УДК 517.54

В. В. Асеев, А. В. Сычев (Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, Россия),
А. В. Тетенов (Горно-Алтай. ун-т, Россия)

СКЛЕЙКА КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИХ ВЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КВАЗИКОНФОРМНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ

We prove the general theorem on the welding of quasisymmetric imbeddings. By using this theorem, we solve a problem of quasiconformal extension from a one-parameter family of quasiconformal triangles of special type which have no general estimate of quasiconformal convexity.

Доведено загальну теорему про склеювання квазісиметричних вкладень, за допомогою якої розв'язується задача про квазіконформне продовження з однопараметричної сім'ї квазіконформних трикутників певного вигляду, що не мають загальної оцінки квазіконформної опуклості.

1. Терминология, общие сведения и постановка задачи. Естественным обобщением понятия квазиконформности для отображений произвольных метрических пространств и, в частности, отображений, заданных на подмножествах в R^n, $n \geq 1$, или в пространстве $\overline{R^n}$ с хордовым расстоянием, являются понятия квазисимметричности и квазимебиусовости вложений, введенные в работах [1 – 3] в начале 80-х годов и позволившие вывести теорию квазиконформных отображений в область метрической топологии.

Определение 1. *Любой гомеоморфизм* $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *с* $1 \leq \eta(1)$ *называем функцией искажения. Топологическое вложение* $f: M_1 \to M_2$ *метрических пространств* (M_1, ρ_1) *и* (M_2, ρ_2) *называется* η*-квазисимметрическим, если для любой тройки попарно различных точек* $x_0, x_1, x_2 \in M_1$ *выполняется оценка*

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(x_0))}{\rho_2(f(x_1), f(x_0))} \leq \eta\left(\frac{\rho_1(x_2, x_0)}{\rho_1(x_1, x_0)}\right),$$

и η*-квазимебиусовым, если для любой четверки попарно различных точек* x_0, $x_1, x_2, x_3 \in M_1$ *выполняется оценка*

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(x_0))\rho_2(f(x_1), f(x_3))}{\rho_2(f(x_1), f(x_0))\rho_2(f(x_2), f(x_3))} \leq \eta\left(\frac{\rho_1(x_2, x_0)\rho_1(x_1, x_3)}{\rho_1(x_1, x_0)\rho_1(x_2, x_3)}\right).$$

Из η-квазисимметричности всегда следует ω-квазимебиусовость с функцией искажения ω, зависящей лишь от η (см. теорему 2 [2, с. 222]). Очевидно, что если $\infty \in T \subset \overline{R^n}$ и отображение $f: T \to \overline{R^n}$ с нормировкой $f(\infty) = \infty$ является η-квазимебиусовым (в евклидовой метрике), то оно η-квазисимметрично на $T \setminus \{\infty\}$. Любое сохраняющее ориентацию η-квазисимметрическое вложение $f: R^n \to R^n$ является K-квазиконформным автоморфизмом пространства R^n с лаврентьевским коэффициентом квазиконформности $K \leq \eta(1)$. Ограничение K-квазиконформного автоморфизма $f: R^n \to R^n$ на любом множестве $T \subset R^n$ является η-квазимебиусовым с функцией искажения η, зависящей лишь от K и n (см. теорему 3.5 [4, с. 623]), поэтому квазимебиусовость является необходимым условием существования продолжения топологического вложения $g: T \to \overline{R^n}$ до квазиконформного автоморфизма всего пространства $\overline{R^n}$. Но [5] оно не является достаточным для квазиконформного продолжения даже билипшицевых вложений с жордановых областей в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Задача квазиконформного продолжения на плоскости рассматривается в следующей постановке.

Определение 2. *Семейство* $\mathcal{D}$ *замкнутых жордановых областей в* $\overline{\mathbf{C}}$

имеет свойство квазиконформной продолжимости, если для любой функции искажения η *существует* $K \geq 1$ *такое, что для любой области* $D \in \mathcal{D}$ *и для любого сохраняющего ориентацию* η*-квазимебиусова вложения* $f: D \to \overline{\mathbf{C}}$ *существует квазиконформный автоморфизм* $F: \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ *с коэффициентом квазиконформности* $\leq K$, *совпадающий с* f *на* D.

В работе [6] доказано, что свойство квазиконформной продолжимости имеет семейство $\mathcal{D}[k]$ всех *k-квазиконформно выпуклых* замкнутых жордановых областей в $\overline{\mathbf{C}}$, т. е. таких областей D, у которых любую пару точек $x, y \in D$ можно соединить k-квазидугой $\gamma \subset D$. Под *k-квазидугой* $(k \geq 1)$ здесь понимается образ дуги окружности в $\overline{\mathbf{C}}$ при k-квазиконформном отображении $\overline{\mathbf{C}}$ на себя.

Определение 3. *Замкнутая жорданова область* $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ *называется* k*-квазиконформным* m*-угольником* $(k \geq 1, \ m \geq 2)$, *если ее границу можно представить в виде* $\partial D = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_m$, *где* γ_j, $j = 1, \ldots, m$, *являются* k*-квазидугами.*

Гипотеза. *Семейство всех* k*-квазиконформных* m*-угольников в* $\overline{\mathbf{C}}$ *имеет свойство квазиконформной продолжимости.*

А. К. Варисов [7] доказал, что любой k-квазиконформный двуугольник является k'-квазиконформно выпуклым и, опираясь на результаты работы [6], получил теорему о квазиконформной продолжимости семейства всех k-квазиконформных двуугольников. Он же построил специальное семейство $\mathcal{V}$, состоящее из l-квазиконформных треугольников (см. п. 2), для которого нет единого k такого, чтобы все $V(r) \in \mathcal{V}$ были k-квазиконформно выпуклыми.

В п. 2 данной статьи установлено, что семейство $\mathcal{V}$ треугольников Варисова все-таки имеет свойство квазиконформной продолжимости (теорема 2) и, следовательно, не может быть косвенным опровержением сформулированной выше гипотезы. Теорема Варисова (см. [7, 8]) о продолжении с квазиконформных двуугольников существенно используется в доказательстве этого результата, который является хорошей иллюстрацией применения общей теоремы о склейке квазисимметрических вложений (теорема 1) к конкретной задаче о квазиконформном продолжении.

2. Теоремы о склейке квазисимметрических вложений. Утверждения этого пункта являются прямыми обобщениями теорем о склейке квазисимметрических функций, полученных Дж. Келингосом (см. теоремы 3, 4 [9, с. 238]).

Теорема 1. *Пусть* $n \geq 2$, $\beta \in [0, \pi/2)$, $K_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 \geq 0, |x| \leq |x_1| \sec(\beta)\}$ *и* $K_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 \leq 0, \ |x| \leq |x_1| \sec(\beta)\}$. *Пусть, кроме того, компакты* $\Gamma_j \subset K_j$, $j = 0, 1$, *содержат точку* 0, *топологические вложения* $f_j: \Gamma_j \to K_j$ *с* $f_j(0) = 0$ *являются* η*-квазисимметрическими и для фиксированного* $q \in [1, +\infty)$ *имеются подмножества* $\gamma_j \subset \Gamma_j$, $j = 0, 1$, *такие, что*:

A$_1$) *для любого* $x \in \Gamma_j$ *существует* $x' \in \gamma_j$ *такое, что* $q^{-1}|x| \leq |x'| \leq q|x|$;

A$_2$) *для любых* $a \in \gamma_i$, $b \in \gamma_j$ *при* $i \neq j$, $i, j = 0, 1$, *выполняется оценка*

$$\frac{|f_i(a)|}{|f_j(b)|} \leq \eta\left(\frac{|a|}{|b|}\right). \tag{1}$$

Тогда топологическое вложение $f: \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \to K_0 \cup K_1$, *полученное склейкой* *отображений* f_0 *и* f_1, *является* ω-*квазисимметрическим с функцией искажения* ω, *зависящей лишь от* β, q *и* η.

Доказательство. Для произвольной пары точек $a \in \Gamma_i$, $b \in \Gamma_j$, $i \neq j$, найдутся точки $a' \in \gamma_i$, $b' \in \gamma_j$, для которых $q^{-1}|a'| \le |a| \le q|a'|$ и $q^{-1}|b| \le \le |b'| \le q|b|$. В силу η-квазисимметричности f_i и f_j имеем оценки $|f_i(a)| \le \le \eta(q)|f_i(a')|$ и $|f_j(b')| \le \eta(q)|f_j(b)|$, из которых, используя условие A_2) для точек a', b', получаем

$$\frac{|f_i(a)|}{|f_j(b)|} \le \eta(q)^2 \frac{|f_i(a')|}{|f_j(b')|} \le \eta(q)^2 \eta\left(\frac{|a'|}{|b'|}\right) \le \eta(q)^2 \eta\left(q^2 \frac{|a|}{|b|}\right).$$

Таким образом, положив $\eta'(t) := \max\{\eta(q)^2\eta(q^2 t), \eta(t)\} = \eta(q)^2\eta(q^2 t)$, сведем доказательство теоремы к случаю $q = 1$ и $\gamma_i = \Gamma_i$, $i = 0, 1$.

Далее через x^* будем обозначать ортогональную проекцию точки $x_n \in R^n$ на первую координатную ось и использовать сокращение $a \vee b := \max\{a, b\}$ для $a, b \in R^1$. Отметим, что при любых $x \in K_0$, $y \in K_1$ выполняется оценка

$$|x - y|/c \le |x^*| \vee |y^*| \le c|x - y|, \quad \text{где} \quad c = 1 \vee 2\sec(\beta), \tag{2}$$

вытекающая из неравенств $|x - y| \le |x| + |y| \le |x^*|\sec(\beta) + |y^*|\sec(\beta) \le \le 2\sec(\beta)(|x^*| \vee |y^*|)$ и $|x^*| \vee |y^*| \le |x^*| + |y^*| \le |x - y|$.

Пусть $T = (z_0, z_1, z_2) \subset \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ — произвольно заданная тройка точек, $w_j = = f(z_j)$, $j = 0, 1, 2$, $R(T) = |z_2 - z_0|/|z_1 - z_0|$ и $R(fT) = |w_2 - w_0|/|w_1 - w_0|$. Нам необходимо получить оценку вида $R(fT) \le \omega(R(T))$. Поскольку характеристика R тройки точек инвариантна относительно подобий в R^n, можно считать, не ограничивая общности, что $|z_1 - z_0| = |w_1 - w_0| = 1$, и свести доказательство к оценке $R(fT) = |w_2 - w_0|$ через $R(T) = |z_2 - z_0|$.

Ситуация 1. Если $T \subset \Gamma_0$ или $T \subset \Gamma_1$, то $R(f(T)) \le \eta(R(T))$ в силу η-квазисимметричности f_0 и f_1.

Ситуация 2. Пусть $(z_0 \in \Gamma_1;\ z_1, z_2 \in \Gamma_0)$ или $(z_0 \in \Gamma_0;\ z_1, z_2 \in \Gamma_1)$. Поскольку $1 = |z_1 - z_0| \le |z_1| + |z_0|$, то $|z_j| \ge 1/2$ для некоторого $j \in \{0, 1\}$. При этом $|w_j| \le c|w_j^*| \le c|w_0^* - w_1^*| \le c$. Поэтому

$$|w_2 - w_0| \le |w_j|(|w_2|/|w_j| + |w_0|/|w_j|) \le c(\eta(|z_2|/|z_j|) + \eta(|z_0|/|z_j|)) \le$$
$$\le 2c\eta((|z_2| + |z_0|)/|z_j|) \le 2c\eta(2(|z_0| + |z_2|)) \le 2c\eta(2c(|z_0^*| + |z_2^*|)) \le$$
$$\le 2c\eta(2c|z_2 - z_0|) = 2c\eta(2cR(T)) := \omega_1(R(T)).$$

Ситуация 3. Пусть $(z_0, z_2 \in \Gamma_0;\ z_1 \in \Gamma_1)$ или $(z_0, z_2 \in \Gamma_1;\ z_1 \in \Gamma_0)$. Поскольку $1 \le |z_1| + |z_0|$, то либо $|z_1| \ge 1/2$, либо $|z_0| \ge 1/2$.

Случай 3.1. Пусть $|z_0| \ge 1/2$. Тогда $|w_2 - w_0| \le |w_0|(|w_2 - w_0|/|w_0 - 0|) \le \le c|w_0^*|\eta(|z_2 - z_0|/|z_0|) \le c\eta(2|z_2 - z_0|) = c\eta(2R(T)) := \omega_2(R(T))$.

Случай 3.2. Пусть $|z_1| \ge 1/2$ и $|z_0| \le 1/2$. Для $m = \{1, 1/\eta^{-1}(1/2)\}$ имеем неравенство $\eta(1/m) \le 1/2$.

Подслучай 3.2.1. Пусть $|z_2 - z_0| \ge m|z_0|$. Тогда $|w_0|/|w_2 - w_0| \le \le \eta(|z_0|/|z_2 - z_0|) \le \eta(1/m) \le 1/2$ и поэтому $|w_2| \ge |w_2 - w_0| - |w_0| \ge (1 - -\eta(1/n))|w_2 - w_0| \ge |w_2 - w_0|/2$. Поскольку $|w_1| \le c|w_1^*| \le c$ и $|z_1| \ge 1/2$, то $|w_2 - w_0| \le 2|w_2| \le 2c|w_2|/|w_1| \le 2c\eta(|z_2|/|z_1|) \le 2c\eta(2|z_2|)$. Остается заметить, что $|z_2| \le |z_2 - z_0| + |z_0| \le (1 + 1/m)|z_2 - z_0| \le 2|z_2 - z_0|$. Таким образом, приходим к оценке $|w_2 - w_0| \le 2c\eta(4R(T)) := \omega_3(R(T))$.

Подслучай 3.2.2. Пусть $|z_2 - z_0| \le |z_0|^2$. Тогда, учитывая, что $|w_0| \le \le c|w_0^*| \le c$, получаем оценку

$$|w_2 - w_0| = |w_0|\frac{|w_2 - w_0|}{|0 - w_0|} \le |w_0|\eta\left(\frac{|z_2 - z_0|}{|z_0|}\right) \le$$
$$\le c\eta(\sqrt{|z_2 - z_0|}) = c\eta(\sqrt{R(T)}) := \omega_4(R(T)).$$

Подслучай 3.2.3. Пусть $|z_0|^2 \le |z_2 - z_0| \le m|z_0|$. Тогда

$$|w_2 - w_0| = |w_0|\frac{|w_2 - w_0|}{|w_0|} \le |w_0|\eta\left(\frac{|z_2 - z_0|}{|z_0|}\right) \le |w_0|\eta(m).$$

Поскольку $|w_1| \le c$ и $|z_1| \ge 1/2$, то

$$|w_2 - w_0| \le c\eta(m)\frac{|w_0|}{|w_1|} \le c\eta(m)\eta(2|z_0|) \le$$
$$\le c\eta(m)\eta(2\sqrt{|z_1 - z_0|}) := \omega_5(R(T)).$$

Ситуация 4. Пусть $(z_0, z_1 \in \Gamma_0;\ z_2 \in \Gamma_1)$ или $(z_0, z_1 \in \Gamma_1;\ z_2 \in \Gamma_0)$. Зафиксируем $j \in \{0, 1\}$ такое, что $|z_j| = |z_0| \vee |z_1|$.

Случай 4.1. Пусть $|z_2| \ge 2|z_j|$. В силу (1) $|w_j|/|w_2| \le \eta(1/2)$. Поэтому, полагая $c_5 := (1 + \eta(1/2))$, получаем неравенства

$$|w_2 - w_0| \le |w_2| + |w_0| \le c_5\frac{|w_2|}{|w_j|}|w_j| \le c_5|w_j|\eta\left(\frac{|z_2|}{|z_j|}\right) \le \ldots$$

(так как $1 = |z_0 - z_1| \le 2|z_j|$, то $|z_j| \ge 1/2$, и $|w_j| = |w_j - 0|/|w_1 - w_0| \le \le \eta(|z_j|/|z_1 - z_0|) = \eta(|z_j|) \le \eta(|z_2|/2)$)

$$\ldots \le c_5\eta(|z_2|/2)\eta(2|z_2|) \le c_5[\eta(2|z_2|)]^2 \le \ldots$$

(замечаем, что $|z_2 - z_0| \ge |z_2| - |z_j| \ge |z_2|/2$)

$$\ldots \le c_5[\eta(4|z_2 - z_0|)]^2 = c_5[\eta(4R(T))]^2 := \omega_6(R(T)).$$

Случай 4.2. Пусть $|z_2| \le 2|z_0|$. Тогда в силу (1) $|w_2|/|w_0| \le \eta(2)$. Полагая $c_6 := (1 + \eta(2))$, приходим к неравенству $|w_2 - w_0| \le (1 + \eta(2))|w_0| = = c_6|w_0|$. Однако $|w_0| = |w_0 - 0|/|w_1 - w_0| \le \eta(|z_0|)$ и $|z_2 - z_0| \ge |z_2^*| + |z_0^*| \ge \ge |z_0^*| \ge c^{-1}|z_0|$. Поэтому

$$|w_2 - w_0| \le c_6\eta(|z_0|) \le c_6\eta(c|z_2 - z_0|) = c_6\eta(cR(T)) := \omega_7(R(T)).$$

Случай 4.3. Пусть $2|z_0| \le |z_2| \le 2|z_1|$. Поскольку $|w_0| \le \eta(1/2)|w_2|$, то $|w_2 - w_0| \le |w_2| + |w_0| \le (1 + \eta(1/2))|w_2|$ и $2|z_2 - z_0| \ge 2|z_2| - 2|z_0| \ge |z_2|$.

Подслучай 4.3.1. Если $|z_0| \ge 1$, то $|w_2| \le \eta(2)|w_1| \le \eta(2)\eta(|z_1|) \le \le \eta(2)\eta(1 + |z_0|) \le \eta(2)\eta(2|z_0|) \le \eta(2)\eta(|z_2|)$. Следовательно,

$$|w_2 - w_0| \le (1 + \eta(1/2))\eta(2)\eta(2|z_2 - z_0|) := \omega_8(|z_2 - z_0|) = \omega_8(R(T)).$$

Подслучай 4.3.2. Если $|z_0| \le 1$, то $|w_1| \le 1 + |w_0| \le 1 + \eta(|z_0|) \le 1 + \eta(1)$

и так как $1 \le |z_1| + |z_0| \ge 2|z_1|$, то $|z_1| \ge 1/2$. Поэтому

$$|w_2| \le (1+\eta(1))\frac{|w_2|}{|w_1|} \le (1+\eta(1))\,\eta\left(\frac{|z_2|}{|z_1|}\right) \le (1+\eta(1))\,\eta(2|z_2|)$$

и, следовательно,

$$|w_2 - w_0| \le (1+\eta(1/2))(1+\eta(1))\,\eta(4|z_2 - z_0|) :=$$

$$:= \omega_9(|z_2 - z_0|) = \omega_9(R(T)).$$

Теперь, полагая $\omega(t) = \eta(t) \vee \omega_1(t) \vee \ldots \vee \omega_9(t)$, получаем оценку $R(fT) \le \le \omega(R(T))$, справедливую во всех возможных ситуациях.

Теорема доказана.

Как частный случай теоремы 1 отметим следующее обобщение имеющегося в [9, с. 238] (следствие 1) принципа отражения для квазисимметрических функций.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\beta \in [0, \pi/2)$ *и в конусе* $K_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 \le 0, |x| \le |x_1| \sec(\beta)\}$ *задано* η*-квазисимметрическое вложение* $f: \Gamma_0 \to K_0$ *компактного множества* $\Gamma_0 \subset K_0$, *содержащего точку* 0, *такое, что* $f(0) = = 0$. *Пусть* $s: R^n \to R^n$ — *отражение пространства относительно гиперплоскости* $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 = 0\}$. *Тогда отображение* $F: \Gamma_0 \cup s(\Gamma_0) \to R^n$, *определяемое формулой* $F(x) = f(x)$ *при* $x \in \Gamma_0$ *и* $F(x) = s(f(s(x)))$ *при* $x \in s(\Gamma_0)$, *является* ω*-квазисимметрическим вложением с оценкой искажения* ω, *зависящей лишь от* β *и* η.

Доказательство. Для любой пары точек $x \in \Gamma_0$ и $y \in \Gamma_1 = s(\Gamma_0)$, учитывая равенство $|s(y)| = |y|$ и используя η-квазисимметричность f, получаем оценки

$$\frac{|F(x)|}{|F(y)|} = \frac{|f(x)|}{|f(s(y))|} \le \eta\left(\frac{|x|}{|y|}\right) \quad \text{и} \quad \frac{|F(y)|}{|F(x)|} = \frac{|f(s(y))|}{|f(x)|} \le \eta\left(\frac{|y|}{|x|}\right),$$

обеспечивающие выполнения условий теоремы 1 для случая $q = 1$, $\gamma_0 = \Gamma_0$, $\gamma_1 = \Gamma_1$, откуда и вытекает требуемое утверждения.

Замечание. Нам неизвестно, существует ли для отображения f в условиях теоремы 1 оценка квазисимметричности вида $\omega(t) = C_1\eta(C_2 t)$, где константы C_1, C_2 зависят лишь от β, q и η.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\beta \in [0, \pi/2)$, $K_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 \ge 0, |x| \le \le |x_1| \sec(\beta)\}$ *и* $K_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1 \le 0, |x| \le |x_1| \sec(\beta)\}$. *Кроме того, пусть компакты* $\Gamma_j \subset K_j$, $j = 0, 1$, *содержат континуумы* $\gamma_j \subset \Gamma_j$, *соединяющие точку* 0 *с* ∞, *а топологические вложение* $f_j: \Gamma_j \to K_j$, $f_j(0) = 0$, *являются* η*-квазисимметрическими и такими, что* $|f_i(a)/f_j(b)| \le \eta(|a|/|b|)$ *для любых* $a \in \gamma_i$, $b \in \gamma_j$, $i \ne j$. *Тогда топологическое вложение* f, *полученное склейкой отображений* f_0 *и* f_1, *является* ω*-квазисимметрическим на* $\Gamma_0 \cup \cup \Gamma_1$ *с некоторой функцией искажения* ω, *зависящей лишь от* β *и* η.

Доказательство. Поскольку для любой точки $a \in \Gamma_i$ найдется точка $a' \in \gamma_i$ с $|a'| = |a|$, $i = 0, 1$, мы имеем частный случай теоремы 1, соответствующий $q = 1$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

3. Квазиконформное продолжение с треугольников Варисова. В расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ используем обозначения:

$$A(z_0;\varphi_1,\varphi_2) := \{\infty\} \cup \{z = z_0 + te^{i\varphi} : 0 \le t < +\infty,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$$

и

$$L(z_0;\varphi_0) = A(z_0;\varphi_0,\varphi_0).$$

Треугольником Варисова с вершиной $v(r) = -1 - ir$, $r \in (0, 1]$, называем множество $V(r) = A(0; -\pi, -\pi + \operatorname{arctg}(r)) \cup A(v(r); -\pi, 0)$, а символом $\mathcal{V}$ обозначаем семейство всех $V(r)$ с $0 < r \le 1$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}_0[\eta, r]$ всех сохраняющих ориентацию η-квазисимметрических вложений $f: V(r) \to \overline{C}$, тождественных на $A(0; -\pi, -\pi + \operatorname{arctg}(r))$, и положим $\mathcal{F}_0[\eta] := \cup\{\mathcal{F}_0[\eta, r] : 0 < r \le 1\}$.

Лемма 1. *Если* $\alpha = \min\{\pi/2,\ 1/\eta(1/\eta^{-1}(1))\}$, *то* $f(V(r)) \subset A(0; -\pi, -\pi - \alpha)$ *при любом* $f \in \mathcal{F}_0[\eta]$.

Доказательство. Допустим, исходя из противного, что для некоторого $r \in (0, 1]$ и $f \in \mathcal{F}_0[\eta, r]$ существует точка $a \in \partial V(r)$ такая, что $b = f(a) = \rho e^{i\theta}$ с $\pi - \alpha < \theta < \pi$. Положим $b_0 = -\rho$. Поскольку отображение f^{-1} является η'-квазисимметрическим с функцией искажения $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$ (см. теорему 22 [1, с. 99]), то $|a - b_0|/|b_0| \le \eta'(|b - b_0|/|b_0|) < \eta'(\rho\alpha/\rho) \le 1/\eta^{-1}(\eta(1/\eta^{-1}(1))) = \eta^{-1}(1)$. Таким образом, $a \in B(-\rho, \rho\eta^{-1}(1)) \subset B(-\rho, \rho)$ (напомним, что $\eta(1) \ge 1$). Вследствие тождественности f на $A(0; -\pi, -\pi + \operatorname{arctg}(r))$ имеем $r < \rho\eta^{-1}(1)$ и $\operatorname{Im}(a) = -r$. Для любого $\rho' > \rho$ и любой точки $z \in B(-\rho', \rho\eta^{-1}(1))$ справедлива оценка $|f(z) - (-\rho')|/\rho' \le \eta(|z - (-\rho')|/\rho') < \eta(\eta^{-1}(1)) = 1$, из которой следует, что $f(z) \in B(-\rho', \rho')$ и поэтому $\operatorname{Re}(z) < 0$. Значит, образы всех точек отрезка $\gamma = [v(r), a]$ лежат в левой полуплоскости. Поскольку $f(\gamma)$ не может пересечь отрицательную вещественную полуось, а $f(v(r)) = v(r)$, то $f(\gamma) \subset A(0; -\pi, -\pi/2)$. Это противоречит тому, что точка $b = f(a) \in f(\gamma)$ лежит во втором квадранте.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Существует K', зависящее лишь от η и такое, что любое отображение $f \in \mathcal{F}_0[\eta]$ продолжается до K'-квазиконформного отображения всей плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ на себя.*

Доказательство. Для величины α, определенной в лемме 1 и зависящей лишь от η, построим квазиконформное отображение $\psi: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\psi(\rho e^{i\varphi}) = \rho e^{i\lambda(\varphi)}$, где $\lambda(\varphi)$ — кусочно-линейная возрастающая вещественная функция на отрезке $\pi - \alpha/2 \le \varphi \le 3\pi - \alpha/2$, линейно переводящая отрезок $[\pi - \alpha, \pi - \alpha/2]$ в отрезок $[-3\pi/4, 0]$, отрезок $[\pi - \alpha/2, \pi]$ в отрезок $[0, 3\pi/4]$ и отрезок $[\pi, 3\pi - \alpha]$ в отрезок $[3\pi/4, 5\pi/4]$. Отображение ψ имеет коэффициент квазиконформности $k_0 = \max\{6\pi/4\alpha, 2(2\pi - \alpha)/\pi\}$, зависящий лишь от α и, следовательно, лишь от η. Для каждого $r \in (0, 1]$ множество $W(r) = \psi(V(r))$ лежит в $A(0; 3\pi/4, 5\pi/4)$ и содержит луч $L(0; 5\pi/4) = \psi(L(0; \pi))$. Замкнутые множества $\Gamma_1 = W(r)$ и $\Gamma_0 = L(0; 0)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 с конусами $K_1 = A(0; 3\pi/4, 5\pi/4)$ и $K_0 = A(0; -\pi/4, \pi/4)$ (с $\beta = \pi/4$). При любом $f \in \mathcal{F}_0[\eta]$ отображение $g_1 = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$ переводит (в силу леммы 1) множество $W(r)$ в подмножество конуса $\psi(A(0; \pi, 3\pi - \alpha)) = K_1$. Отображения ψ и ψ^{-1}, будучи k_0-квазиконформными, являются η_0-квазисимметрическими, где η_0 зависит лишь от k_0, т. е. лишь от η. Отображение g_1, будучи композицией квазисимметрических вложений, является η_2-квазисимметрическим с функцией искажения $\eta_2 = \eta_0 \circ \eta \circ \eta_0$, зависящей лишь от η. Следовательно, мы имеем η_2-квазисимметрические вложения $g_1 : W(r) \to K_1$ и $g_0 = \mathrm{id} : L(0; 0) \to L(0; 0) \subset K_0$. Поскольку f тождественно на луче $L(0; \pi)$, то g_1 тождественно на луче $\gamma_1 = \psi(L(0; \pi)) = L(0; 5\pi/4) \subset W(r)$. В силу следствия 2 для топологического вложения $g : W(r) \cup L(0; 0) \to \mathbf{C}$, полученного склейкой отображений g_1 и g_0, имеет место η_3-квазисимметричность с функцией искажения η_3, зависящей в конечном счете лишь от η. Поэтому топологическое вложение $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ g \circ \psi$, совпадающее с f на $V(r)$ и тождественное на луче $L(0; \pi - \alpha/2)$, является η_4-квазисимметрическим с функцией искажения $\eta_4 = \eta_0 \circ \eta_4 \circ \eta_0$, зависящей лишь от η. Но тогда оно будет и η_5-квазимебиусовым (см. п. 1) с функцией искажения η_5, зависящей лишь от η.

Отображение $\tilde{F}$, тождественное на $A(0; \pi - \alpha/2, \pi)$ и совпадающее с f на $V(r)$, является $\eta(1)$-квазиконформным в области $G(r) = \mathrm{Int}\,(V(r) \cup A(0; \pi - \alpha/2, \pi))$. Действительно, η-квазисимметричность f дает $\eta(1)$-квазиконформность этого отображения в окрестности любой внутренней точки множества $V(r)$, а внутри угла $A(0; \pi - \alpha/2, \pi + \operatorname{arctg}(r))$ оно тождественно, т. е. 1-квазиконформно. На границе области $G(r)$ оно совпадает с топологическим вложением $\tilde{f}$, которое, как мы показали выше, является η_5-квазимебиусовым вложением. Тогда, используя теорему (см. [10, с. 41], следствие 3.2, или [11, с. 110], теорема 3.15), утверждающую, что из квазиконформности внутри области и квазимебиусовости на границе следует квазимебиусовость в замкнутой области, получаем η_6-квазимебиусовость топологического вложения $\tilde{F} : G(r) \to \overline{\mathbf{C}}$ с некоторой функцией искажения η_6, зависящей лишь от η. Теперь заметим, что замкнутая область $G(r)$ ограничена лучом $L(\upsilon(r); 0)$ и двузвенной ломаной $L(0; \pi - \alpha/2) \cup [\upsilon(r); 0]$, являющейся k-квазидугой с $k \le \pi/(\alpha/2 + \operatorname{arctg}(r)) \le 2\pi/\alpha$, зависящим лишь от η. Следовательно, $G(r)$ — k-квазиконформный двуугольник, и согласно теореме Варисова [7] η_6-квазимебиусово вложение $\tilde{F}$ продолжается до K'-квазиконформного отображения $F : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с коэффициентом квазиконформности K', зависящим лишь от η_6 и от k, т. е. лишь от η. Это и есть требуемое квазиконформное продолжение исходного отображения f.

Лемма доказана.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Для семейства $\mathcal{F}[\eta]$ всех η-квазимебиусовых вложений вида $f : V(r) \to \overline{\mathbf{C}}$ треугольников Варисова с произвольными $r \in (0, 1]$ существует $K \ge 1$, зависящее лишь от η и такое, что любое отображение $f \in \mathcal{F}[\eta]$ продолжается до K-квазиконформного отображения всей плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ на себя. Таким образом, семейство $\mathcal{V}$ всех треугольников Варисова имеет свойство квазиконформной продолжимости.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}[\eta]$. Область $A(0; \pi, \pi + \operatorname{arctg}(r))$, ограниченная двумя лучами, является l-квазиконформным двуугольником. Согласно теореме Варисова (см. следствие [7, с. 119]) существуют $K_1 \ge 1$, зависящее лишь от η, и K_1-квазиконформное отображение f_0 плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, совпадающее с f на $A(0; \pi, \pi + \operatorname{arctg}(r))$. Поэтому для любого $f \in \mathcal{F}[\eta]$ композиция $g = f_0^{-1} \circ f$ является ω-квазимебиусовым вложением, тождественным на двуугольнике $A(0; \pi, \pi + \operatorname{arctg}(r))$, т. е. $f_0^{-1} \circ f \in \mathcal{F}_0[\omega]$, с функцией искажения ω, зависящей лишь от η. Следовательно, согласно лемме 2 отображение g продолжается до K'-квазиконформного автоморфизма $\tilde{g} : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с коэффициентом квазиконформности K', зависящим лишь от ω, и в конечном счете — лишь от η. И тогда отображение $f_0 \circ \tilde{g} : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ дает требуемое квазиконформное продолжение отображения f с коэффициентом квазиконформности $K'K_1$, зависящим лишь от η.

Теорема доказана.

1. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisimmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A1. Math. – 1980. – **5**. – P. 97 – 114.
2. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. – 1984, 1985. – **44**. – P. 218 – 234.
3. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и отображения, ограниченно искажающие модули. – Новосибирск, 1984. – 30 с. – (Деп. в ВИНИТИ, № 7190-84).
4. *Vuorinen M.* Quadruples and spatial quasiconformal mappings // Math. Z. – 1990. – **205**. – P. 617 – 628.
5. *Aseev V. V., Sychev A. V.* Quasiconformal extension of plane quasimöbius embeddings // Complex Analysis: Proc. 13th Rolf Nevanlinna Colloq. (Joensuu, 1987). – Lect. Notes Math., 1988. – **1351**. – P. 23 – 27.
6. *Асеев В. В.* Квазиконформное продолжение квазимебиусовых вложений на плоскости // Докл. АН СССР. – 1988. – **302**, № 3. – С. 524 – 526.
7. *Варисов А. К.* О квазиконформном продолжении гомеоморфизмов плоских областей // Групповые и метрические свойства отображений. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1995. – С. 116 – 121.
8. *Варисов А. К.* Квазиконформное продолжение квазимебиусовых вложений // Докл. РАН. – 1996. – **351**, № 2. – С. 155 – 157.
9. *Kelingos J. A.* Boundary correspondence under quasiconformal mappings // Mich. Math. J. – 1966. – **13**. – P. 235 – 249.
10. *Асеев В. В.* Нормальные семейства топологических вложений // Динамика жидкости со свободными границами (Динамика сплошной среды. – Вып. 76). – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. – С. 32 – 42.
11. *Väisälä J.* Quasisymmetry and union // Manuscr. math. – 1990. – **68**. – P. 101 – 111.

Получено 08.10.2002