УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

МОМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

We present a method of the derivation of second order moment equations for solutions of a system of nonlinear equations. This method depends on a finite-valued semi-Markov or Markov process. For systems of linear differential equations with random coefficients, we consider the case where an inhomogeneous part contains the white noise.

Наведено метод виведення моментних рівнянь другого порядку для розв'язків системи нелінійних рівнянь, що залежить від кінцевозначного напівмарковського або марковського процесу. Для систем лінійних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами розглянуто випадок, коли неоднорідна частина містить білий шум.

В настоящей статье излагается метод вывода моментных уравнений для решений системы нелинейных уравнений, правая часть которых зависит от полумарковского процесса [1 – 3].

1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X, \xi(t)), \qquad X(t) \in E_m, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — полумарковский случайный процесс, принимающий конечное число состояний $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Предположим, что частные системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = F_k(X_k(t)), \quad k = 1, \ldots, n, \qquad F_k(X) = F(X, \theta_k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

имеют решения, продолжимые при $t \geq 0$ на всю числовую ось. Пусть $X_k(t) = R_k(t, X(\tau))$, $k = 1, \ldots, n$, $R_k(\tau, X(\tau)) \equiv X(\tau)$ — решение системы (2) в форме Коши.

Пусть $\xi(t)$ — полумарковский процесс, определяемый интенсивностями $q_{sk}(t)$, $s, k = 1, 2, \ldots, n$, которые удовлетворяют условиям

$$q_{sk}(t) \geq 0, \quad t \geq 0, \qquad \int\limits_0^\infty \sum_{s=1}^n q_{sk}(t)\,dt = 1, \quad k, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Вероятность перехода скачком процесса $\xi(t)$ из положения θ_k в положение θ_s за время $[t, t + dt)$ равна $q_{sk}(t)\,dt$.

Введем функции

$$\psi_k(t) = \int\limits_t^\infty q_k(\tau)\,d\tau, \qquad q_k(\tau) = \sum_{s=1}^n q_{sk}(t).$$

Если процесс $\xi(t)$ в момент $t = 0$ скачком попал в положение θ_k, то $\psi_k(t)$ — вероятность того, что процесс $\xi(t)$ остается в положении θ_k в течение времени $[0, t)$.

2. Пусть $t = 0$ — момент скачка $\xi(t)$. Введем условные математические ожидания случайных решений

$$M_k(t, X) = \langle X_k(t) \mid X_k(0) = X, \ \xi(0) = \theta_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, n.$$

© К. Г. ВАЛЕЕВ, И. А. ДЖАЛЛАДОВА, 2004

Процесс $\xi(t)$ будем считать непрерывным справа в точках скачков. С вероятностью $\psi_k(t)$ процесс остается в состоянии θ_k и с плотностями вероятностей $q_{sk}(t)$ переходит из состояния θ_k в состояние θ_s. Отыскание математического ожидания решения системы (2) при $t \geq 0$ сведено к решению интегральных уравнений типа уравнений марковского восстановления

$$M_k(t, X) = \psi_k(t) R_k(t, X) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) M_s(t-\tau, R_k(\tau, X)) d\tau, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Если дискретно-непрерывный случайный процесс $(\xi(t), X(t))$ имеет плотность распределения

$$f(t, X, \xi) = \sum_{k=1}^n f_k(t, X)\, \delta(\xi - \theta_k),$$

то математическое ожидание случайного решения системы (1) можно найти по формуле

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{E_m} M_k(t, X)\, f_k(0, X)\, dX. \tag{4}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\xi(t)$ — *полумарковский случайный процесс, определяемый интенсивностями перехода* $q_{sk}(t)$ *из состояния* θ_k *в состояние* θ_s. *Тогда математическое ожидание* $\langle X(t) \rangle$ *случайного решения* $X(t)$ *можно найти по формуле* (4), *где вектор-функции* $M_k(t, X)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *определены системой уравнений* (3).

Если случайное решение $X(t)$ имеет фиксированное начальное значение X_0, то математическое ожидание случайного решения находится по формуле

$$\langle X(t), X_0 \rangle = \sum_{k=1}^n M_k(t, X, X_0).$$

Рассмотрим матрицы вторых моментов

$$D_k(t, X) = \left\langle X_k(t) X_k^*(t) \,|\, X_k(0) = X,\ \xi(0) = \theta_k \right\rangle, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Случайный процесс $\xi(t)$ остается в положении θ_k в течение времени $[0, t)$ с вероятностью $\psi_k(t)$ и с плотностью вероятностей $q_{sk}(t)$ переходит из состояния θ_k в состояние θ_s. При этом получаем систему уравнений

$$D_k(t, X) = \psi_k(t) R_k(t, X) R_k^*(t, X) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) D_s(t-\tau, R_k(\tau, X)) d\tau, \tag{5}$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Если система уравнений (1) линейна и имеет вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t)) X(t), \qquad A_k \equiv A(\theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то систему уравнений (3) можно записать в виде

$$M_k(t) X = \psi_k(t)\, e^{A_k t} X + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) M_s(t-\tau) e^{A_k \tau} X\, d\tau, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Система уравнений (5) для матриц вторых моментов примет вид

$$D_k(t, X) = \psi_k(t)\, e^{A_k t} XX^* e^{A_k^* t} +$$

$$+ \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau) e^{A_k(t-\tau)} e^{A_k\tau} X\, D_s(t-\tau, XX^*) e^{A_k^*\tau} e^{A_k^*(t-\tau)} d\tau, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

3. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$dX(t) = A(\xi(t))\, X(t)\, dt + B(\xi(t))\, dW(t), \qquad A_k \equiv A(\theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $W(t)$ — вектор случайных процессов типа белого шума с ковариационной матрицей R, т. е.

$$\langle W(t)\, W^*(\tau) \rangle = R\delta(t-\tau),$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Полагая

$$A(\theta_k) = A_k, \quad B(\theta_k) = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем в частном случае систему уравнений

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = A_k X_k(t) + B_k W(t)$$

и ее решение

$$X_k(t) = e^{A_k t} X_k(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k W(\tau) d\tau.$$

Для матрицы вторых моментов находим выражение

$$\langle X_k(t)\, X_k^*(t) \rangle = e^{A_k t} \langle X_k(0) X_k^*(0) \rangle e^{A_k^* t} +$$

$$+ \int_0^t e^{A_k \tau} B_k R B_k^* e^{A_k^* \tau} d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из системы интегральных уравнений (6) можно получить систему интегральных уравнений для матрицы вторых моментов, которую мы не приводим из-за ее громоздкости. В целом рассматриваемая задача в случае системы линейных дифференциальных уравнений является достаточно рутинной для специалиста по теории вероятностей.

4. Пусть $\xi(t)$ — марковский случайный процесс с вероятностями

$$p_k(t) = \mathrm{P}(\xi(t) = \theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ks} p_s(t), \qquad a_{kk} < 0, \quad a_{ks} > 0, \quad k \neq s,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ks} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

и справедливы формулы [4]

$$\psi_k(t) = e^{a_{kk} t}, \qquad q_{sk}(t) = a_{ks} e^{a_{kk} t} \;\; (s \neq k), \qquad q_{kk}(t) \equiv 0.$$

Тогда матрицы вторых моментов определяются системой уравнений

$$D_k(t, X(0)) = e^{a_{kk}(t)}\left(e^{A_k t}\,\langle X_k(0)X_k^*(0)\rangle e^{A_k^* t} + \int\limits_0^t e^{A_k\tau}B_k R B_k^* e^{A_k^*\tau}d\tau\right) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^n a_{sk}e^{a_{kk}(t)}\left(e^{A_s(t-\tau)}\left(e^{A_k\tau}\,\langle X_k(0)X_k^*(0)\rangle e^{A_k^*\tau} + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\tau e^{A_k\varphi}B_k R B_k^* e^{A_k^*\varphi}d\varphi\right)e^{A_s^*(t-\tau)} +$$

$$\left. + \int\limits_\tau^t e^{A_s(t-\varphi)}B_s R B_s^* e^{A_s^*(t-\varphi)}d\varphi\right)d\tau.$$

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 192 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов Н. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Коваленко Н. Н., Гнеденко Б. В.* Теория вероятностей. – Киев: Выща шк., 1990. – 328 с.
4. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.
5. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев, 1985. – 56 с.

Получено 21.05.2002,
после доработки — 12.02.2004