\sigma(\omega) |\ln a(\sigma)| + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{19}$$

де $e_\sigma(\omega)$ визначається рівністю (5), в якій $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по σ. Об'єднуючи (18), (19), завершуємо доведення теореми 1.

***Доведення леми* 1.** Нехай

$$r_{\sigma c}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le |t| \le c; \\ \dfrac{|t| - c}{\sigma - c} \psi(\sigma \operatorname{sign}(t)), & c < |t| < \sigma; \\ \psi(t), & \sigma \le |t|. \end{cases} \tag{20}$$

На підставі (1) і (2) можемо записати

$$\rho_{\sigma c}(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \hat{r}_{\sigma c}(t) dt. \tag{21}$$

З [1] (теорема 1) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{r}_{\sigma c}(t) dt = 0,$$

тому

$$\rho_{\sigma c}(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(x - t) - f(x)) \hat{r}_{\sigma c}(t) dt. \tag{22}$$

Враховуючи (20), отримуємо

$$\hat{r}_{\sigma c}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\sigma c}(s)e^{-ist}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{c}^{\sigma}\frac{s-c}{\sigma-c}\left(\psi(\sigma)e^{-ist}+\psi(-\sigma)e^{ist}\right)ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}^{\infty}\left(\psi(s)e^{-ist}+\psi(-s)e^{ist}\right)ds. \quad (23)$$

Але $\psi = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, тому

$$\psi(s)e^{-ist} + \psi(-s)e^{ist} = 2\left(\psi_1(s)\cos st + \psi_2(s)\sin st\right). \quad (24)$$

Таким чином, об'єднуючи (23) і (24), записуємо

$$\hat{r}_{\sigma c}(t) = \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_{c}^{\sigma}\frac{s-c}{\sigma-c}\cos st\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty}\psi_1(s)\cos st\,ds +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int_{c}^{\sigma}\frac{s-c}{\sigma-c}\sin st\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds. \quad (25)$$

Нехай

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x-t), & f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}; \\ f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x), & f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}. \end{cases} \quad (26)$$

Тоді, враховуючи (21), (22) і (26), отримуємо

$$\rho_{\sigma c}(f,x) = -\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)\hat{r}_{\sigma c}(t)\,dt. \quad (27)$$

Наслідуючи О. І. Степанця [4, с. 218], покладаємо

$$B_{\sigma}^{\psi_1}(a_1,f,x) = -\nu_1\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_{m_1\le|t|\le M_1}\varphi(x,t)\frac{\sin\sigma t}{t}\,dt,$$

$$P_{\sigma}^{\psi_1}(a_1,f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le a_1(\sigma)}\varphi(x,t)\int_{\sigma}^{\infty}\psi_1(s)\cos st\,ds\,dt,$$

$$R_{\sigma}^{\psi_1}(a_1,f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge a_1(\sigma)}\frac{\varphi(x,t)}{t}\int_{\sigma}^{\infty}\psi_1'(s)\sin st\,ds\,dt, \quad (28)$$

$$\gamma_{\sigma}^{\psi_1}(f,x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_{-h^{-1}}^{h^{-1}}\varphi(x,t)\int_{c}^{\sigma}\frac{s-c}{\sigma-c}\cos st\,ds\,dt,$$

$$\delta_{\sigma}^{\psi_1}(f,x) = \frac{2\psi_1(\sigma)}{\pi h}\int_{|t|\ge h^{-1}}\varphi(x,t)\frac{\sin((2\sigma-h)t/2)\sin(ht/2)}{t^2}\,dt.$$

Аналогічно,

$$B_{\sigma}^{\psi_2}(a_2,f,x) = -\nu_2\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int_{m_2\le|t|\le M_2}\varphi(x,t)\frac{\cos\sigma t}{t}\,dt,$$

$$P_{\sigma}^{\psi_2}(a_2,f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le a_2(\sigma)}\varphi(x,t)\int_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt,$$

$$R_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq a_2(\sigma)} \frac{\varphi(x,t)}{t} \int\limits_\sigma^\infty \psi_2'(s) \cos st \, ds \, dt, \tag{29}$$

$$\gamma_\sigma^{\psi_2}(f, x) = -\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{-h^{-1}}^{h^{-1}} \varphi(x,t) \int\limits_c^\sigma \frac{s-c}{\sigma - c} \sin st \, ds \, dt,$$

$$\delta_\sigma^{\psi_2}(f, x) = \frac{2\psi_2(\sigma)}{\pi h} \int\limits_{|t| \geq h^{-1}} \varphi(x,t) \frac{\cos((2\sigma - h)t/2) \sin(ht/2)}{t^2} dt.$$

Тоді, враховуючи (25) і (27) – (29), для довільних $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}'$, $\sigma \geq h > 0$ і $x \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$\rho_{\sigma c}(f; x) = B_\sigma^{\psi_1}(a_1, f, x) + P_\sigma^{\psi_1}(a_1, f, x) + R_\sigma^{\psi_1}(a_1, f, x) +$$
$$+ \gamma_\sigma^{\psi_1}(f, x) + \delta_\sigma^{\psi_1}(f, x) + B_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x) + P_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x) +$$
$$+ R_\sigma^{\psi_2}(a_2, f, x) + \gamma_\sigma^{\psi_2}(f, x) + \delta_\sigma^{\psi_2}(f, x). \tag{30}$$

У роботі [4] при доведенні леми IX.12.1 у прийнятих у даній роботі позначеннях показано, що коли $f^{\overline{\psi}} \in S_\infty$, то

$$\begin{gathered} P_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \leq O(1)\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^\infty \frac{\psi_i(t+\sigma)}{t} dt\right), \\ R_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \leq O(1)\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{a_i(\sigma)}^\infty \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma + 1/t)}{t} dt\right), \\ \gamma_\sigma^{\psi_i}(f, x) \leq O(1)\psi_i(\sigma), \\ \delta_\sigma^{\psi_i}(f, x) \leq O(1)\psi_i(\sigma), \quad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{31}$$

а якщо $f^{\overline{\psi}} \in H_\omega$, то

$$\begin{gathered} P_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \leq O(1)\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^\infty \frac{\psi_i(t+\sigma)}{t} dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \\ R_\sigma^{\psi_i}(a_i, f, x) \leq O(1)\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{a_i(\sigma)}^\infty \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma + 1/t)}{t} dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \\ \gamma_\sigma^{\psi_i}(f, x) \leq O(1)\psi_i(\sigma)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \\ \delta_\sigma^{\psi_i}(f, x) \leq O(1)\psi_i(\sigma)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{32}$$

Співставляючи співвідношення (30) – (32), завершуємо доведення леми 1.

Доведення леми 2. Нехай

$$a(\sigma) = \min\left\{(\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma)^{-1}; \ (\eta(\psi_2, \sigma) - \sigma)^{-1}\right\}$$

і для конкретності $a(\sigma) = (\eta(\psi_1, \sigma) - \sigma)^{-1}$. Покладемо в лемі 1 $a_1(\sigma) = a_2(\sigma) = a(\sigma)$. Тоді умова (11) виконується, оскільки при $t \geq 1$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ і, як показано в [3] (співвідношення III.13.18),

$$\frac{t}{\eta(t) - t} \geq K > 0 \quad \forall \psi \in F.$$

Оскільки $\psi_1 \in F_0$, то при $t \geq 1$ функція $\psi_1(t) \in F$, тому, враховуючи теорему III.13.4 з [3], отримуємо

$$\int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_1(t+\sigma)}{t} dt = \int\limits_{\eta(\psi_1,\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_1(t)}{t-\sigma} dt \leq K\psi_1(\sigma) \leq O(1)\overline{\psi}(\sigma),$$

$$\int\limits_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_1(\sigma) - \psi_1(\sigma + 1/t)}{t} dt = \int\limits_{\sigma}^{\eta(\psi_1,\sigma)} \frac{\psi_1(\sigma) - \psi_1(t)}{t-\sigma} dt \leq K\psi_1(\sigma) \leq O(1)\overline{\psi}(\sigma). \tag{33}$$

Оцінимо тепер аналогічні інтеграли для функції ψ_2. Використовуючи ту саму теорему, маємо

$$\int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_2(t+\sigma)}{t} dt \leq \int\limits_{\eta(\psi_2,\sigma)-\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t+\sigma)}{t} dt \leq K\psi_2(\sigma) \leq O(1)\overline{\psi}(\sigma). \tag{34}$$

Застосовуючи знову теорему III.13.4 з [3] і враховуючи те, що при виконанні умови (3)

$$\int\limits_{\eta(\psi_1,\sigma)-\sigma}^{\eta(\psi_2,\sigma)-\sigma} \frac{\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma + 1/t)}{t} dt \leq \psi_2(\sigma) \int\limits_{\eta(\psi_1,\sigma)-\sigma}^{\eta(\psi_2,\sigma)-\sigma} \frac{dt}{t} \leq K\psi_2(\sigma),$$

отримуємо

$$\int\limits_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma + 1/t)}{t} dt = \int\limits_{(\eta(\psi_1,\sigma)-\sigma)^{-1}}^{(\eta(\psi_2,\sigma)-\sigma)^{-1}} \frac{\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma + 1/t)}{t} dt +$$

$$+ \int\limits_{\sigma}^{\eta(\psi_2,\sigma)} \frac{\psi_2(\sigma) - \psi_2(t)}{t-\sigma} dt \leq K_1\psi_2(\sigma) + K_2\psi_2(\sigma) \leq O(1)\overline{\psi}(\sigma). \tag{35}$$

Оскільки

$$-\nu_a \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\sin \sigma t}{t} dt +$$

$$+ \nu_a \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\cos \sigma t}{t} dt =$$

$$= -\nu_a \frac{\overline{\psi}(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt,$$

де γ_σ визначається рівністю (17), то, враховуючи лему 1 і співвідношення (33) – (35), завершуємо доведення леми 2.

***Доведення теореми* 2.** Те, що величини $\Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N}, \overline{\psi}, c)$, де $\mathfrak{N}$ — клас S_∞ або H_ω, не залежать від значення x, тобто

$$\Sigma_{\sigma,m}(\mathfrak{N}, \overline{\psi}, c) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left| \Sigma_{\sigma,m}(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) \right| = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)} \rho_\sigma\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}^{(i)}} \varphi, 0\right) \right|, \tag{36}$$

доводиться аналогічно доведенню відповідного факту для величин $\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^{\overline{\psi}} \mathfrak{N})$.

Нехай у сумі правої частини рівності (36) доданки впорядковано за зростанням величин $\alpha_\sigma^{(i)} = (\eta(\psi_1^{(i)}, \sigma) - \sigma)^{-1}$ (для конкретності), причому будемо вважати, що при $i = \overline{1, m_1}$ $\alpha_\sigma^{(i)} < 1$, а при $i = \overline{m_1 + 1, m}$ $\alpha_\sigma^{(i)} > 1$. Тоді

$$\Sigma_{\sigma,m}(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \Sigma_1(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) + \Sigma_2(\varphi, 0, \overline{\psi}, c), \tag{37}$$

де

$$\Sigma_1(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{c_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)} \rho_\sigma\left(\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi,\ 0\right), \tag{38}$$

$$\Sigma_2(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \sum_{i=m_1+1}^{m} \frac{c_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)} \rho_\sigma\left(\mathcal{J}^{\overline{\psi}^{(i)}}\varphi,\ 0\right). \tag{39}$$

Дослідимо спочатку величину $\Sigma_1(\varphi, 0, \overline{\psi}, c)$. Враховуючи лему 2, рівність (38) і виконуючи заміну змінних $t = -z$, отримуємо

$$\Sigma_1(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = -\sum_{i=1}^{m_1} \frac{c_i}{\pi} \int\limits_{\alpha_\sigma^{(i)} \le |t| \le 1} \Delta(t) \frac{\sin(\sigma t + \gamma_\sigma)}{t} dt + r_\sigma(\varphi), \tag{40}$$

де

$$\Delta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \varphi \in S_\infty; \\ \varphi(t) - \varphi(0), & \varphi \in H_\omega, \end{cases}$$

і

$$r_\sigma(\varphi) = \begin{cases} O(1), & \varphi \in S_\infty; \\ O(1)\,\omega\left(\dfrac{1}{\sigma}\right), & \varphi \in H_\omega, \end{cases}$$

$O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по σ.

Нехай

$$\upsilon_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{B_k}{A_k}, & A_k \ne 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & A_k = 0, \end{cases} \quad k = \overline{1, m_1},$$

і

$$\delta_k = \left\{t : \alpha_\sigma^{(k)} \le |t| \le \alpha_\sigma^{(k+1)}\right\}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1},$$

$$\delta_{m_1} = \left\{t : \alpha_\sigma^{(m_1)} \le |t| \le 1\right\}.$$

Тоді

$$\Sigma_1(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m_1} \int\limits_{\delta_k} \frac{\Delta(t)}{t} \sum_{i=1}^{k} c_i \sin(\sigma t + \gamma_\sigma^{(i)}) dt + r_\sigma(\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m_1} \int\limits_{\delta_k} \frac{\Delta(t)}{t} (A_k \sin\sigma t + B_k \cos\sigma t) dt + r_\sigma(\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m_1} R_k \int\limits_{\delta_k} \Delta(t) \frac{\sin(\sigma t + \upsilon_k)}{t} dt + r_\sigma(\varphi). \tag{41}$$

Розглянемо тепер величину $\Sigma_2(\varphi, 0, \overline{\psi}, c)$. Нехай

$$\theta_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{B_k - B_{m_1}}{A_k - A_{m_1}}, & A_k - A_{m_1} \neq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & A_k - A_{m_1} = 0, \end{cases} \quad k = \overline{m_1+1, m},$$

$$\delta_{m_1+1} = \left\{t : 1 \le |t| \le \alpha_\sigma^{(m_1+1)}\right\},$$

$$\delta_k = \left\{t : \alpha_\sigma^{(k-1)} \le |t| \le \alpha_\sigma^{(k)}\right\}, \quad k = \overline{m_1+2, m}.$$

Міркуючи, як і при встановленні рівності (41), отримуємо

$$\Sigma_2(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=m_1+1}^{m} Q_k \int_{\delta_k} \Delta(t)\frac{\sin(\sigma t + \theta_k)}{t}dt + r_\sigma(\varphi). \tag{42}$$

Нехай $x_j = (j+1/2)\pi/\sigma$, $t_j = j\pi/\sigma$ і $l_\sigma(t)$ — непарна функція, яка при $t \ge 0$ визначається рівністю

$$l_\sigma(t) = \begin{cases} t_1, & t \in [0, x_1]; \\ t_{j+1}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \ j \in N. \end{cases}$$

Нехай, далі, числа j_k, $k = \overline{1, m+1}$, визначаються такими умовами: $x_{j_k} \le \alpha_\sigma^{(k)} < x_{j_k+1}$, $k = \overline{1, m_1}$, $x_{j_{m_1+1}} \le 1 < x_{j_{m_1+1}+1}$ і $x_{j_k} \le \alpha_\sigma^{(k-1)} < x_{j_k+1}$, $k = \overline{m_1+2, m+1}$.

Якщо в (41) і (42) замість інтегралів по проміжках δ_k, $k = \overline{1, m}$, розглядати інтеграли по проміжках

$$\Delta_k^{\upsilon} = \left\{t : x_{j_k} \le \left|t + \frac{\upsilon_k}{\sigma}\right| \le x_{j_{k+1}}\right\}, \quad k = \overline{1, m_1},$$

і

$$\Delta_k^{\theta} = \left\{t : x_{j_k} \le \left|t + \frac{\theta_k}{\sigma}\right| \le x_{j_{k+1}}\right\}, \quad k = \overline{m_1+1, m},$$

відповідно та покласти

$$K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t) = \begin{cases} -R_k\dfrac{\sin(\sigma t + \upsilon_k)}{l_\sigma(t + \upsilon/\sigma)}, & t \in \Delta_k^{\upsilon}, \ k = \overline{1, m_1}; \\ Q_k\dfrac{\sin(\sigma t + \theta_k)}{l_\sigma(t + \theta/\sigma)}, & t \in \Delta_k^{\theta}, \ k = \overline{m_1+1, m}; \\ 0, & t \notin \left(\bigcup_{k=1}^{m_1}\Delta_k^{\upsilon}\right) \cup \left(\bigcup_{k=m_1+1}^{m}\Delta_k^{\theta}\right), \end{cases}$$

то з урахуванням того, що

$$\int_{-\alpha_\sigma^{(m)}}^{\alpha_\sigma^{(m)}} K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t)\,dt = 0,$$

для довільної $\varphi \in S_\infty$ отримаємо

$$\Sigma_{\sigma,m}(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_\sigma^{(m)}}^{\alpha_\sigma^{(m)}} \varphi(t) K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t)\,dt + O(1), \tag{43}$$

а якщо $\varphi \in H_\omega$, то

$$\Sigma_{\sigma,m}(\varphi, 0, \overline{\psi}, c) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\alpha_\sigma^{(m)}}^{\alpha_\sigma^{(m)}} \varphi(t) K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t) dt + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{44}$$

У прийнятих у даній роботі позначеннях у [11] доведено, що

$$\sup_{\varphi \in S_\infty} \left| \int\limits_{-\alpha_\sigma^{(m)}}^{\alpha_\sigma^{(m)}} \varphi(t) K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t) dt \right| = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{m_1-1} R_k \ln \frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} - R_{m_1} \ln \alpha_\sigma^{(m_1)} + \right.$$

$$\left. + Q_{m_1+1} \ln \alpha_\sigma^{(m_1+1)} + \sum_{k=m_1+1}^{m-1} Q_{k+1} \ln \frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} \right) + O(1),$$

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \int\limits_{-\alpha_\sigma^{(m)}}^{\alpha_\sigma^{(m)}} \varphi(t) K_{\sigma,m}^{\upsilon,\theta}(t) dt \right| = \frac{2}{\pi} e_\sigma(\omega) \left(\sum_{k=1}^{m_1-1} R_k \ln \frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} - R_{m_1} \ln \alpha_\sigma^{(m_1)} + \right. \tag{45}$$

$$\left. + Q_{m_1+1} \ln \alpha_\sigma^{(m_1+1)} + \sum_{k=m_1+1}^{m-1} Q_{k+1} \ln \frac{\alpha_\sigma^{(k+1)}}{\alpha_\sigma^{(k)}} \right) + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Об'єднуючи (36) – (45), завершуємо доведення теореми 2.

Автор висловлює подяку О. І. Степанцю за поставлену задачу і корисні обговорення одержаних результатів.

1. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1988. – **303**, № 1. – С. 50 – 53.
2. *Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1549 – 1561.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
5. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.
6. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
7. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
8. *Степанец А. И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
9. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 537 с.
10. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
11. *Степанец А. И., Дрозд В. В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. – Киев, 1989. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.17).
12. *Дрозд В. В.* Совместное приближение функций и их производных операторами Фурье // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 55 – 67.

Одержано 23.04.2003