УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

СИЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА

We obtain estimates of Marcinkiewicz-type strong means of the Fourier – Laplace series of continuous functions in terms of the best approximations.

Отримано оцінки сильних середніх типу Марцинкевича рядів Фур'є – Лапласа неперервних функцій у термінах найкращих наближень.

1. Пусть R^m — евклидово пространство размерности m, $m = 1, 2, \ldots$, $R^k \times R^l$ — топологическое произведение пространств R^k, R^l, $x = (x^{(k)}, x^{(l)})$ — точки (векторы) пространства $R^k \times R^l$, где $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}\right) \in R^k$, $x^{(l)} = \left(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_l^{(l)}\right) \in R^l$. Пусть, далее, S^m — единичная сфера в R^m с центром в начале координат, $S^k \times S^l$ — топологическое произведение сфер S^k, S^l, $C\left(S^k \times S^l\right)$ — пространство непрерывных на множестве $S^k \times S^l$ функций $f(x) = f\left(x^{(k)}, x^{(l)}\right)$ с нормой

$$\|f\|_{C(S^k \times S^l)} = \max_{x \in S^k \times S^l} |f(x)|,$$

$$S[f] = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{4\pi^{\lambda_1+\lambda_2+2}} (\mu + \lambda_1)(\nu + \lambda_2) \times$$

$$\times \iint_{S^k \times S^l} f(y^{(k)}, y^{(l)}) P_\mu^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1) P_\nu^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2) \, dS(y^{(k)}) \, dS(y^{(l)}) \tag{1}$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f(x)$, где $\lambda_1 = \dfrac{k-2}{2}$, $k \geq 3$, $\lambda_2 = \dfrac{l-2}{2}$, $l \geq 3$, $P_n^{(\lambda)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция,

$$\cos\gamma_1 = \left(x^{(k)}, y^{(k)}\right), \qquad \cos\gamma_2 = \left(x^{(l)}, y^{(l)}\right)$$

— скалярное произведение векторов $x^{(m)}$, $y^{(m)} \in S^m$,

$$\sigma_{mn}^{(\lambda)}(f; x) = \frac{1}{A_m^{\lambda_1} A_n^{\lambda_2}} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} A_{m-\mu}^{\lambda_1-1} A_{n-\nu}^{\lambda_2-1} S_{\mu\nu}^{(\lambda)}(f; x)$$

— чезаровские средние $(C, \lambda_1, \lambda_2)$, $S_{mn}^{(\lambda)}(f; x)$ — прямоугольные суммы Фурье – Лапласа порядка (m, n) ряда (1);

$$\rho_{mn}^{(\lambda)}(f; x) = f(x) - \sigma_{mn}^{(\lambda)}(f; x), \quad x = \left(x^{(k)}, x^{(l)}\right) \in S^k \times S^l.$$

Введем в рассмотрение величины

$$V_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{s=n}^{2n-1} \varphi\left(\left|\rho_{\mu s, \nu s}^{(\lambda)}(f; x)\right|\right), \tag{2}$$

$$H_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f; \alpha; x) = \sum_{s=n}^{\infty} \alpha_{\mu s, \nu s}(u) \varphi\left(\left|\rho_{\mu s, \nu s}^{(\lambda)}(f; x)\right|\right), \tag{3}$$

$\alpha = \left(\alpha_{ij}(u)\right)$ — некоторая неотрицательная последовательность функций на множестве U, имеющая хотя бы одну предельную точку, функция $\varphi(\cdot)$ определена и неотрицательна на $[0, +\infty)$.

© Р. А. ЛАСУРИЯ, 2004

В работе устанавливаются оценки величин (2), (3) в терминах наилучших приближений, при этом источником информации поведения данных величин будут сильные средние вида

$$h_{n,\mu,\nu}^{(q,r)}(f;x) = \left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\rho_{\mu s_i,\nu s_i}^{(\lambda)}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q}, \quad q>0,$$

$$n,r,\mu,\nu\in\mathbb{N}, \quad n\le s_1<s_2<\ldots<s_r\le 2n-1.$$

2. Положим

$$\delta_{mn}(f;x) = Y_{mn}(x) - f(x),$$

$$Y_{mn}(x) = Y_m(x^{(k)})Y_n(x^{(l)}),\ Y_m(x^{(k)}),\ Y_n(x^{(l)})$$

— сферические гармоники порядков m и n, заданные на сферах S^k и S^l соответственно. Тогда

$$\rho_{mn}^{(\lambda)}(f;x) = \delta_{mn}(f;x) + \sigma_{mn}^{(\lambda)}(f-Y_{mn};x) =$$

$$= \delta_{mn}(f;x) + \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{4\pi^{\lambda_1+\lambda_2+2}}\iint\limits_{S^k\times S^l}\left[f(y^{(k)},y^{(l)}) - Y_{mn}(y^{(k)},y^{(l)})\right]\times$$

$$\times\ \Phi_m^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_n^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,dS(y^{(k)})\,dS(y^{(l)}),$$

где

$$\Phi_i^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{1}{A_i^\lambda}\sum_{\mu=0}^{i}(i+\lambda)A_{i-\mu}^{(\lambda)}P_\mu^{(\lambda)}(\cos\gamma).$$

Пусть $E_{mn}(f)_{C(S^k\times S^l)} = E_{mn}(f)$ — величина наилучшего равномерного приближения сферическими гармониками $Y_{mn}(x)$ порядка m относительно $x^{(k)}$ и порядка n относительно $x^{(l)}$ функции $f(x)=f\left(x^{(k)},x^{(l)}\right)\in C\left(S^k\times S^l\right)$. Тогда

$$\left|\rho_{mn}^{(\lambda)}(f;x)\right| \le E_{mn}(f)\left(1+L_{mn}^{(\lambda)}\right), \quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2), \tag{4}$$

где

$$L_{mn}^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{4\pi^{\lambda_1+\lambda_2+2}}\iint\limits_{S^k\times S^l}\left|\Phi_m^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_n^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\right|dS(y^{(k)})\,dS(y^{(l)})$$

— константы Лебега (C,λ_1,λ_2)-метода суммирования.

Очевидно,

$$L_{mn}^{(\lambda)} = K\,L_m^{(\lambda_1)}L_n^{(\lambda_2)}, \quad K>0,$$

$$L_i^{(\lambda)} = K_1\int_0^\pi\left|\Phi_i^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma, \quad K_1>0.$$

Известно (см., например, [1, с. 21]), что

$$K_2\ln i \le L_i^{(\lambda)} \le K_3\ln i, \qquad \lambda=\frac{i-2}{2}, \quad i\ge 3.$$

Отсюда

$$K_4\ln m\ln n \le L_{mn}^{(\lambda)} \le K_5\ln m\ln n. \tag{5}$$

Принимая во внимание (4), (5), приходим к такому утверждению.

Лемма 1. *Если* $f\in C\left(S^k\times S^l\right)$, *то*

$$\left\|\rho_{mn}^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{C(S^k\times S^l)} \le K\,E_{mn}(f)(1+\ln m\ln n) \quad \forall\, m,n>1, \tag{6}$$

$$K = K(\lambda), \quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2).$$

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $S_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $n \le s_1 < s_2 < \ldots < s_r \le 2n-1$. *Тогда для любых* $f \in C\left(S^k \times S^l\right)$, $k, l \ge 3$, $q > 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ *и* $x = \left(x^{(k)}, x^{(l)}\right) \in S^k \times S^l$ *имеет место неравенство*

$$h_{n,\mu,\nu}^{(q,r)}(f; x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2 \frac{ne}{r}, \tag{7}$$

где $K = K(q, \lambda, \mu, \nu)$ *— константа, зависящая от указанных в скобках параметров.*

Доказательство. Пусть $1 \le r \le 2$. Тогда в силу (6) для любого $x \in S^k \times S^l$

$$\left|\rho_{\mu s_i, \nu s_i}^{(\lambda)}(f; x)\right| \le K E_{\mu s_i, \nu s_i}(f) \ln \mu s_i \ln \nu s_i.$$

Отсюда

$$h_{n,\mu,\nu}^{(q,r)}(f; x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln \mu(2n-1) \ln \nu(2n-1) \le K_1 E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2 \frac{ne}{r},$$

$$K_1 = K_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),$$

и в этом случае лемма доказана.

Предположим, что $r > 2$. Обозначим

$$\Delta_x(f; \gamma) = \Delta_x^{(\mu n, \nu n)}(f; \gamma) = \int\limits_{(x^{(k)}, y^{(k)}) = \cos\gamma_1} \int\limits_{(x^{(l)}, y^{(l)}) = \cos\gamma_2} \delta_{\mu n, \nu n}(f; y)\, dt(y^{(k)})\, dt(y^{(l)}),$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \quad y = \left(y^{(k)}, y^{(l)}\right).$$

Имеем

$$\rho_{\mu s_i, \nu s_i}^{(\lambda)}(f; x) = \delta_{\mu n, \nu n}(f; x) - K(\lambda) \int_0^\pi \int_0^\pi \Delta_x(f; \gamma) \Phi_{\mu s_i}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1) \Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\, d\gamma, \tag{8}$$

$$d\gamma = d\gamma_1\, d\gamma_2.$$

Пусть, далее,

$$E_1^\mu = \left[0, \frac{\pi}{2(\mu s_i + 1)}\right], \quad E_2^\mu = \left[\frac{\pi}{2(\mu s_i + 1)}, \pi - \frac{\pi}{2(\mu s_i + 1)}\right],$$

$$E_3^\mu = \left[\pi - \frac{\pi}{2(\mu s_i + 1)}, \pi\right], \quad e = [0, \pi], \quad Q_j^\mu = E_j^\mu \times e, \quad j = 1, 2, 3, \tag{9}$$

$$J_{\mu s_i, \nu s_i}^{(j)}(f; x) = K(\lambda) \iint\limits_{Q_j^\mu} \Delta_x(f; \gamma) \Phi_{\mu s_i}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1) \Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\, d\gamma.$$

Учитывая (8), (9) и полагая, на основании неравенства для средних, $q \ge 2$, находим

$$h_{n,\mu,\nu}^{(q,r)} \le E_{\mu n, \nu n}(f) + \left\{ r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{j=1}^{3} J_{\mu s_i, \nu s_i}^{(j)}(f; x) \right|^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le E_{\mu n, \nu n}(f) + \sum_{j=1}^{3} \left\{ r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left| J_{\mu s_i, \nu s_i}^{(j)}(f; x) \right|^q \right\}^{1/q} = E_{\mu n, \nu n}(f) + \sum_{j=1}^{3} V_{r,q}^{(j)}(f; x). \tag{10}$$

Применяя неравенство (см., например, [1, 2])

$$\left|\Phi_s^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right| \le K s^{2\lambda+1}, \quad 0 \le \gamma \le \pi,$$

теорему Фубини и обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$V_{r,q}^{(1)}(f;x) = \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|J_{\mu s_i}^{(1)}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \frac{K}{r^{1/q}}\left\{\sum_{i=1}^{r}\left(\int_0^{\pi/2\mu n}\left|\Phi_{\mu s_i}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\right|\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|d\gamma_1\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le K(2\mu n)^{2\lambda_1+1}\int_0^{\pi/2\mu n}\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|^q\right)^{1/q}d\gamma_1, \quad K = K(\lambda). \tag{11}$$

Следуя методам работы [3], для выражения в круглых скобках в (11) будем иметь

$$\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|^q\right)^{1/q} \le K E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}\sin^{2\lambda_1}\gamma_1. \tag{12}$$

В силу (11) и (12)

$$V_{r,q}^{(1)}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}(\mu n)^{2\lambda_1+1}\int_0^{\pi/2\mu n}\gamma_1^{2\lambda_1}\,d\gamma_1 = K_1 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r},$$
$$K_1 = K_1(q,\mu,\nu,\lambda). \tag{13}$$

Аналогично,

$$V_{r,q}^{(3)}(f;x) \le K_2 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}. \tag{14}$$

В дальнейшем будем пользоваться представлением [1, 2]

$$\Phi_s^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{\lambda}{4^\lambda}\frac{\sin\left[\left(s+\frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma-\lambda\pi\right]}{(\sin\gamma)^\lambda\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}} + \frac{1}{s+1}\frac{\eta_s(\gamma)}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}} =$$

$$= \Phi_{s,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma) + \Phi_{s,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma), \qquad \left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right| < \frac{s\pi}{2(s+1)}, \qquad \eta_s(\gamma) = O(1). \tag{15}$$

Принимая во внимание (15), имеем

$$V_{r,q}^{(2)}(f;x) \le K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{Q_2^\mu}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{Q_2^\mu}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,2}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i,2}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \upsilon_{r,q}^{(1)}(f;x) + \upsilon_{r,q}^{(2)}(f;x). \tag{16}$$

Применяя неравенство Минковского для сумм, находим

$$\upsilon_{r,q}^{(1)}(f;x) \le K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi-(2\mu n)^{-1}}\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi/2(\mu s_i+1)}\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\,\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\,\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{\pi-\pi/2(\mu s_i+1)}^{\pi-(2\mu n)^{-1}}\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\,\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\,\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= A_{r,q}(f;x) + B_{r,q}(f;x) + C_{r,q}(f;x). \tag{17}$$

Оценивая величину $B_{r,q}(f;x)$, имеем

$$B_{r,q}(f;x) \le$$

$$\le K\int_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi/2\mu n}\frac{1}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}}\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\,\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|^q\right)^{1/q}d\gamma_1. \tag{18}$$

В силу (12) и (18) находим

$$B_{r,q}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}\int_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi/2\mu n}\frac{\sin^{2\lambda_1}\gamma_1}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}}d\gamma_1 \le$$

$$\le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r},\quad K_1 = K_1(\lambda). \tag{19}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и выполняя замену $\gamma_1 = \pi - \gamma_1$, с учетом (12) получаем

$$C_{r,q}(f;x) \le$$

$$\le K\int_{\pi-\pi/2\mu n}^{\pi-1/2\mu n}\frac{1}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}}\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\,\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|^q\right)^{1/q}d\gamma_1 \le$$

$$\le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}\int_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi/2\mu n}\frac{(\sin\gamma_1)^{2\lambda_1}}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}}d\gamma_1 \le K_2 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}. \tag{20}$$

Переходя к оценке $A_{r,q}(f;x)$, замечаем, что

$$(2\mu n)^{-1} \le (2\mu r)^{-1} < \frac{1}{2} < \pi - \frac{1}{2\mu n}.$$

Используя неравенство Минковского для сумм и полагая $J_i = \Delta_x(f;\gamma) \times \times \Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\,\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)$, находим

$$A_{r,q}(f;x) \le K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu n)^{-1}}^{(2\mu r)^{-1}}\int_0^{\pi}J_i\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} + K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}J_i\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ K\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{1/2}^{\pi-\pi/2\mu n}\int_0^{\pi}J_i\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} = \sum_{j=1}^{3}A_{r,q}^{(j)}. \tag{21}$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, с учетом (12) получаем

$$A_{r,q}^{(1)}(f;x) \le$$

$$\le K \int_{(2\mu n)^{-1}}^{(2\mu r)^{-1}} \frac{1}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}} \left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_0^{\pi}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma_2\right|^q\right)^{1/q} \le$$

$$\le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln\frac{ne}{r}\int_{(2\mu n)^{-1}}^{(2\mu r)^{-1}}\frac{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1}}{\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}}d\gamma_1 \le$$

$$\le K_2 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln^2\frac{ne}{r}, \quad K_2 = K_2(\lambda). \tag{22}$$

Аналогично,

$$A_{r,q}^{(3)}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f)\ln^2\frac{ne}{r}. \tag{23}$$

Пусть, далее,

$$Q_j^{\mu,\nu} = \left[(2\mu r)^{-1}, \frac{1}{2}\right]\times E_j^{\nu}, \quad j=1,2,3,$$

и положим

$$U_j^{(r)}(f;x) = \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{Q_j^{\mu,\nu}}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q}.$$

Тогда

$$A_{r,q}^{(2)}(f;x) \le K\sum_{j=1}^{3}U_j^{(r)}(f;x). \tag{24}$$

В силу теоремы Фубини, обобщенного неравенства Минковского и замечания относительно (12) имеем

$$U_1^{(r)}(f;x) \le (2\nu n)^{2\lambda_2+1}\int_0^{\pi/2\nu n}\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\,d\gamma_1\right|^q\right)^{1/q}d\gamma_2 \le$$

$$\le K(2\nu n)^{2\lambda_2+1}E_{\mu n,\nu n}(f)\int_0^{\pi/2\nu n}\sin^{2\lambda_2}\gamma_2\,d\gamma_2 \le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f). \tag{25}$$

Аналогично,

$$U_3^{(r)}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f). \tag{26}$$

Далее,

$$U_2^{(r)}(f;x) \le$$

$$\le \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int_{\pi/2(\nu s_i+1)}^{\pi-\pi/2(\nu s_i+1)}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i,1}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{\pi/2(\nu s_i+1)}^{\pi-\pi/2(\nu s_i+1)}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i,2}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= U_{2,1}^{(r)}(f;x) + U_{2,2}^{(r)}(f;x). \tag{27}$$

Применяя неравенство Минковского для сумм и полагая $J_i^1 = \Delta_x(f;\gamma)\times$ $\times\,\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\,\Phi_{\nu s_i,1}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)$, имеем

$$U_{2,1}^{(r)}(f;x) \le \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{(2\nu n)^{-1}}^{\pi-(2\nu n)^{-1}} J_i^1\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{(2\nu n)^{-1}}^{\pi/2(\nu s_i+1)} J_i^1\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} + \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{\pi-\pi/2(\nu s_i+1)}^{\pi-(2\nu n)^{-1}} J_i^1\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \tilde{A}_{r,q}(f;x) + \tilde{B}_{r,q}(f;x) + \tilde{C}_{r,q}(f;x). \tag{28}$$

Величины $\tilde{B}_{r,q}(f;x)$ и $\tilde{C}_{r,q}(f;x)$ оцениваются по той же схеме, что и соответствующие величины $B_{r,q}(f;x)$ и $C_{r,q}(f;x)$:

$$\tilde{B}_{r,q}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f), \tag{29}$$

$$\tilde{C}_{r,q}(f;x) \le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f). \tag{30}$$

Далее,

$$\tilde{A}_{r,q}(f;x) \le \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{(2\nu n)^{-1}}^{(2\nu r)^{-1}}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)\Phi_{\nu s_i,1}^{(\lambda_2)}(\cos\gamma_2)\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{(2\nu r)^{-1}}^{1/2} J_i^1\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} + \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{1/2}^{\pi-(2\nu n)^{-1}} J_i^1\,d\gamma\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\tilde{A}_{r,q}^{(j)}(f;x). \tag{31}$$

Величины $\tilde{A}_{r,q}^{(1)}(f;x)$ и $\tilde{A}_{r,q}^{(3)}(f;x)$ оцениваются аналогично величинам $A_{r,q}^{(1)}(f;x)$ и $A_{r,q}^{(3)}(f;x)$ соответственно:

$$\tilde{A}_{r,q}^{(1)}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f)\ln^2\frac{ne}{r}, \tag{32}$$

$$\tilde{A}_{r,q}^{(3)}(f;x) \le K_1 E_{\mu n,\nu n}(f)\ln^2\frac{ne}{r}. \tag{33}$$

С учетом представления (15) имеем

$$\tilde{A}_{r,q}^{(2)}(f;x) \le$$

$$\le \left\{r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\int\limits_{(2\nu r)^{-1}}^{1/2}\frac{\Delta_x(f;\gamma)\cos\left(\dfrac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_1-\lambda_1\pi\right)\cos\left(\dfrac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_2+\lambda_2\pi\right)}{\sin^{\lambda_1}\gamma_1\left(\sin\dfrac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}\sin^{\lambda_2}\gamma_2\left(\sin\dfrac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}}\right.\right.\times$$

$$\times \sin \mu s_i \gamma_1 \sin \nu s_i \gamma_2 \, d\gamma \Bigg|^q \Bigg\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{ r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left| \int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2} \int\limits_{(2\nu r)^{-1}}^{1/2} \frac{\Delta_x(f;\gamma) \cos\left(\frac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_1 - \lambda_1\pi\right) \cos\left(\frac{3\lambda_2+1}{2}\gamma_2 - \lambda_2\pi\right)}{\sin^{\lambda_1}\gamma_1 \left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1} \sin^{\lambda_2}\gamma_2 \left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}} \times \right.\right.$$

$$\times \sin \mu s_i \gamma_1 \cos \nu s_i \gamma_2 \, d\gamma \Bigg|^q \Bigg\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{ r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left| \int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2} \int\limits_{(2\nu r)^{-1}}^{1/2} \frac{\Delta_x(f;\gamma) \sin\left(\frac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_1 - \lambda_1\pi\right) \cos\left(\frac{3\lambda_2+1}{2}\gamma_2 + \lambda_2\pi\right)}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1} \left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1} (\sin\gamma_2)^{\lambda_2} \left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}} \times \right.\right.$$

$$\times \cos \mu s_i \gamma_1 \sin \nu s_i \gamma_2 \, d\gamma \Bigg|^q \Bigg\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{ r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left| \int\limits_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2} \int\limits_{(2\nu r)^{-1}}^{1/2} \frac{\Delta_x(f;\gamma) \sin\left(\frac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_1 - \lambda_1\pi\right) \sin\left(\frac{3\lambda_2+1}{2}\gamma_2 - \lambda_2\pi\right)}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1} \left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1} (\sin\gamma_2)^{\lambda_2} \left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}} \times \right.\right.$$

$$\times \cos \mu s_i \gamma_1 \cos \nu s_i \gamma_2 \, d\gamma \Bigg|^q \Bigg\}^{1/q} = \sum_{j=1}^{4} F_j^{(r)}(f;x). \tag{34}$$

Положим

$$\chi_x(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_x(f;\gamma) \cos\left(\frac{3\lambda_1+1}{2}\gamma_1 - \lambda_1\pi\right) \cos\left(\frac{3\lambda_2+1}{2}\gamma_2 - \lambda_2\pi\right)}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1} \left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1} (\sin\gamma_2)^{\lambda_2} \left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}}, \\ \qquad\qquad (\gamma_1, \gamma_2) \in \left[\frac{1}{2\mu r}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2\nu r}, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, \qquad (\gamma_1, \gamma_2) \in [-\pi, \pi]^2 \setminus \left[\frac{1}{2\mu r}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2\nu r}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

$$\chi_x(\gamma_i + 2\pi) = \chi_x(\gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

В этом случае интегралы, входящие в $F_1^{(r)}(f;x)$, являются коэффициентами Фурье функции $\chi_x(\gamma)$. Эти коэффициенты представляются в виде [4]

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(\gamma_1) e^{-is_j\gamma_1} \, d\gamma_1,$$

где

$$\Psi_x(\gamma_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x\left(\frac{1}{\mu}(\gamma_1 - \nu\gamma_2), \gamma_2\right)d\gamma_2.$$

Применяя теорему Хаусдорфа – Юнга [5, с. 153], имеем

$$F_1^{(r)}(f;x) \le r^{-1/q}\|\Psi_x(\gamma_1)\|_{q'}, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1, \quad q \ge 2, \tag{35}$$

$$\|\varphi\|_q = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi|^q dt\right)^{1/q}.$$

Следуя рассуждениям из [4], получаем

$$\|\Psi_x(\gamma_1)\|_{q'} \le K E_{\mu n, \nu n}(f) r^{1/q}. \tag{36}$$

Согласно (35) и (36) $F_1^{(r)}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f)$. Аналогично оцениваются $F_j^{(r)}(f;x)$, $j = 2, 3, 4$. Тогда из (34) следует оценка

$$\tilde{A}_{r,q}^2(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f). \tag{37}$$

Учитывая (32), (33), (37), из (31) получаем

$$\tilde{A}_{r,q}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}. \tag{38}$$

Вследствие (28) – (30), (38)

$$U_{2,1}^{(r)}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}, \quad K = K(q, \lambda, \mu, \nu). \tag{39}$$

Согласно теореме Фубини и обобщенному неравенству Минковского

$$U_{2,2}^{(r)}(f;x) \le K(\nu n)^{-1}\int_{(2\nu n)^{-1}}^{\pi-(2\nu n)^{-1}}\frac{1}{(\sin\gamma_2)^{\lambda_2+1}\left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}}\times$$

$$\times\left(r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left|\int_{(2\mu r)^{-1}}^{1/2}\Delta_x(f;\gamma)\Phi_{\mu s_i,1}^{(\lambda_1)}(\cos\gamma_1)d\gamma_1\right|^q\right)^{1/q}d\gamma_2 \le$$

$$\le K(\nu n)^{-1}E_{\mu n, \nu n}(f)\int_{(2\nu n)^{-1}}^{\pi-(2\nu n)^{-1}}\frac{(\sin\gamma_2)^{2\lambda_2}}{(\sin\gamma_2)^{\lambda_2+1}\left(\sin\frac{\gamma_2}{2}\right)^{\lambda_2+1}}d\gamma_2 \le K E_{\mu n, \nu n}(f). \tag{40}$$

С учетом (39), (40) из (27) имеем

$$U_2^{(r)}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}. \tag{41}$$

Принимая во внимание (25), (26) и (41), из (24) находим

$$A_{r,q}^{(2)}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}. \tag{42}$$

На основании (19) – (23), (17) и (42)

$$v_{r,q}^{(1)}(f;x) \le K E_{\mu n, \nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}. \tag{43}$$

Оценивая $v_{r,q}^{(2)}(f;x)$, получаем

$$v_{r,q}^{(2)}(f;x) \le K(\mu n)^{-1} E_{\mu n,\nu n}(f) \ln\frac{ne}{r} \int\limits_{(2\mu n)^{-1}}^{\pi-(2\mu n)^{-1}} \frac{(\sin\gamma_1)^{2\lambda_1}\, d\gamma_1}{(\sin\gamma_1)^{\lambda_1+1}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\lambda_1+1}} \le$$

$$\le K E_{\mu n,\nu n}(f) \ln\frac{ne}{r}. \tag{44}$$

Согласно (16), (43) и (44)

$$V_{r,q}^{(2)}(f;x) \le K E_{\mu n,\nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{r}, \qquad K = K(q,\lambda,\mu,\nu). \tag{45}$$

Принимая во внимание (10), (13), (14) и (45), приходим к утверждению леммы 2.

3. Пусть Φ — множество неубывающих, непрерывных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(2u) \le A\varphi(u) \quad \forall\, u\in[0,1], \qquad \varphi(u) \le e^{\sqrt{Bu}} \quad \forall\, u\in(0,+\infty),$$

где $A = A(\varphi)$, B — некоторые постоянные. Представителями множества Φ являются, к примеру, функции $\varphi(u) = e^{\sqrt{u}} - 1$, $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, и др. Если $\varphi\in\Phi$, то [6]

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(\sigma u) e^{-\sqrt{u\sigma}} \le K\varphi(u) \quad \forall\, u\in\left(0,\frac{a}{B}\right), \quad 0<a<1. \tag{46}$$

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(\cdot)\in\Phi$. *Тогда для любых* $f\in C\left(S^k\times S^l\right)$, $k,\ l\ge 3$, *и* $x\in S^k\times S^l$

$$V_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;x) \le K\varphi\left(E_{\mu n,\nu n}(f)\right), \qquad K = K(\varphi,\lambda,\mu,\nu), \tag{47}$$

$V_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;x)$ — *величина, определенная равенством* (2).

Доказательство. Пусть $E_{\mu n,\nu n}(f) = 0$. В этом случае с учетом определения множества Φ теорема доказана.

Пусть теперь $E_{\mu n,\nu n}(f) > 0$ и положим

$$B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x) = \left\{s\in[n,2n-1]\colon (\sigma-1)E_{\mu n,\nu n}(f) \le \left|\rho_{\mu s,\nu s}^{(\lambda)}(f;x)\right| \le \sigma E_{\mu n,\nu n}(f)\right\},$$
$$\sigma\in\mathbb{N},$$

$\overline{\mu}_{n,\mu,n}^{(\sigma)}(x)$ — количество элементов $B_{n,\mu,n}^{(\sigma)}(x)$.

Поскольку функция $\varphi(\cdot)$ не убывает, то

$$V_{n,\mu,n}^{(\varphi,\lambda)}(f;x) \le n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{s\in B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)} \varphi\left(\sigma E_{\mu n,\nu n}(f)\right) = n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi\left(\sigma E_{\mu n,\nu n}(f)\right)\overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x), \tag{48}$$

где предполагается, что если при некотором σ $B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x) = \{\varnothing\}$, то $\sum_{B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)} = 0$. Пусть $\overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x) \ge 1$ и s_i — все элементы множества $B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)$. Полагая в неравенстве (7) $r = \overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)$, $q = 1$, находим

$$(\sigma-1)E_{\mu n,\nu n}(f) \le \frac{1}{\overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)} \sum_{s\in B_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)} \left|\rho_{\mu s,\lambda s}^{(\lambda)}(f;x)\right| \le K E_{\mu n,\nu n}(f) \ln^2\frac{ne}{\overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x)}.$$

Отсюда $\overline{\mu}_{n,\mu,\nu}^{(\sigma)}(x) = n\, e^{1-\sqrt{\sigma/2K}}$. С учетом этого из (48) получаем неравенство

$$V_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;x) \le K\varphi\left(E_{\mu n,\nu n}(f)\right), \qquad K = K(\varphi,\lambda,\mu,\nu), \tag{49}$$

при условии, что

$$E_{\mu n,\nu n}(f) \le (4KB)^{-1}. \tag{50}$$

Вследствие стремления к нулю при $n \to \infty$ левой части (50) найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > n_0$ справедливо (50), а вместе с ним и (49). Если $n \le n_0$, то (49) выполняется за счет соответствующего выбора константы.

Теорема 1 доказана.

Представляя величину $H_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;\alpha;x)$, определенную равенством (3), в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=2^j n}^{2^{j-1}n} \alpha_{\mu s,\nu s}(u)\,\varphi\left(\left|\rho_{\mu s,\nu s}^{(\lambda)}(f;x)\right|\right),$$

применяя неравенство (47), а также учитывая определение множества Φ, приходим к такому утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(\cdot) \in \Phi$, $\alpha = \left(\alpha_{ij}(u)\right)$, $u \in U$, *— некоторая неотрицательная, не возрастающая по каждому индексу при любом фиксированном* $u \in U$ *последовательность функций. Тогда для любых* $f \in C\left(S^k \times S^l\right)$, $k, l \ge 3$, *и* $\mu, \nu \in \mathbb{N}$

$$\left\| H_{n,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;\alpha;x) \right\|_{C\left(S^k \times S^l\right)} \le$$

$$\le K\left\{ n\alpha_{\mu n,\nu n}(u)\,\varphi\left(E_{\mu n,\nu n}(f)\right) + \sum_{s=n}^{\infty} \alpha_{\mu s,\nu s}(u)\,\varphi\left(E_{\mu s,\nu s}(f)\right) \right\}, \qquad K = K(\varphi,\lambda,\mu,\nu). \tag{51}$$

Положим в (51) $n = 1$. Тогда в условиях теоремы 2

$$\left\| H_{1,\mu,\nu}^{(\varphi,\lambda)}(f;\alpha;x) \right\|_{C\left(S^k \times S^l\right)} \le K\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{\mu s,\nu s}(u)\,\varphi\left(E_{\mu s,\nu s}(f)\right) \right\}. \tag{52}$$

Отправляясь от соотношения (52), получаем оценки φ-сильных средних типа Марцинкевича некоторых α-методов суммирования рядов. В частности, если

$$\alpha_{\mu s,\nu s}(u) = (1-u)u^{s-1}, \quad \mu,\nu \in \mathbb{N}, \quad u \in (0,1),$$

или

$$\alpha_{\mu s,\nu s}(u) = \begin{cases} n^{-1}, & s \le n; \\ 0, & s > n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем

$$(1-u)\sum_{s=1}^{\infty} u^{s-1}\varphi\left(\left|\rho_{\mu s,\nu s}^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le K(1-u)\sum_{s=1}^{\infty} u^{s-1}\varphi\left(E_{\mu s,\nu s}(f)\right),$$

$$n^{-1}\sum_{s=1}^{n} \varphi\left(\left|\rho_{\mu s,\nu s}^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \le K n^{-1}\sum_{s=1}^{n} \varphi\left(E_{\mu s,\nu s}(f)\right)$$

соответственно для любого $x = \left(x^{(k)}, x^{(l)}\right) \in S^k \times S^l$.

Отметим, что аналогичные вопросы в случае тригонометрических рядов Фурье рассматривались в работах [4, 6].

1. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1987. – 356 с.
2. *Kogbeliantz E.* Recherches sur la summabilite des series ultraspheriques par la metode des moyennes arithmetiques // J. Math. Pures and Appl. – 1924. – **9**, № 3. – P. 107 – 187.
3. *Ласурия Р. А.* (φ, α)-сильная суммируемость рядов Фурье – Лапласа функций, непрерывных на сфере // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 656 – 665.
4. *Гоголадзе Л. Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1984. – 18 с.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
6. *Пачулия Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье. – Киев, 1987. – С. 9 – 50. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; № 1987.40).

Получено 19.05.2003