УДК 517.968

О. В. Гунько (Харьков. воен. ун-т)

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

By using methods of the theory of boundary-value problems of analytic functions for the equation $u^2(t) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{\tau - t}d\tau\right)^2 = A^2(t)$, we prove the theorem on the existence of solutions. We obtain the general form of the solution by using zeros of an entire function of exponential type $A^2(z)$.

Методами теорії крайових задач аналітичних функцій для рівняння $u^2(t) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{\tau - t}d\tau\right)^2 = A^2(t)$ доведено теорему існування розв'язків та одержано загальний вигляд розв'язку за допомогою нулів цілої функції експоненціального типу $A^2(z)$.

1. Введение. Рассмотрим определенную на всей вещественной оси $\boldsymbol{R}$ вещественную функцию $u(t)$ с интегрируемым квадратом $(u \in L_2)$ и ее преобразование Фурье $S(\omega)$. Из вещественности $u(t)$ следует

$$S(-\omega) = S^*(\omega) \quad \text{для любых} \quad \omega \in \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

В радиофизике функции $u(t)$ называют сигналами, $S(\omega)$ — спектрами; широко используются сигналы с финитным спектром [1], т. е. сигналы, несущие интервалы спектров которых состоят из двух расположенных симметрично относительно нуля конечных интервалов:

$$\operatorname{supp} = (-\omega_0 - \Delta,\ -\omega_0 + \Delta) \cup (\omega_0 - \Delta,\ \omega_0 + \Delta), \qquad 0 < \Delta < \omega_0 < \infty. \tag{2}$$

Обозначим через $\boldsymbol{V}$ пространство всех спектров $S(\omega) \in L_2$, имеющих свойства (1), (2). Пусть $\boldsymbol{U}$ — пространство Фурье-прообразов $u(t)$ для $S \in \boldsymbol{V}$. Тогда $\boldsymbol{U}$ представляет собой пространство всех сигналов с финитным спектром из L_2 (т. е. с конечной энергией), имеющих свойства (1), (2). Учитывая эти свойства, каждую функцию $u(t) \in \boldsymbol{U}$ можно представить в виде

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2}[a(t) + a^*(t)] = A(t)\cos(\omega_0 t + \Phi(t)),$$

где

$$a(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega)e^{i(\omega_0 + \omega)t}d\omega = I(t)e^{i\omega_0 t} = A(t)e^{i(\omega_0 t + \Phi(t))},$$

$$I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

$$A(t) = |I(t)| = |a(t)|, \qquad \Phi(t) = \arg I(t) = \arg a(t) - \omega_0 t.$$

Поскольку функции $u(t)$ и $I(t)$ имеют финитные спектры, согласно теореме Винера – Пэли [2, с. 87] они аналитически продолжаются до целых функций экспоненциального типа (ЦФЭТ) $u(z)$, $I(z)$, а значит, и $A^2(t)$ продолжается до ЦФЭТ:

$$A^2(z) = I(z)I^*(z^*). \tag{3}$$

Кроме преобразования Фурье для интегрального представления сигналов можно использовать преобразование Гильберта. А именно, согласно теореме М. Рисса [2, с. 95] для любой функции $u(t) \in L_2$ определено преобразование Гильберта

$$\nu(t) = H[u(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и функция $\nu(t) \in \in L_2$. Спектры S_u, S_ν функций $u(t), \nu(t)$ связаны равенством [2, с. 96; 3, с. 15]

$$S_\nu(\omega) = S_u(\omega)\frac{\operatorname{sign}\omega}{i}.$$

Используя это равенство, получаем

$$u(t) + i\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega) e^{i(\omega_0+\omega)t} d\omega = a(t).$$

Но тогда

$$A^2(t) = |a(t)|^2 = u^2(t) + \nu^2(t) = u^2(t) + H^2[u(t)],$$

или

$$u^2(t) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau\right)^2 = A^2(t). \tag{4}$$

Решая это уравнение относительно $u(t)$ для фиксированной амплитуды $A(t)$, получаем функцию $u(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \Phi(t))$, т. е. восстанавливаем фазу $\Phi(t)$ сигнала $u(t)$ по его амплитуде $A(t)$. Разработка методов восстановления фазы сигнала по его амплитуде составляет так называемую фазовую проблему в теории колебаний и волн. Восстановление фазы по амплитуде с помощью решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения (4) — один из таких методов.

Указанное уравнение рассматривалось в работе [4], где описана идея его решения с помощью сведения к краевой задаче Римана и использования стандартных средств решения этой краевой задачи аналитических функций. Однако в работе [4] удалось получить решение только в узком подпространстве пространства $\boldsymbol{U}$, а именно, для сигналов $u(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера на $\boldsymbol{R}$ и имеющих конечное число нулей на $\boldsymbol{R}$. В данной работе применен иной метод сведения уравнения (4) к задаче Римана, использующий интегральные соотношения для граничных функций (аналогичные формулам Сохоцкого), не требующие выполнения условий Гельдера. Кроме того, задача Римана решается не стандартным методом решения краевых задач аналитических функций [5], а с помощью разложения в бесконечное произведение ЦФЭТ $A^2(z)$. Это дало возможность получить все решения уравнения (4) в достаточно широком для приложений пространстве $\boldsymbol{U}$.

По радиофизическим вопросам фазовой проблемы имеется обширная литература (см., например, обзоры [6, 7] и работы [8, 9]). Из математических работ автору известны лишь статьи [10], в которых изучается связь между амплитудным и фазовым спектрами сигнала на основе исследования взаимозависимостей между граничными свойствами голоморфных функций, определенных в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, и распределением их нулей. К рассматриваемому в данной работе методу решения уравнения (4) примыкает работа [11], в которой изучается нелинейное функциональное уравнение $u^2(z) + \nu^2(z) = f(z)$ относительно пар целых функций u, ν, где $f(z)$ — заданная целая функция.

2. Постановка задачи. Необходимо доказать существование решений и найти общий вид решений нелинейного сингулярного интегрального уравнения с квадратичной нелинейностью (4) относительно неизвестной функции $u(t)$, определенной на всей вещественной оси $\boldsymbol{R}$ при заданной на $\boldsymbol{R}$ функции $A(t)$. Соотношение (4) определяет однозначное отображение $u(t) \mapsto A(t)$. Образ $\boldsymbol{A}$ этого отображения назовем множеством допустимых амплитуд $A(t)$. Будем предполагать, что правая часть уравнения (4) содержит квадрат допустимой амплитуды $A^2(t)$. Имея в виду приложения в теории колебаний, будем искать решения уравнения (4) в пространстве $\boldsymbol{U}$.

Заметим, что если $u \in \boldsymbol{U}$, то $-u \in \boldsymbol{U}$, и обе эти функции имеют одинаковую амплитуду $A(t)$. Из этого следует, что если $u(t) \not\equiv 0$, то $A(t) \not\equiv u(t)$.

3. Свойства функции $A^2(z)$. Для решения уравнения (4) потребуются приводимые ниже свойства функции $A^2(z)$.

3.1. ЦФЭТ $A^2(z)$ можно представить в виде абсолютно сходящегося бесконечного произведения вида [12, с. 31]

$$A^2(z) = e^{az+b} z^l \prod\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\gamma \frac{z}{a_k}}, \tag{5}$$

где a_k — нули ЦФЭТ $A^2(z)$, a и b — комплексные константы, l — целое неотрицательное число; целое число $\gamma = 0$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-1}$ сходится, и $\gamma = 1$, если этот ряд расходится. Действительно, по определению (см. [12, с. 27]) число γ — это наибольшее целое число, при котором ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-\gamma}$ расходится. Ясно, что $\gamma \geq 0$, и если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-1}$ сходится, то $\gamma = 0$. Если же ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-1}$ расходится, то $\gamma \geq 1$. Поскольку $\gamma \leq \tau$, где τ — показатель сходимости чисел $\{a_k\}$ [12, с. 16], согласно теореме Адамара [12, с. 17] имеем $\gamma \leq \tau \leq \rho = 1$ (ρ — порядок целой функции), поэтому $\gamma = 1$.

3.2. Из представления (3) следует, что все нули функции $A^2(z)$ комплексно сопряжены, т. е. если z_k — нуль функции $A^2(z)$ кратности q_k, то z_k^* — также нуль функции $A^2(z)$ кратности q_k.

3.3. Нетрудно проверить, что все вещественные нули функции $A^2(z) = I(z) I^*(z^*)$ имеют четные кратности, поэтому в формуле (5) l — четное число.

3.4. Путем перестановки сомножителей в абсолютно сходящемся бесконечном произведении (5) функцию $A^2(z)$ можно представить в виде произведения двух ЦФЭТ $A^+(z)$ и $A^-(z)$, не имеющих нулей соответственно в верхней C^+ и нижней C^- комплексной полуплоскости:

$$A^2(z) = A^+(z) A^-(z), \tag{6}$$

где

$$A^+(z) = e^{\frac{1}{2}(az+b)} z^{\frac{l}{2}} \prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{z}{x_n}\right) e^{\gamma_N \frac{z}{x_n}} \prod_{m=1}^{M}\left(1 - \frac{z}{z_m^*}\right) e^{\gamma_M \frac{z}{z_m^*}}, \tag{7}$$

$$A^{-}(z) = e^{\frac{1}{2}(az+b)} z^{\frac{l}{2}} \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z}{x_n}\right) e^{\gamma_N \frac{z}{x_n}} \prod_{m=1}^{M}\left(1-\frac{z}{z_m}\right) e^{\gamma_M \frac{z}{z_m}}, \tag{8}$$

x_n — вещественные нули функции $A^2(t)$, причем если $2q_n$ — кратность нуля x_n, то в произведении по n число сомножителей с x_n равно q_n для каждого n; z_m — комплексные нули $A^2(z)$, лежащие в C^+; натуральные числа N, M могут принимать конечные или бесконечные значения, числа γ_N, γ_M принимают значения 0 или 1.

4. Доказательство существования решений. Учитывая, что неизвестная функция в уравнении (4) принадлежит пространству L_2, введем новую неизвестную функцию $\Psi(z)$ комплексной переменной z, связанную с $u(t)$ посредством интеграла типа Коши (см. [2], гл. 12, пп. 3 и 4):

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \tilde{u}(t, y) + i\tilde{\nu}(t, y), \tag{9}$$

где $z = t + iy$ (t, y — вещественные числа),

$$\tilde{u}(t, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)\,y\,d\xi}{(t-\xi)^2 + y^2}, \qquad \tilde{\nu}(t, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)(t-\xi)\,d\xi}{(t-\xi)^2 + y^2},$$

$$\tilde{u}(t, y) \to u(t), \qquad \tilde{\nu}(t, y) \to \nu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{t-\xi}d\xi \quad \text{при} \quad y \to 0;$$

последний интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Следовательно, для голоморфной в C^+ функции $\Psi(z)$ верхняя граничная функция

$$\Psi^+(t) = u(t) + i\nu(t). \tag{10}$$

Здесь

$$\Psi^+(t) = \lim_{y \downarrow 0}\Psi(z).$$

Теперь заметим, что в силу вещественности $u(t)$ между значениями $\Psi(z)$ и $\Psi(z^*)$ существует простая связь, вытекающая из определения (9). Действительно,

$$\Psi(z^*) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)\,d\xi}{\xi - z^*} = \left[-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{\xi - z}d\xi\right]^* = -[\Psi(z)]^* = -u(t, y) + i\nu(t, y).$$

Если $z \in C^+$, то $z^* \in C^-$, и при $z \to \boldsymbol{R}$ сверху $z^* \to \boldsymbol{R}$ снизу, поэтому

$$\Psi^-(t) = \lim_{y \uparrow 0}\Psi(z) = \lim_{y \downarrow 0}\Psi(z^*) = -u(t) + i\nu(t). \tag{11}$$

Из уравнений (10), (11) получаем выражения

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[\Psi^+(t) - \Psi^-(t)\right], \qquad \nu(t) = \frac{1}{2i}\left[\Psi^+(t) + \Psi^-(t)\right], \tag{12}$$

подстановка которых в (4) дает граничное условие

$$-\Psi^+(t)\Psi^-(t) = A^2(t) \tag{13}$$

для неизвестной функции $\Psi(z)$.

Итак, требуется найти решение $\Psi(z)$ заданной на вещественной оси однородной краевой задачи Римана, удовлетворяющее следующим условиям: 1) предельные функции $\Psi^{\pm}(t)$ удовлетворяют граничному условию (13); 2) их разность вещественна (согласно первому из равенств (12)); 3) если $z \to \infty$ в C^{+} или в C^{-}, то $\Psi(z) \to 0$ (согласно (9)).

Существование решения этой задачи легко доказать с помощью представления (6) функции $A^2(z)$, в котором $A^{\pm}(z)$ — ЦФЭТ, не имеющие нулей соответственно в $C^{\pm}$. Действительно, используя (6), записываем граничное условие в виде

$$-\Psi^{+}(t)\Psi^{-}(t) = A^{+}(t)A^{-}(t),$$

из которого следует, что в качестве частного решения рассматриваемой краевой задачи можно использовать функцию

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} A^{+}(z)e^{i\omega_0 z}, & z \in C^{+}; \\ -A^{-}(z)e^{-i\omega_0 z}, & z \in C^{-}, \end{cases}$$

где ω_0 — произвольное вещественное число. Для нее предельными являются функции

$$\Psi_0^{+}(t) = A^{+}(t)e^{i\omega_0 t}, \qquad \Psi_0^{-}(t) = -A^{-}(t)e^{-i\omega_0 t}.$$

Подставляя эти выражения в первое из равенств (12), получаем частное решение уравнения (4):

$$u_0(t) = \frac{1}{2}\left[A^{+}(t)e^{i\omega_0 t} + A^{-}(t)e^{-i\omega_0 t}\right].$$

Из определения функций $A^{\pm}(t)$ (см. п. 3.4) следует, что

$$A^{\pm}(t) = A(t)e^{\pm i\Phi_0(t)}, \tag{14}$$

поэтому

$$u_0(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \Phi_0(t)).$$

5. Построение общего решения. Доказательство существования решения уравнения (4) было получено с помощью нулей ЦФЭТ $A^2(z)$. Эти нули можно использовать и для построения общего решения. С этой целью введем новую неизвестную функцию $\Psi_1(z)$ посредством равенств

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi_1(z)A^{+}(z), & z \in C^{+}; \\ -\dfrac{A^{-}(z)}{\Psi_1(z)}, & z \in C^{-}, \end{cases} \tag{15}$$

из которых следует, что функция $\Psi_1(z)$ имеет в C^{+} только изолированные нули, совпадающие с нулями голоморфной функции $\Psi(z)$, а в C^{-} только изолированные полюсы, совпадающие с нулями $\Psi(z)$. В силу (15) для граничных функций имеем соотношения

$$\Psi^{+}(t) = \Psi_1^{+}(t)A^{+}(t), \qquad \Psi^{-}(t) = -\frac{A^{-}(t)}{\Psi_1^{-}(t)}. \tag{16}$$

Подставляя (6) и (16) в равенство (13), приходим к краевому *условию для* функции $\Psi_1(z)$

$$\Psi_1^+(t) = \Psi_1^-(t),$$

которое представляет собой условие аналитического продолжения функции $\Psi_1(z)$. Следовательно, в качестве искомого решения $\Psi_1(z)$ можно взять любую определенную на всей комплексной плоскости C мероморфную функцию

$$f(z) = \Psi_1(z), \tag{17}$$

имеющую в C^+ только изолированные нули, а в C^- только изолированные полюсы. Выразив через $f(t)$ граничные функции $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ с помощью формул (16) и подставив полученные выражения в первое из равенств (12), найдем общее решение уравнения (4)

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)A^+(t) + \frac{A^-(t)}{f(t)}\right] \tag{18}$$

при условии, что комплексные функции $f(z)$ обеспечивают вещественность правой части равенства (18).

Чтобы использовать это условие, представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = |f(t)|\, e^{i\alpha(t)}$$

и с учетом этого представления, а также (14) преобразуем выражение (18) следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[|f(t)|e^{i\alpha(t)}A(t)e^{i\Phi_0(t)} + \frac{A(t)e^{-i\Phi_0(t)}}{|f(t)|e^{i\alpha(t)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}A(t)\left\{\left[|f(t)| + \frac{1}{|f(t)|}\right]\cos[\alpha(t)+\Phi_0(t)] + i\left[|f(t)| - \frac{1}{|f(t)|}\right]\sin[\alpha(t)+\Phi_0(t)]\right\}. \tag{19}$$

Поскольку нас интересуют только вещественные решения, должно выполняться хотя бы одно из равенств

$$|f(t)| - \frac{1}{|f(t)|} = 0, \qquad \sin[\alpha(t) + \Phi_0(t)] = 0. \tag{20}$$

При выполнении второго из них выражение (19) принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{2}A(t)\left[|f(t)| + \frac{1}{|f(t)|}\right],$$

откуда получаем

$$u^2(t) = A^2(t)\frac{1}{4}\left[|f(t)|^2 + 2 + \frac{1}{|f(t)|^2}\right] \geq A^2(t).$$

С другой стороны, $u^2(t) \leq A^2(t)$, так как $u(t) = A(t)\cos[\omega_0(t)+\Phi(t)]$, поэтому $u^2(t) = A^2(t)$, $u^2(z) = A^2(z)$, $\pm u(z) = A(z)$, что невозможно. Следовательно, в пространстве $\boldsymbol{U}$ не существует решения уравнения (4), соответствующего второму из условий (20).

Перейдем к изучению множества решений $u(t)$, соответствующих первому из условий (20):

$$|f(t)|^2 \equiv f(t)f^*(t) \equiv 1, \tag{21}$$

из которого в силу теоремы единственности аналитического продолжения следует

$$f(z)\, f^*(z^*) \equiv 1. \tag{22}$$

Согласно (21) функция $f(z)$ не может иметь ни нулей, ни полюсов, лежащих на вещественной оси. Кроме того, из равенства (17) следует, что функция $f(z)$ может иметь только изолированные нули и только в C^+, а также только изолированные полюсы и только в C^-. Но тогда функция $f(z)$ — мероморфна и, значит, представима в виде отношения двух целых функций:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{23}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют совместных нулей.

Пусть z_0 — комплексный нуль функции $P(z)$ и z_0^* не является нулем функции $Q(z)$. Тогда z_0 не является нулем функции $Q^*(z^*)$, и поэтому функция

$$f(z)\, f^*(z^*) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{P^*(z^*)}{Q^*(z^*)}$$

равна нулю в точке z_0, что противоречит тождеству (22). Поэтому если $\{z_k\}$ — множество комплексных нулей функции $P(z)$, то $\{z_k^*\}$ — множество комплексных нулей функции $Q(z)$. Аналогично, если $\{\zeta_k\}$ — множество всех комплексных нулей функции $Q(z)$, то $\{\zeta_k^*\}$ — множество комплексных нулей функции $P(z)$. Следовательно, если $\{z_k\}$ — множество всех комплексных нулей функции $P(z)$, то $\{z_k^*\}$ — множество всех комплексных нулей функции $Q(z)$, причем $\{z_k\} \subset C^+$, $\{z_k^*\} \subset C^-$.

Теперь заметим, что все функции, входящие в уравнение (18), могут быть аналитически продолжены на всю комплексную плоскость C, поэтому для продолженных функций имеет место равенство

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) A^+(z) + \frac{A^-(z)}{f(z)} \right]. \tag{24}$$

Подставляя в это уравнение выражение (23), а также вытекающее из (22) представление

$$\frac{1}{f(z)} = f^*(z^*) = \frac{P^*(z^*)}{Q^*(z^*)},$$

получаем

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} A^+(z) + \frac{P^*(z^*)}{Q^*(z^*)} A^-(z) \right]. \tag{25}$$

Поскольку (см. (7), (8))

$$A^-(z) = \left(A^+(z^*)\right)^*, \tag{26}$$

выражение (25) можно представить в виде

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[a_1(z) + a_1^*(z^*) \right], \tag{27}$$

где

$$a_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} A^+(z).$$

Рассмотрим некоторый нуль z_0 функции $Q(z)$. Он не может быть нулем функции $Q^*(z^*)$, так как нули $Q(z)$ находятся в C^-, а нули $Q^*(z^*)$ — в C^+, поэтому в точке z_0 второе слагаемое в формуле (27) не может обратиться в бесконечность. Следовательно, если z_0 не совпадает ни с одним из нулей функции $A^+(z)$, то правая часть равенства (27) в точке $z = z_0$ обращается в бесконечность. Это противоречит условию ограниченности целой функции $u(z)$. Поэтому точка z_0 должна совпадать с одним из нулей $A^+(z)$. Таким образом, множество всех нулей функции $Q(z)\,[P(z)]$ является некоторым подмножеством множества всех комплексных нулей функции $A^+(z)\,[A^-(z)]$.

Пусть $\{z_{k1}, z_{k2}, \ldots\}$ — множество всех нулей функции $Q(z)$. Поскольку эти нули являются нулями ЦФЭТ $A^+(z)$, показатель сходимости последовательности чисел $z_{k1}, z_{k2}, \ldots$ меньше или равен 1 $(\tau \le 1)$. Это позволяет построить абсолютно сходящееся бесконечное произведение вида

$$r(z) = \prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_{ks}}\right)e^{\gamma_r \frac{z}{z_{ks}}}, \tag{28}$$

если число нулей у функции $Q(z)$ бесконечно; при этом $\gamma_r = 0$ или 1. Если $Q(z)$ имеет конечное число нулей, то $r(z)$ имеет конечное число сомножителей; при этом $\gamma_r = 0$. Используя $r(z)$, функции $Q(z)$, $P(z)$ можно представить в виде

$$Q(z) = Q_1(z)\,r(z), \qquad P(z) = P_1(z)\,r^*(z^*),$$

где $Q_1(z)$, $P_1(z)$ — целые функции, не имеющие нулей, поэтому функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = f_1(z)\frac{r^*(z^*)}{r(z)}, \tag{29}$$

где $f_1(z) = \dfrac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ — целая функция, не имеющая ни нулей, ни полюсов.

Покажем, что

$$f_1(z) = e^{i(a_1 z + b_1)},$$

где a_1, b_1 — вещественные числа. Для этого подставим в равенство (24) выражение (29) и учтем соотношения (26) и (6):

$$u(z) = \frac{1}{2}\left\{f_1(z)r^*(z^*)\frac{A^+(z)}{r(z)} + \frac{r(z)}{f_1(z)}\left[\frac{A^+(z^*)}{r(z^*)}\right]^*\right\} = \frac{1}{2}\left[f_1(z)g(z) + \frac{g^*(z^*)}{f_1(z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_1(z)g(z) + \frac{g(z)g^*(z^*)}{f_1(z)g(z)}\right] = \frac{1}{2}\left[f_1(z)g(z) + \frac{A^2(z)}{f_1(z)g(z)}\right]. \tag{30}$$

Здесь

$$g(z) = r^*(z^*)\frac{A^+(z)}{r(z)}$$

— ЦФЭТ,

$$g(z)g^*(z^*) = r^*(z^*)\frac{A^+(z)}{r(z)}r(z)\left[\frac{A^+(z^*)}{r(z^*)}\right]^* = A^+(z)A^-(z) = A^2(z).$$

Предположим, что порядок целой функции $f_1(z)g(z)$ больше единицы. Тогда существует последовательность возрастающих по модулю до бесконечности чисел $z_1, z_2, \ldots$, на которой

$$|f_1(z_s)g(z_s)| > c\exp|z_s|^{1+\varepsilon}$$

для некоторых положительных чисел c и ε. Поскольку $A^2(z)$ — ЦФЭТ, на указанной последовательности $A^2(z)$ не может расти быстрее, чем $\exp(\sigma|z_s|)$, где σ — некоторое положительное число, поэтому последовательность чисел $A^2(z)/ /(f_1(z_s)g(z_s))$ стремится к нулю при $s \to \infty$. Из этого следует, что правая часть равенства (30) на последовательности $z_1, z_2, \ldots$ растет, как $\exp|z_s|^{1+\varepsilon}$. В силу того что $u(z)$ — ЦФЭТ, получаем противоречие, из которого следует, что целая функция

$$f_1(z)g(z) = f_2(z) \tag{31}$$

является ЦФЭТ.

Разложим теперь в бесконечные произведения все функции, входящие в равенство (31). После выделения из разложения функции $f_2(z)$ тех сомножителей, которые соответствуют ЦФЭТ $g(z)$, получим в левой части ЦФЭТ $\tilde{f}_2(z)$, равную функции $f_1(z)$. Следовательно, $f_1(z)$ — ЦФЭТ. Она не имеет нулей, поэтому согласно теореме Адамара о факторизации [12, с. 31] находим

$$f_1(z) = \exp(\tilde{a}z + \tilde{b}),$$

где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — произвольные комплексные числа. Для доказательства мнимости этих чисел воспользуемся тождеством (см. (22) и (29))

$$1 \equiv f(z)f^*(z^*) = f_1(z)\frac{r^*(z^*)}{r(z)}f_1^*(z^*)\frac{r(z)}{r^*(z^*)} = f_1(z)f_1^*(z^*),$$

из которого следует

$$e^{\tilde{a}z+\tilde{b}}e^{\tilde{a}^*z^*+\tilde{b}^*} \equiv 1.$$

Это тождество по z выполняется только при мнимых $\tilde{a}$, $\tilde{b}$.

Итак, имеем

$$f(z) = f_1(z)\frac{r^*(z^*)}{r(z)} = e^{i(a_2z+b_2)}\frac{r^*(z^*)}{r(z)}, \tag{32}$$

где a_2, b_2 — произвольные вещественные числа. Используя (32), записываем для вещественных $z = t$ равенство (30) в виде

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{i(a_2t+b_2)}A^+(t)\frac{r^*(t)}{r(t)} + e^{-i(a_2t+b_2)}A^-(t)\frac{r(t)}{r^*(t)}\right] =$$

$$= A(t)\cos[a_2t + b_2 + \Phi_0(t) + \Phi_1(t)] = A(t)\cos[a_2t + \Phi(t)],$$

где

$$\Phi(t) = b_2 + \Phi_0(t) + \Phi_1(t),$$

$$\Phi_0(t) = \arg A^+(t), \qquad \Phi_1(t) = \arg\frac{r^*(t)}{r(t)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если $A(t)$ — допустимая амплитуда, то множество всех решений уравнения* (4) *в пространстве всех вещественных функций с финитным спектром описывается формулой*

$$u(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Phi_0(t) + \Phi_I(t)),$$

где ω_0, φ_0 — *произвольные вещественные числа,*

$$\Phi_0(t) = \arg A^+(t), \qquad \Phi_I(t) = \arg\frac{r^*(t)}{r(t)};$$

целые функции экспоненциального типа $A^+(z)$, $r(z)$ *определяются нулями ЦФЭТ* $A^2(z)$, *являющейся аналитическим продолжением заданной функции* $A^2(t)$, *при этом* $A^+(z)$, *согласно формуле* (7), *определяется всеми нулями функции* $A^2(z)$, *лежащими в* C^-, *и всеми вещественными нулями функции* $A^2(t)$, *каждый из которых берется с половинной кратностью, а* $r(z)$ *определяется, согласно формуле* (28), *произвольной совокупностью нулей функции* $A^2(z)$, *лежащих в* C^-.

1. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Выща шк., 1984. – 120 с.
3. *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. *Овчаренко О. В.* О связи амплитуды и фазы сигнала с финитным аналитическим спектром // Радиотехника и электроника. – 1990. – **35**, вып. 1. – С. 106–114.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. *Бакалов В. П., Кириенко О. В., Мартюшев Ю. Ю., Матвеева О. И.* Восстановление многомерных сигналов по амплитудному спектру // Зарубежная радиоэлектроника. – 1987. – № 2. – С. 31–37.
7. *Кузнецова Т. И.* О фазовой проблеме в оптике // Успехи физ. наук. – 1988. – **154**, вып. 4. – С. 677–690.
8. *Велкер Г. И.* К созданию единой теории модуляции. Ч. 1. Соотношения между огибающей и фазой. Ч. 2. Манипуляция нулями // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиотехнике. – 1966. – **54**, № 3. – С. 3–20; – № 5. – С. 22–44.
9. *Nussinzvig K. M.* Phase problem in coherence theory // J. Math. Phys. – 1967. – **8**, № 3. P. 561–572.
10. *Akutowicz E. J.* On the determination of the phase of a Fourier integral, 1; 2 // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **83**. – P. 179–182, 234–238.
11. *Krein M. G., Nudelman A. A.* On representation of entire functions positive on the real axis, or on a semiaxis, or outside a finite interval // Ibid. – 1986. – **127**. – P. 40–59.
12. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

Получено 29.11.2002,
после доработки — 26.05.2003