УДК 5519.21+62

Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

НЕПЕРЕРВНА ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ У НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Let $M_f(r)$ and $\mu_f(r)$ be maximum modulus and maximal term of an entire function f, respectively, and let $l(r)$ be a continuously differentiable function convex with respect to $\ln r$. We establish that in order for the relation $\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)$, $r \to +\infty$, to hold for every entire function f such that $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, it is necessary and sufficient that $\ln(rl'(r)) = o(l(r))$, $r \to +\infty$.

Встановлено умови збіжності процедури стохастичної апроксимації

$$du(t) = a(t)\big[C(u(t), x(t))\, dt + \sigma(u(t))\, dw(t)\big]$$

у випадковому напівмарковському середовищі, що описується ергодичним напівмарковським процесом $x(t)$, з використанням функції Ляпунова для усередненої системи.

1. Вступ. *Процедуру стохастичної апроксимації* (ПСА) було запропоновано для знаходження кореня рівняння регресії (див. [1])

$$C(u) = 0 \tag{1}$$

при наявності стохастичного збурення у вигляді додаткового гауссівського білого шуму, який інтерпретується як похибки обчислень. Для неперервної ПСА функція регресії розглядається у вигляді суми, а саме (див. [1, c. 115])

$$du(t) = C(u(t))\, dt + \sigma(u(t))\, d\xi(t).$$

Разом з тим стохастичний експеримент природно розглядати у випадковому середовищі, яке істотно змінює функцію регресії. Проте в умовах ергодичності випадкових збурень можна очікувати, що випадкові збурення після усереднення нівелюються так, що ПСА приведе до обчислення кореня рівняння регресії з усередненою функцією регресії:

$$du(t) = a(t)C(u(t))\, dt. \tag{2}$$

Тут $a(t)$ є нормуючою функцією, яка забезпечує збіжність ПСА (2) до кореня рівняння регресії (1).

ПСА у випадковому середовищі розглядається у вигляді стохастичного диференціального рівняння

$$du(t) = a(t)\big[C(u(t), x(t))\, dt + \sigma(u(t))\, dw(t)\big],$$

де $w(t)$ — стандартний процес Вінера, $x(t)$ — ергодичний напівмарковський процес [2]. Щоб можна було використати умови усереднення функції регресії, процес збурень розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$: $x^\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon)$. Остаточно об'єктом дослідження є неперервна ПСА

$$du^\varepsilon(t) = a(t)\Big[C\big(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)\big)\, dt + \sigma\big(u^\varepsilon(t)\big)\, dw(t)\Big]. \tag{3}$$

У п. 2 розглядається спрощена модель, яка не має додаткових збурень, тобто $\sigma(u) \equiv 0$. Основним результатом статті є теорема 1 (п. 2). Узагальнення з $\sigma(u) \neq 0$ розглядається у теоремі 2. Детальне доведення теореми 1 наведено у пп. 3–6.

2. Постановка задачі та основний результат. Неперервна ПСА у напівмарковському середовищі задається еволюційним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = a(t)C\big(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)\big)\, dt. \tag{4}$$

Функція регресії

$$C(u, x) = \left(C_k(u, x), k = \overline{1, d}\right), \quad u \in R^d, \quad x \in X,$$

є вектор-функцією, що задовольняє умови глобального розв'язку супроводжуючих систем [3]

$$\frac{du^x(t)}{dt} = C\left(u^x(t), x\right), \quad x \in X.$$

Збіжність ПСА (4) розглядається в умовах експоненціальної стійкості усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), \qquad C(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x), \tag{5}$$

що має єдину точку рівноваги $u_0 : C(u_0) = 0$. Не зменшуючи загальності, надалі вважаємо $u_0 = 0$. Тут $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, є стаціонарним розподілом рівномірно ергодичного напівмарковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, що задається напівмарковським ядром [3]

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t),$$

де $G_x(t)$ — функція розподілу часу перебування в стані $x \in X$.

Далі використовується супроводжуючий марковський процес $x_0(t)$, $t \geq 0$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Тут

$$q(x) := \frac{1}{m(x)}, \qquad m(x) := E\theta_x := \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt, \qquad \overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t).$$

Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, визначає проектор Π у банаховому просторі $\boldsymbol{B}(X)$ дійснозначних функцій $\varphi(x)$, $x \in X$, з супремум-нормою: $\|\varphi(x)\| := \sup\limits_{x \in X} |\varphi(x)|$:

$$\Pi\varphi(x) = \hat{\varphi}\mathbf{1}(x), \qquad \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), \qquad \mathbf{1}(x) \equiv 1, \quad x \in X.$$

Потенціальний оператор R_0 супроводжуючого марковського процесу $x_0(t)$, $t \geq 0$, визначається рівністю [3] $R_0 = [Q + \Pi]^{-1} - \Pi$ та задовольняє співвідношення $QR_0 = R_0 Q = I - \Pi$.

Теорема 1. *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u)$, $u \in R^d$, *що забезпечує експоненціальну стійкість усередненої системи* (5):

C_1) $C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u)$, $c_0 > 0$,

а також при $\tilde{C}(u, x) := C(u) - C(u, x)$ *мають місце додаткові умови*:

C_2) $\left| R_0 \tilde{C}(u, x) V'(u) \right| \leq c_1 V(u)$,

C_3) $\left| C(u, x) R_0 \left[\tilde{C}(u, x) V'(u) \right]' \right| \leq c_2 V(u)$,

$$C_4)\quad \left| C(u,x)\Big[C(u,x)R_0[C(u,x)V'(u)]'\Big]' \right| \le c_3 V(u).$$

Крім того, функції розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, *задовольняють умову Крамера рівномірно по* $x \in X$:

$$C_5)\quad \sup_{x\in X} \int_0^\infty e^{ht}\overline{G}_x(t)\,dt \le H < \infty, \quad h > 0.$$

Нарешті, нормуюча функція $a(t)$ *монотонно спадна, обмежена та задовольняє умови*

$$C_6)\quad \int_0^\infty a(t)\,dt = \infty, \qquad \int_0^\infty a^2(t)\,dt < \infty,$$

$$[a(t) - a(t+\varepsilon s)] \le \varepsilon s a^2(t) \quad \forall\, t, s \ge 0.$$

Тоді при кожному додатному $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — *достатньо мале*) *процедура стохастичної апроксимації* (4) *збігається при* $t \to \infty$ *з імовірністю* 1 *до точки рівноваги усередненої системи* (5):

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1.$$

Для ПСА (3) з $\sigma(u) \neq 0$ має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $C_1 - C_3$ *та* C_5 *і* C_6 *теореми* 1, *а також додаткова умова*

$$C_{4'})\quad \left| \sigma^2(u) R_0\Big[\tilde{C}(u,x)V'(u)\Big]'' \right| \le c_4[1+V(u)].$$

Тоді при кожному додатному $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — *достатньо мале*) *процедура стохастичної апроксимації* (3) *збігається при* $t \to \infty$ *з імовірністю* 1 *до точки рівноваги усередненої системи* (5):

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1.$$

3. Компенсуючий оператор (КО). Введемо розширений *процес марковського відновлення* (ПМВ)

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon\big(\tau_n^\varepsilon\big), \qquad \tau_n^\varepsilon = x\big(\tau_n^\varepsilon\big), \qquad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, \quad n \ge 0. \tag{6}$$

Тут

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \ge 0, \quad \tau_0 = 0,$$

є моментами відновлення напівмарковського процесу $x(t)$, $t \ge 0$ [3].

Розглянемо також сім'ю неоднорідних напівгруп $C_s^t(x)$, $0 \le t \le s$, $x \in X$, що породжується ПСА

$$du^x(t) = a(t)\,C\big(u^x(t), x\big), \quad x \in X.$$

Тобто на тест-функціях $\varphi(u) \in B(R^d)$ має місце зображення

$$C_s^t(x)\varphi(u) = \varphi\big(u^x(s)\big), \quad u^x(t) = u. \tag{7}$$

Породжуючий оператор напівгруп (7) визначається формулами

$$C_t(x)\varphi(u) = a(t)C(x)\varphi(u), \qquad C(x)\varphi(u) := C(u,x)\varphi'(u).$$

Означення [4]. *КО розширеного ПМВ* (6) *задається співвідношенням*

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-1}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)C_{t+s\varepsilon}^t(x)\int_X P(x,dy)\varphi(u,y,t+\varepsilon s) - \varphi(u,x,t)\right]. \tag{8}$$

***Зауваження* 1.** КО визначається також умовним математичним сподіванням

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-1}q(x)\mathrm{E}\left[\varphi\big(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon\big) - \varphi(u,x,t)\,\big|\,u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t\right].$$

Лема 1. *КО* (8) *на функціях* $\varphi(u,x)\in C^2(R^d)$ *допускає асимптотичні зображення*

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + q(x)C_t(x)\theta_1^\varepsilon(t,x)P\varphi(u,x), \tag{9}$$

а також

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + C_t(x)P\varphi(u,x) + \varepsilon q(x)C_t^2(x)\theta_2^\varepsilon(t,x)P\varphi(u,x). \tag{10}$$

Тут

$$\theta_1^\varepsilon(t,x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(s)C_{t+s\varepsilon}^t(x)b_1(t,\varepsilon s)\,ds = m(x)I + \varepsilon\mathbf{C}_t(x)\theta_2^\varepsilon(t,x), \tag{11}$$

$$\theta_2^\varepsilon(t,x) = \int_0^\infty \left[\overline{G}_x^{(2)}(s)b_1(t,\varepsilon s) + \overline{G}_x(s)b_2(t,\varepsilon s)\right]C_{t+s\varepsilon}^t(x)\,ds, \tag{12}$$

а

$$b_1(t,\varepsilon s) := \frac{a(t+\varepsilon s)}{a(t)} \le 1,$$

$$b_2(t,\varepsilon s) := \frac{a(t+\varepsilon s)-a(t)}{a^2(t)} = b_1(t,\varepsilon s)\left[\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{a(t+\varepsilon s)}\right].$$

Як завжди,

$$P\varphi(x) := \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Доведення. Спочатку з (8) отримуємо очевидне співвідношення

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}q(x)\left[G_t^\varepsilon(x) - I\right]P\varphi(u,x), \tag{13}$$

де

$$C_s^t(x) := \int_0^\infty G_x(ds)C_{t+s\varepsilon}^t(x). \tag{14}$$

Тепер, використовуючи для напівгрупи $C_s^t(x)$ рівняння

$$d_s \boldsymbol{C}^t_{t+s\varepsilon}(x) = \varepsilon \boldsymbol{C}_{t+s\varepsilon}(x)\boldsymbol{C}^t_{t+s\varepsilon}(x)\,ds$$

та формулу інтегрування частинами для (14), маємо

$$\boldsymbol{G}^\varepsilon_t(x) - \boldsymbol{I} = \varepsilon a(t)\boldsymbol{C}(x)\theta^\varepsilon_1(t, x), \tag{15}$$

$$\theta^\varepsilon_1(t, x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\boldsymbol{C}^t_{t+s\varepsilon}(x)b_1(t, \varepsilon s)\,ds, \tag{16}$$

тобто $\theta^\varepsilon_1(t, x)$ обчислюється за першим зображенням в (11). Проводячи аналогічні міркування для (16), отримуємо

$$\theta^\varepsilon_1(t, x) = m(x)\boldsymbol{I} + \varepsilon \mathbf{C}_t(x)\theta^\varepsilon_2(t, x), \tag{17}$$

де $\theta^\varepsilon_2(t, x)$ обчислюється за формулою (12).

Підставляючи (15), (16) в (13), знаходимо асимптотичні зображення (9) та (10).

4. Проблема сингулярного збурення. Доведення теореми базується на обчисленні КО (9) на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x, t) = V(u) + \varepsilon V_1(u, x, t). \tag{18}$$

Функція збурення $V_1(u, x, t)$ визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) [3, с. 50].

Лема 2. *КО* (9) *на збуреній функції Ляпунова* (18) *набуває значень*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t V^\varepsilon(u, x, t) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon\theta^\varepsilon_0(t)V(u), \tag{19}$$

і функція збурення $V_1(u, x, t)$ *має вигляд*

$$V_1(u, x, t) = a(t)\tilde{C}_0(u, x)V'(u), \tag{20}$$

$$\tilde{C}_0(u, x) := R_0[C(u) - C(u, x)].$$

При цьому залишковий оператор $\theta^\varepsilon_0(t)$ *в* (19) *визначається співвідношенням*

$$\theta^\varepsilon_0(t) = a^2(t)q(x)\boldsymbol{C}(x)\left[\boldsymbol{C}(x)\theta^\varepsilon_2(t, x) + \tilde{\boldsymbol{C}}_0(x)\theta^\varepsilon_1(t, x)\right], \tag{21}$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) := \tilde{C}_0(u, x)V'(u).$$

Доведення безпосередньо випливає з РПСЗ (див. [3], лема 3.2) та асимптотичних зображень (9), (10). Дійсно, оскільки

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^\varepsilon_t V^\varepsilon(u, x, t) &= \boldsymbol{L}^\varepsilon_t(V(u) + \varepsilon V_1(u, x, t)) = \\ &= \left[\varepsilon^{-1}Q + a(t)\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon a^2(t)q(x)\boldsymbol{C}^2(x)\theta^\varepsilon_2(t, x)\boldsymbol{P}\right]V(u) + \\ &+ \left[\varepsilon^{-1}Q + a(t)q(x)\boldsymbol{C}(x)\theta^\varepsilon_1(t, x)\boldsymbol{P}\right]\varepsilon V_1(u, x, t) = \\ &= \varepsilon^{-1}QV(u) + [QV_1(u, x, t) + a(t)\boldsymbol{C}(x)V(u)] + \\ &+ \varepsilon\left[a^2(t)q(x)\boldsymbol{C}^2(x)\theta^\varepsilon_2(t, x)\boldsymbol{P}V(u) + a(t)q(x)\boldsymbol{C}(x)\theta^\varepsilon_1(t, x)\boldsymbol{P}V_1(u, x, t)\right],\end{aligned} \tag{22}$$

то РПСЗ визначає $V_1(u, x, t)$ у вигляді (20) з рівняння

$$QV_1(u, x, t) + a(t)C(x)V(u) = a(t)C(u)V'(u).$$

Підставляючи (20) у залишковий член розкладу (22), отримуємо залишковий оператор $\theta_0^\varepsilon(t)$ у вигляді (21).

5. Мартингальна характеризація. *5.1.* Розширений ПМВ (6) породжує на тест-функціях $\varphi(u, x, t)$, $u \in R^d$, $x \in X$, $t \geq 0$, мартингал з дискретним параметром

$$\mu_{n+1}^\varepsilon = \varphi\left(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon\right) - \varphi(u_0, x_0, \tau_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon) \quad (23)$$

відносно σ-алгебри

$$\boldsymbol{F}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon = \sigma\left\{u_s^\varepsilon, x_s^\varepsilon, \tau_s^\varepsilon,\ 0 \leq s \leq \tau_n^\varepsilon\right\}, \quad n \geq 0.$$

Позначимо

$$\varphi_n^\varepsilon = \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon), \quad n \geq 0.$$

Тоді з (23) маємо

$$\mu_{n+1}^\varepsilon - \mu_n^\varepsilon = \varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon - \varepsilon\theta_{n+1} \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon. \quad (24)$$

Згідно з означенням КО, враховуючи

$$\mathrm{E}\left[\theta_{n+1} \,|\, \boldsymbol{F}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon\right] = m\left(x_n^\varepsilon\right) = \frac{1}{q\left(x_n^\varepsilon\right)},$$

обчислюємо умовне сподівання від (24):

$$\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}^\varepsilon - \mu_n^\varepsilon \,\middle|\, \boldsymbol{F}_n^\varepsilon\right] = \mathrm{E}\left[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon \,\middle|\, \boldsymbol{F}_n^\varepsilon\right] - \mathrm{E}\left[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon \,\middle|\, \boldsymbol{F}_n^\varepsilon\right] = 0.$$

5.2. Введемо двокомпонентний процес з неперервним часом

$$w^\varepsilon(t) := u^\varepsilon\left(\tau^\varepsilon(t)\right), \qquad x_t^\varepsilon := x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Згідно з означенням точкового процесу $\tau^\varepsilon(t) := \tau_{\nu^\varepsilon(t)}^\varepsilon$ маємо

$$w_n^\varepsilon := w^\varepsilon\left(\tau_n^\varepsilon\right) = u_n^\varepsilon = u^\varepsilon\left(\tau_n^\varepsilon\right), \quad n \geq 0. \quad (26)$$

Отже, процес $w^\varepsilon(t)$ є стрибковим, вкладеним у ПСА $u^\varepsilon(t)$, що визначається рівністю (25).

Лема 3. *Процес* (26) *визначається мартингальною властивістю процесу*

$$\mu^\varepsilon(t) = V^\varepsilon\left(w^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, \tau^\varepsilon(t)\right) - \int_0^{\tau^\varepsilon(t)} \boldsymbol{L}_{\tau^\varepsilon(s)}^\varepsilon V^\varepsilon\left(w^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \tau^\varepsilon(s)\right) ds.$$

Доведення базується на співвідношенні

$$\mu^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \mu_n^\varepsilon, \quad n \geq 0,$$

де μ_n^ε визначено в (23). Отже, для $s > t$ маємо

$$E\left[\mu^{\varepsilon}(s)-\mu^{\varepsilon}(t)\,\middle|\,F^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(t)}\right] = E\left[\sum_{k=\nu^{\varepsilon}(t)}^{\nu^{\varepsilon}(s)-1}\left[V^{\varepsilon}_{k+1}-V^{\varepsilon}_{k}-\varepsilon\theta_{k+1}L^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(t)+k}V^{\varepsilon}_{k}\right]\,\middle|\,F^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(t)}\right],$$

$$E\left[\sum_{k=\nu^{\varepsilon}(t)}^{\nu^{\varepsilon}(s)-1}\left[\mu^{\varepsilon}_{k+1}-\mu^{\varepsilon}_{k}\right]\,\middle|\,F^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(t)}\right] = 0.$$

6. Доведення теореми 1. Перш за все встановимо ключову нерівність.

Лема 4. *КО на збуреній функції Ляпунова в умовах теореми* 1 *допускає оцінку*

$$L^{\varepsilon}_{t}V^{\varepsilon}(u,x,t) \le -\delta a(t)V(u), \quad \delta > 0. \tag{27}$$

Доведення. Спочатку оцінимо дію залишкових операторів (11), (12) на функціях Ляпунова $V(u)$, використавши оцінку для напівгруп

$$\left|C^{\varepsilon}_{t+\varepsilon s}(x)V(u)\right| \le ce^{\int_t^{t+\varepsilon s}a(v)\,dv}\left|C_t(x)V(u)\right|$$

та умову Крамера C_5.

Враховуючи монотонність нормуючої функції $a(t)$ та її обмеженість: $a(t) \le$ $\le a$, а також зображення (11) для залишкового оператора θ^{ε}_{1}, встановлюємо оцінку

$$\theta^{\varepsilon}_{1}(t,x)V(u) \le cV(u). \tag{28}$$

Аналогічно оцінюється дія другого залишкового оператора (12) на функцію Ляпунова:

$$\left|\theta^{\varepsilon}_{2}(t,x)V(u)\right| \le c_2V(u). \tag{29}$$

При цьому використовується додаткова умова C_3.

Основна умова C_1 теореми 1 дозволяє записати оцінку (27) для кожного $\varepsilon \le \varepsilon_0$ при достатньо малому ε_0, а саме:

$$c - \varepsilon_0 ac_0 \ge \delta, \qquad \varepsilon_0 \le \frac{c-\delta}{ac_0}.$$

На підставі зображення (20) функції збурення $V_1(u,x,t)$ та умови C_2 теореми 1 записуємо оцінки

$$0 < (1-\varepsilon a(t)c)V(u) \le V^{\varepsilon}(u,x,t) \le (1+\varepsilon a(t)c)V(u).$$

Ключова нерівність (27) та оцінки (28), (29) дають можливість завершити доведення теореми 1, користуючись результатами Невельсона – Хасьмінського [1, с. 100] (теорема 2.8.1).

Мартингальна властивість процесу $V^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\left(\tau^{\varepsilon}(t)\right), x^{\varepsilon}_{t}, \tau^{\varepsilon}(t)\right)$ та ключова нерівність (27) характеризують цей процес як невід'ємний супермартингал. Отже, існує скінченна границя з імовірністю одиниця:

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}V^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\left(\tau^{\varepsilon}(t)\right), x^{\varepsilon}_{t}, t\right) = \nu^{\varepsilon}\right\} = 1.$$

При цьому випадкова величина ν^{ε} має скінченне математичне сподівання, оскільки

$$\mathrm{E} V^{\varepsilon}\Big(u^{\varepsilon}\big(\tau^{\varepsilon}(t)\big), x_t^{\varepsilon}, t\Big) \leq V^{\varepsilon}(u, x, 0) \leq (1+\varepsilon a(t)c)V(u) \leq cV(u).$$

Враховуючи додаткову властивість функції Ляпунова [1, с. 100]

$$V(u) \to \infty, \qquad \| u \| \to \infty,$$

робимо висновок, що

$$\mathrm{P}\left\{\nu^{\varepsilon} < \infty\right\} = 1.$$

Знову-таки з ключової нерівності (27) та оцінок (28), (29) отримуємо оцінку

$$\mathrm{E} \int_0^{\infty} a(s) V\Big(u^{\varepsilon}\big(\tau^{\varepsilon}(s)\big)\Big)\, ds \leq cV(u).$$

Отже, існує скінченна границя інтеграла

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^{\infty} a(s) V\Big(u^{\varepsilon}\big(\tau^{\varepsilon}(s)\big)\Big)\, ds < \infty\right\} = 1.$$

Більш того, в умовах теореми 1

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} V\Big(u^{\varepsilon}\big(\tau^{\varepsilon}(t)\big)\Big) = 0\right\} = 1,$$

тобто

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty} u^{\varepsilon}\big(\tau_n\big) = 0\right\} = 1. \tag{30}$$

Нарешті, з додатності функції Ляпунова $V(u)$, $u \neq 0$, властивості (30) і регулярності напівмарковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, випливає твердження теореми 1.

Теорема 2 доводиться за вказаною схемою з урахуванням ненульового збурення в (3).

1. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
3. *Королюк В. С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36 – 47.
4. *Свириденко М. Н.* Мартингальная характеризация предельных распределений в пространстве функций без разрывов второго рода // Мат. заметки. – 1998. – **43**, № 5. – С. 398 – 402.

Одержано 23.09.2003