УДК 517.9

О. В. Солонуха (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider nonlinear equations of parabolic type in reflexive Banach spaces. We present sufficient conditions for the existence of solutions of equations of this sort. We apply methods of investigating the problems with pseudomonotone-type (on a subspace) operators. In addition, we consider a sufficient criterion in the Sobolev space $L_p\left(0, T; W_p^1(\Omega)\right)\cap L_2\left(0, T; L_2(\Omega)\right)$ for the case where an operator introduced with the use of functional coefficients belongs to the given class of operators. We also show that one can weaken the classical condition of the coercitivity.

Розглядаються нелінійні рівняння параболічного типу у рефлексивних банахових просторах. Наведено достатні умови існування розв'язків цих рівнянь. Застосовано методи дослідження задач із операторами псевдомонотонного (на підпросторі) типу. Крім того, розглянуто достатній критерій у соболевському просторі $L_p\left(0, T; W_p^1(\Omega)\right)\cap L_2\left(0, T; L_2(\Omega)\right)$, коли оператор, введений за допомогою функціональних коефіцієнтів, належить даному класу. Також показано можливість послабити класичну умову коерцитивності.

Введение. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$, ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $Q = (0, T)\times\Omega$, $\Gamma_T = (0, T)\times\partial\Omega$, $\nabla y = (\partial_1 y, \ldots \ldots, \partial_n y)$. Рассмотрим параболическую задачу с краевым условием типа Неймана:

$$\partial_t y(t, x) - \sum_{1\le i\le n}\partial_i a_i(t, x, y, \nabla y) + a_0(t, x, y, \nabla y) = f(t, x) \quad \text{п. в. на } Q, \tag{1}$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{на } \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\nu_A}(t, x) = \sum_{1\le i\le n} a_i(t, x, y, \nabla y)\cdot\cos(x_i, \nu) = g(t, x) \quad \text{п. в. на } \Gamma_T. \tag{3}$$

При некоторых условиях на a_i данной задаче можно поставить в соответствие интегральное уравнение в рефлексивном банаховом пространстве

$$X = L_p\left(0, T; W_p^1(\Omega)\right)\cap L_2(0, T; L_2(\Omega)), \quad p\in(1,\infty):$$

$$\int_Q \partial_t y\xi\, dx\, dt + \sum_{1\le i\le n}\int_Q a_i(t, x, y, \nabla y)\partial_i\xi\, dx\, dt +$$

$$+ \int_Q a_0(t, x, y, \nabla y)\xi\, dx\, dt = \int_Q f\xi\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} g\xi\, d\sigma\, dt \quad \forall\,\xi\in X, \tag{4}$$

которое можно получить из (1)–(3) интегрированием по частям. Элемент $y\in \in X$, имеющий производную по времени в смысле распределений, называют обобщенным решением задачи (1)–(3), если y удовлетворяет уравнению (4).

Удобство операторного подхода к исследованию параболических задач было отмечено еще в середине прошлого века, что привело к развитию теории операторно-дифференциальных уравнений (см. [1–5]). При этом, как и в случае стационарных задач, наибольшее применение получили операторы монотонного и псевдомонотонного типов. Развитие на протяжении десятилетий теории операторов псевдомонотонного типа дало удобные критерии принадлежности эллиптических операторов данному классу или подклассу [3, 6, 7]. Однако уже в те годы было отмечено, что ряд нелинейных параболических задач описываются с помощью операторов, не являющихся псевдомонотонными. Снять ограничение псевдомонотонности удалось в работе [3] благодаря классу радиально непрерывных операторов с $(X; W)$-полуограниченной вариацией. Заметим, *однако*, что критерии принадлежности оператора данному подклассу требуют дополнительных условий на гладкость коэффициентов (см. [8]). Заметим также, что на протяжении десятилетий теория псевдомонотонных операторов и теория операторов с полуограниченной вариацией развивались параллельно как независимые обобщения максимально монотонных операторов. В 80–90-е годы была уточнена связь между данными классами операторов (см. [9]). Как продолжение аналогии был введен класс псевдомонотонных на W операторов [10] и изучены его свойства, в частности свойство (M) на W. В данной работе показано, что теоремы существования решений операторно-дифференциальных уравнений справедливы для данного, более широкого, класса (см. п. 2), и приведены алгебраические критерии принадлежности отображения классу псевдомонотонных на W операторов (см. п. 3).

Второй вопрос, исследуемый в данной статье, — ослабление требования классической коэрцитивности. При этом использована методика, предложенная в [10] (см. теорему 2).

1. Постановка задачи и определения. Пусть V — рефлексивное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в некоторое гильбертово пространство $H \equiv H^*$, V^* — дуально сопряженное к V относительно H, $V \subset H \subset \subset V^*$. Обозначим через $S = [0, T]$ конечный временной интервал $(T < \infty)$ и введем

$$X = L_{p_0}(S; H) \cap L_{p_1}(S; V), \qquad X^* = L_{q_0}(S; H) + L_{q_1}(S; V^*),$$

$$p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1, \quad i = 0, 1, \quad 1 < p_1 \le p_0 < \infty.$$

Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{y \in X : \partial_t y \in X^*\}$$

с нормой

$$\|y\|_W = \|y\|_X + \|\partial_t y\|_{X^*},$$

где $\partial_t y$ — производная элемента $y \in X$ в смысле распределений $\mathcal{D}^*(S; V^*)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V^* \times V \to \mathbb{R}$ — каноническая двойственность относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в H. Для любых $f \in X^*$ и $\xi \in X$ положим

$$\langle f, \xi \rangle = \int_S \langle f(t), \xi(t) \rangle_V \, dt.$$

Если $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_{q_0}(S; H)$, $f_2 \in L_{q_1}(S; V^*)$, то

$$\langle f, \xi \rangle = \int_S (f_1(t), \xi(t)) \, dt + \int_S \langle f_2(t), \xi(t) \rangle_V \, dt.$$

Будем рассматривать эволюционное уравнение

$$\partial_t y + Ay = f, \quad y(0) = y_0, \tag{5}$$

где $f \in X^*$, $A : X \to X^*$, $y_0 \in H$.

Определение 1. *Оператор $A : X \to X^*$ ограничен, если образ ограниченного множества ограничен. Оператор A называется локально ограниченным, если для любого $y \in X$ существуют $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\|A\xi\|_{X^*} \le N$ для всех $\|\xi - y\|_X \le \varepsilon$. Будем говорить, что A квазиограничен* [2], *если для произвольных $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ таких, что $\langle Ay, y \rangle \le k_2$ для всех $\|y\|_X \le k_1$, существует $N > 0$, для которого $\|Ay\|_{X^*} \le N(k_1, k_2) < \infty$.*

Определение 2. *Оператор $A : X \to X^*$ называется:*

1) *обобщенно псевдомонотонным* [2], *если для произвольной последова-*

тельности $y_n \to y$ *слабо в* X, $Ay_n \to w$ *слабо в* X^* *такой, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0,$$

справедливо $w = Ay$ *и* $\langle Ay_n, y_n\rangle \to \langle w, y\rangle$;

2) *обобщенно псевдомонотонным на* W, *если для произвольной последовательности* $y_n \to y$ *слабо в* W, $Ay_n \to w$ *слабо в* X^* *при*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0$$

справедливо $w = Ay$ *и* $\langle Ay_n, y_n\rangle \to \langle Ay, y\rangle$ *(последнее может выполняться на подпоследовательности)*;

3) *монотонным, если* $\langle Ay_1 - Ay_2, y_1 - y_2\rangle \ge 0$ *для любых* $y_1, y_2 \in X$;

4) *максимально монотонным, если оператор является монотонным и его график не содержится в графике другого монотонного оператора*;

5) *деминепрерывным, если он непрерывен из сильной топологии* X *в слабую топологию* X^*;

6) *радиально непрерывным, если он деминепрерывен на произвольном аффинном подпространстве размерности* 1;

7) *оператором с* (X, W)*-полуограниченной вариацией, если для всех* $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \|y_n\|_X \le R)$ *существует непрерывная функция* C *такая, что*

$$\langle Ay_1 - Ay_2, y_1 - y_2\rangle \ge -C\left(R; \|y_1 - y_2\|'_W\right), \tag{6}$$

где $\tau^{-1}C(R, \tau h) \to 0$ *при* $\tau \to +0$ *для всех* $R, h > 0$, $\|\cdot\|'_W$ — *компактная полунорма относительно* $\|\cdot\|_W$ *и непрерывная относительно* $\|\cdot\|_X$.

Определение 3. *Оператор* $A : X \to X^*$ *имеет свойство* (M) *на* W, *если для произвольной последовательности* $y_n \to y$ *слабо в* W, $Ay_n \to w$ *слабо в* X^* *такой, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n\rangle \le \langle w, y\rangle,$$

справедливо $w = Ay$. *Оператор* $A : X \to X^*$ *имеет свойство* (S_+) *на* W, *если для произвольной последовательности* $y_n \to y$ *слабо в* W *из того, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0,$$

следует, что $y_n \to y$ *в* X.

Очевидно, что обобщенно псевдомонотонные на W операторы имеют свойство (M) на W. Напомним также, что локально ограниченные, обобщенно псевдомонотонные на W (обобщенно псевдомонотонные) операторы являются псевдомонотонными на W (псевдомонотонными) операторами (для ограниченных псевдомонотонных операторов данный факт доказан в [2], для остальных случаев доказательство аналогично). А радиально непрерывные операторы с (X, W)-полуограниченной вариацией являются локально ограниченными на W, квазиограниченными и обобщенно псевдомонотонными на W (см. лемму 4.2.4 [10] и предложение 4.2.2 [10]).

Определение 4. *Оператор* $A : X \to X^*$ *коэрцитивен, если*

$$\|y\|_X^{-1} \langle Ay, y\rangle \to \infty \quad \text{при} \quad \|y\|_X \to \infty.$$

2. Существование решения операторно-дифференциального уравнения.

Теорема 1. *Пусть* $A : X \to X^*$ — *локально ограниченный, квазиограничен-*

ный, коэрцитивный оператор, имеющий свойство (M) *на* W. *Тогда для любых* $y_0 \in H$ *и* $f \in X^*$ *задача* (5) *имеет решение* $y \in W$.

***Замечание* 1.** Как известно, $W \subset C(S; H)$ непрерывно и плотно, т. е. начальные условия в (5) имеют смысл.

Доказательство теоремы проведем по схеме, рассмотренной в [4, 10]. Напомним, что в [4] аналогичная теорема доказана для монотонных, радиально непрерывных операторов (теорема VI.1.1), а в [10] — для ограниченных, псевдомонотонных (теорема 4.2.1).

Для любых $t \in S$ обозначим

$$X_t = L_{p_1}(0, t; V) \cap L_{p_0}(0, t; H),$$

$$X_t^* = L_{q_1}(0, t; V^*) + L_{q_0}(0, t; H),$$

$$W_t = \left\{ y \in X_t : \partial_t y \in X_t^* \right\}.$$

Лемма 1. *Если* $A : X \to X^*$ — *квазиограниченный, коэрцитивный оператор, имеющий свойство* (M) *на* W, *то для каждого* $t \in S$ *сужение* $A_t : X_t \to X_t^*$ *является квазиограниченным, коэрцитивным оператором, имеющим свойство* (M) *на* W_t.

Доказательство. Пусть

$$y_t(\tau) = \begin{cases} y(\tau), & \tau \in [0, t]; \\ 0, & \tau \in (t, T]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\| y_t \|_X = \| y \|_{X_t}$ и $(Ay)(\tau) = (Ay_t)(\tau)$ для почти всех $\tau \in [0, t]$. Следовательно, из коэрцитивности оператора A получаем

$$\| y \|_{X_t}^{-1} \int_0^t \langle (Ay)(\tau), y(\tau) \rangle_V \, d\tau = \| y_t \|_{X_t}^{-1} \int_0^t \langle (Ay_t)(\tau), y_t(\tau) \rangle_V \, d\tau \to +\infty$$

при $\| y \|_{X_t} \to \infty$. Коэрцитивность A_t доказана.

Пусть теперь $y_n \to y$ слабо в W_t, $A_t y_n \to w$ слабо в X_t^* и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^t \langle (A_t y_n)(\tau), y_n(\tau) \rangle \, d\tau \le \int_0^t \langle w(\tau), y(\tau) \rangle \, d\tau.$$

Таким образом, для всех $\varphi \in X_t^*$ и $\psi \in X_t$ $\langle y_n, \varphi \rangle_{X_t} \to \langle y, \varphi \rangle_{X_t}$, $\langle \psi, \partial_t y_n \rangle_{X_t} \to \langle \psi, \partial_t y \rangle_{X_t}$. Тогда для любых $\varphi \in X^*$ и $\psi \in X$

$$\int_0^t \langle y_n(\tau), \varphi(\tau) \rangle_V \, d\tau = \int_0^t \langle y_{nt}(\tau), \varphi(\tau) \rangle_V \, d\tau = \langle y_{nt}, \varphi \rangle \to \langle y_t, \varphi \rangle,$$

$$\int_0^t \langle \partial_t y_n(\tau), \psi(\tau) \rangle_V \, d\tau = \int_0^t \langle \partial_t y_{nt}(\tau), \psi(\tau) \rangle_V \, d\tau = \langle \partial_t y_{nt}, \psi \rangle \to \langle \partial_t y_t, \psi \rangle,$$

т. е. $y_{nt} \to y_t$ слабо в W. А поскольку

$$\int_0^t \langle w(\tau), y(\tau) \rangle \, d\tau \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^t \langle (Ay_{nt})(\tau), y_{nt}(\tau) \rangle_V \, d\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_{nt}, y_{nt} \rangle,$$

вследствие свойства (M) на W оператора A получаем требуемую оценку $w = A_t y$.

Проверим квазиограниченность. Пусть $\|y\|_{X_t} \le k_1$, $\langle A_t y, y\rangle_{X_t} \le k_2$. Тогда $\langle Ay_t, y_t\rangle_X \le k_2$ для всех $\|y_t\|_X \le k_1$. В силу квазиограниченности A существует $N > 0$, для которого

$$\|Ay_t\|_{X^*} \le N(k_1, k_2) < \infty,$$

т. е. $\|A_t y\|_{X_t^*} \le N$.

Лемма доказана.

Рассмотрим $F(H)$ — совокупность всех конечномерных подпространств H, $\overline{\bigcup_{F\in F(H)} F} = H$. Обозначим $X_F = L_{p_0}(S; F)$, $X_F^* = L_{q_0}(S; F)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_F}$ — спаривание; $\langle f_F, \xi_F\rangle_{X_F} = \langle f, \xi_F\rangle$ для всех $\xi_F \in X_F$;

$$W_F := \left\{ y \in X_F : \partial_t y \in X_F^* \right\}$$

и определим оператор $A_F : X_F \to X_F^*$, действующий по правилу

$$\langle A_F y_F, \xi_F\rangle_{X_F} = \langle Ay_F, \xi_F\rangle \quad \forall\, \xi_F, \quad y_F \in X_F.$$

Задаче (5) поставим в соответствие систему конечномерных приближений

$$\partial_t y_F + A_F y_F = f_F, \quad y_F(0) = y_{F0} \in F, \tag{7}$$

где $y_{F0} \to y_0$ в H.

Лемма 2. *Пусть $A : X \to X^*$ локально ограничен и имеет свойство (M) на W. Тогда для произвольного конечномерного подпространства $F \subset H$ и $t \in S$ оператор $A_F : C([t, T]; F) \to X_F^*$ деминепрерывен (с точностью до подпоследовательностей).*

Доказательство, не нарушая общности, проведем для $t = 0$. Пусть $y_n \to y$ в $C([0, T]; F)$. Тогда в силу свойств вложения $y_n \to y$ в X_F и $y_n \to y$ слабо в W. Последнее получаем при переходе к пределу в тождестве

$$\langle y_n(t), \xi(t)\rangle_{X_F} - \langle y_n(s), \xi(s)\rangle_{X_F} = \int_s^t \langle y_n, \xi\rangle_F \, d\tau \, +$$

$$+ \int_s^t \langle \partial_t y_n(\tau), \xi(\tau)\rangle_F \, d\tau \quad \forall\, s, t \in S, \quad \xi \in W_F$$

(см. теорему IV.1.17 [4]). В силу сходимости $\{y_n\}$ в X существует N такое, что для локально ограниченного оператора A справедлива оценка $\|y_n - y\|_X \le \varepsilon$, $\|Ay_n\|_{X^*} \le M$ для всех $n \ge N$. Т. е. можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $Ay_m \to w$ слабо в X_F^*. Однако $\langle Ay_m, y_m\rangle \to \langle w, y\rangle$. Согласно свойству (M) на W $Ay = w$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Задача* (7) *имеет решение $y_F \in W_F$ для произвольного F, и последовательность $\{y_F\}$ ограничена в X и $C(S; H)$.*

Доказательство. Для любого F задача Коши (7) имеет решение y_F на $[0, t_1]$, что вытекает из следующего обобщения теоремы Каратеодори.

Лемма VI.1.3 [4]. *Пусть $b \in F$, $S_0 = [t_0, T]$, $S_b = \{\xi \in C(S_0; F) \mid \xi(t_0) = b\}$, $G : C_b \to L_{q_0}(S; F)$ — деминепрерывный оператор и*

$$\|G\xi\|_{L_{q_0}(S;\, F)} \le M \quad \forall\, \xi \in C_b.$$

При этих условиях в C_b разрешимо уравнение

$$\xi(t) = b - \int_{t_0}^{t} (G\xi)(\tau)\,d\tau \qquad \forall\, t \in S_0.$$

Продолжим доказательство леммы 3. Предположим сначала, что для $t_1 \in S$ и произвольного F задана функция $y_F \in L_{p_0}([0, t_1]; F)$ с $\partial_t y_F \in L_{q_0}([0, t_1]; F)$ такая, что

$$\partial_t y_F(t) + (A_F y_F)(t) = f_F(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0, t_1], \quad y_F(0) = y_{F0}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что для $t \in [0, t_1]$

$$\frac{1}{2}\left(\|y_F(t)\|_H^2 - \|y_{F0}\|_H^2\right) = \langle \partial_t y_F, y_F \rangle =$$

$$= \int_0^t \langle f(\tau) - (Ay_F)(\tau), y_F(\tau) \rangle_V \, d\tau.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\|y_F(t)\|_H^2 + \int_0^t \langle (Ay_F)(\tau), y_F(\tau) \rangle_V \, d\tau \le$$

$$\le \|f\|_{X^*} \|y_F\|_{X_{t_1}} + \frac{1}{2}\|y_{F0}\|_H^2.$$

Но в левой части находится неотрицательное слагаемое, а

$$\|y_F\|_{X_{t_1}}^{-1} \int_0^t \langle (Ay_F)(\tau), y_F(\tau) \rangle_V \, d\tau \to \infty \qquad \text{при} \qquad \|y_F\|_{X_{t_1}} \to \infty$$

в силу коэрцитивности A_t (лемма 1). Отсюда получаем оценку

$$\|y_F\|_{X_{t_1}} \le k_1, \qquad \|y_F\|_{C([0, t_1]; H)} \le k_2, \tag{9}$$

где k_1 и k_2 — не зависящие от t_1 и F постоянные. Более того,

$$\int_0^t \langle (Ay_F)(\tau), y_F(\tau) \rangle_V \, d\tau \le \|f\|_{X^*} k_1 + \frac{1}{2}\left(\|y_{F0}\|_H^2 + k_2\right) \le k_3.$$

В силу квазиограниченности оператора существует не зависящая от t_1 и F постоянная k_4 такая, что

$$\|Ay_F\|_{X_{t_1}^*} \le k_4. \tag{10}$$

Перейдем к доказательству существования решения задачи (7) для любого F. Пусть S_1 — множество таких t_1, для которых задача (8) имеет решение, принадлежащее $L_{p_0}(0, t_1; F)$. При этом не исключается случай, когда S_1 состоит из одной точки $t = 0$. S_1 может иметь вид $[0, t_0)$ или $[0, t_0]$. Первый случай невозможен, поскольку, как показано выше, $\|y_F\|_{C([0, t_1]; H)} \le k_2$. Таким образом, $S_1 = [0, t_0]$.

Покажем теперь, что предположение $t_0 < T$ также ведет к противоречию. Пусть $b = y(t_0)$ и

$$\xi(t) = \begin{cases} y_F(t), & 0 \le t \le t_0; \\ b, & t_0 < t \le T. \end{cases}$$

Поскольку оператор $A : X \to X^*$ локально ограничен, то оператор $A_F : C(S;$

$F) \to L_{q_0}(S; F)$ также локально ограничен. Поэтому существуют числа $\varepsilon > 0$ и M такие, что

$$\| A_F(y) - f_F \|_{L_{q_0}(S;\, F)} \le M,$$

если $\| y - \xi \|_{C(S;\, F)} \le \varepsilon$. Для любой функции $\eta \in C_b$ определим функцию $y \in C(S; F)$ по формуле

$$y(t) = \begin{cases} y_F(t), & 0 \le t \le t_0; \\ \eta(t), & t_0 < t \le T, \quad \| \eta(t) - b \|_F \le \varepsilon; \\ b + \varepsilon \dfrac{\eta(t) - b}{\| \eta(t) - b \|_F}, & t_0 < t \le T, \quad \| \eta(t) - b \|_F > \varepsilon. \end{cases}$$

Далее, определим оператор $G\colon C_b \to L_{q_0}(S_0; F)$, задаваемый соотношением

$$(G\eta)(t) = (A_F y - f_F)(t), \qquad t_0 \le t \le T.$$

Отображение $A_F\colon C(S; F) \to X_F^*$ деминепрерывно (лемма 2), а соответствие $\eta \to y$ непрерывно из C_b в $C(S; F)$. Очевидно, что

$$\| G(\eta) \|_{L_{q_0}(S;\, F)} \le M$$

для всех $\eta \in C_b$. Следовательно, все условия леммы VI.1.3 [4] выполнены, из чего следует разрешимость задачи

$$\eta(t) = b - \int_0^t (G\eta)(\tau)\, d\tau$$

на C_b. Поскольку $\eta(t_0) = b$, в достаточно малом интервале $t_0 \le t \le t_0 + \Delta$, $\Delta > 0$, выполняется неравенство $\| \eta(t) - b \|_F < \varepsilon$. Определенную на интервале $[0, t_0]$ функцию y_F теперь продолжим следующим образом:

$$y_F(t) = \eta(t) \quad \text{при} \quad t_0 < t \le t_0 + \Delta.$$

Тогда $(G\eta)(t) = (A_F y_F - f_F)(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ и

$$y_F(t) = b - \int_{t_0}^t (G\eta)(\tau)\, d\tau = y_{F0} - \int_0^t (A_F y_F - f_F)(\tau)\, d\tau.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$y_F(t_0) = b = y_{F0} - \int_0^{t_0} (A_F y_F - f_F)(\tau)\, d\tau.$$

Значит, существует принадлежащее $L_{p_0}(0, t_0 + \Delta; F)$ решение задачи (8). Это противоречит определению t_0. Продолжая этот процесс, получаем $t_0 = T$ и задача (8) имеет решение $y_F \in L_{p_0}(S; F)$.

Ограниченность множества $\{y_F\}$ в X непосредственно следует из оценки (9), а ограниченность $\{Ay_F\}$ в X^* — из (10).

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Для произвольного $\hat{F} \in F(H)$ определим множество

$$G_{\hat{F}} = \bigcup_{F \supset \hat{F}} \{y_F \in X_F : \partial_t y_F + A_F y_F = f_F,\ y_F(0) = y_{F0} \in F\}.$$

Как показано выше, данное множество непусто и ограничено в X и $C(S; H)$. Более того, для произвольных $F_1, \ldots, F_n \in F(H)$ и $F \in F(H)$ таких, что $F \supset \supset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, справедлива оценка $\varnothing \neq G_F \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_{F_i}$. Т. е. $\{\overline{G}_F^w\}$ — центрированная система, где $\overline{G}_F^w$ — минимальное выпуклое и замкнутое в слабой топологии X множество, содержащее G_F. Поскольку X рефлексивно и банахово, каждое ограниченное множество слабо предкомпактно (теорема Банаха – Алаоглу) и существует $y \in X$, принадлежащее пересечению

$$y \in \bigcap_{F \in F(X)} \{\overline{G}_F^w\},$$

и обобщенная последовательность $G_F \ni y_F \to y$ слабо в X. В силу ограниченности данной последовательности в $C(S; H)$ найдется подпоследовательность (не нарушая общности обозначим ее снова $\{y_F\}$), для которой $y_F(T) \to z$ слабо в H. Более того, в силу оценки (10) можно считать, что $Ay_F \to \kappa$ слабо в X^* (или перейдем к подпоследовательностям). Тогда, используя свойства интеграла Бохнера, для $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ и $h \in \tilde{F} \subset F$ получаем

$$\left(\int_S \varphi(t)\big(\partial_t y_F(t) + (Ay_F)(t)\big)\, dt, h \right) = \langle \partial_t y_F + Ay_F, \varphi h \rangle =$$

$$= \langle f, \varphi h \rangle = \left(\int_S \varphi(t) f(t)\, dt, h \right). \tag{11}$$

Поскольку $\partial_t y_F \to \partial_t y$ в $\mathcal{D}^*(S; V^*)$, из оценки (11) имеем

$$\langle \partial_t y(\varphi), h \rangle_V = \left\langle \int_S \varphi(t)(f(t) - \kappa(t))\, dt, h \right\rangle_V \qquad \forall h \in \bigcup_{F \in F(H)} F,$$

где $\partial_t y(\varphi)$ — действие распределения $\partial_t y \in \mathcal{D}^*(S; V^*)$ на элемент $\varphi \in \mathcal{D}(S)$. Отсюда

$$\partial_t y(\varphi) = \int_S (-\kappa(t) + f(t))\varphi(t)\, dt$$

в силу плотности вложения $V \subset \overline{\bigcup_{F \in F(H)} F}$, т. е. $\partial_t y = f - \kappa$ и $y \in W$. Далее, для любого $h \in \bigcup_{F \in F(H)} F$

$$\int_S \langle \partial_t y(\varphi), h \rangle_V\, dt = \int_S \langle f(t) - \kappa(t), (T-t)h \rangle_V\, dt =$$

$$= \lim_F \int_S \langle f(t) - (Ay_F)(t), (T-t)h \rangle_V\, dt = \lim_F \int_S \langle \partial_t y_F(t), (T-t)h \rangle_V\, dt =$$

$$= \lim_F \left\{ \int_S (y_F(t), h)\, dt - (y_0, Th) \right\} = \int_S (y(t), h)\, dt - (y_0, Th) =$$

$$= \int_S (y(T), (T-t)h)\, dt - (y(0) - y_0, Th).$$

Поскольку $\bigcup_{F\in F(H)} F$ плотно в H, то $y_0 = y(0)$. Соответственно для $h \in \in \bigcup_{F\in F(H)} F$ имеем также

$$(y(T)-y_0, h) = \int_S (\partial_t y(t), h)\,dt = \lim_F \int_S (\partial_t y_F(t), h)\,dt =$$
$$= \lim_F (y_F(T)-y_0, h) = (z-y_0, h).$$

Таким образом, $z = y(T)$.

Осталось показать, что $\kappa = Ay$. Это следует из свойства (M) на W, поскольку $y_F \to y$ слабо в W, $Ay_F \to \kappa$ слабо в X^* и

$$\lim_F \langle Ay_F, y_F\rangle = \lim_F \langle f-\partial_t y_F, y_F\rangle = \frac{1}{2}\lim_F\left(\|y_{F0}\|_H^2 - \|y_F(T)\|_H^2\right) + \langle f, y\rangle \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\|y_0\|_H^2 - \|y(T)\|_H^2\right) + \langle f, y\rangle = \langle f, y\rangle - \langle \partial_t y, y\rangle = \langle \kappa, y\rangle.$$

Теорема доказана.

Пусть $[\cdot]_V$ — некоторая полунорма на V. Положим

$$[y]_X^{p_1} = \int_0^T [y(\tau)]_V^{p_1}\,d\tau.$$

Очевидно, что $[y]_X$ — полунорма на X.

Теорема 2. *Теорема 1 сохранится, если вместо коэрцитивности оператора $A: X\to X^*$ выполнено следующее условие:*

существуют $p_2 > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda_0 > 0$ и $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $y \in X$

$$[y]_X + \lambda_0\|y\|_{L_{p_0}(S;H)} \ge \beta\|y\|_X,$$
$$\langle Ay, y\rangle + \lambda\|y\|^2_{L_{p_0}(S;H)} \ge \gamma[y]_X^{p_2} + \alpha. \tag{12}$$

Доказательство. Различие в доказательстве по сравнению с теоремой 1 заключается в получении оценки (9). Заметим, что для любого $t \in S$

$$[y]_{X_t} + \lambda_0\|y\|_{L_{p_0}(0,t;H)} \ge \beta\|y\|_{X_t},$$
$$\langle Ay, y\rangle_{X_t} + \lambda\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)} \ge \gamma[y]_{X_t}^{p_2} + \tilde{\alpha}, \tag{13}$$

где

$$[y]_{X_t} = \left(\int_0^t [y(\tau)]_V^{p_1}\,d\tau\right)^{1/p_1}$$

— полунорма на X_t. Поэтому, используя неравенства Коши и Юнга, с учетом (13) находим

$$\frac{1}{2}\|y_F(t)\|_H^2 + \gamma[y]_{X_t}^{p_2} \le \frac{1}{2}\|y_F(t)\|_H^2 + \langle Ay_F, y_F\rangle_{X_t} + \lambda\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)} - \tilde{\alpha} \le$$
$$\le \frac{1}{2}\|y_{F0}\|_H^2 + \langle f, y_F\rangle_{X_t} + \lambda\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)} - \tilde{\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|y_{F0}\|_H^2 + \frac{1}{\beta}\|f\|_{X_t^*}\Big([y]_{X_t} + \lambda_0\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)}\Big) +$$

$$+ \lambda\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)} - \tilde\alpha \le -\tilde\alpha + \frac{1}{2}\|y_{F0}\|_H^2 + \frac{\gamma}{2}[y_F]^{p_1}_{X_t} +$$

$$+ \frac{1}{q_2}\left(\frac{2}{\gamma p_2\beta}\right)^{q_2-1}\|f\|^{q_2}_{X_t^*} + \frac{1}{2\beta}\|f\|^2_{X_t^*} + \left(\frac{1}{2\beta}+\lambda\right)\|y\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)} \le$$

$$\le C_1 + \frac{\gamma}{2}[y_F]^{p_2}_{X_t} + C_2\|y_F\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)},$$

где

$$C_1 > \frac{1}{2}\|y_0\|_H^2 + \frac{1}{q_2}\left(\frac{2}{\gamma p_2\beta}\right)^{q_2-1}\|f\|^{q_2}_{X_t^*} + \frac{1}{2\beta}\|f\|^2_{X_t^*} - \tilde\alpha,$$

$$C_2 = \frac{1}{2\beta} + \lambda, \qquad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1.$$

Следовательно,

$$\|y_F(t)\|_H^2 + \gamma[y_F]^{p_2}_{X_t} \le 2C_1 + 2C_2\|y_F\|^2_{L_{p_0}(0,t;H)},$$

откуда в силу леммы Гронуолла

$$\|y_F(t)\|_H \le \sqrt{2C_1}\,e^{C_2 t},$$

т. е. $\|y_F(t)\|_H \le C_3$. Тогда $[y_F]_{X_t} \le C_4$ и $\|y_F\|_{X_t} \le C_5$. Поскольку $t \in S$ произвольно, требуемая оценка получена.

Теорема доказана.

3. Нестационарные задачи в частных производных с односторонними ограничениями. Вернемся к задаче (1) – (3) на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$. Пусть $\nabla y = (\partial_1 y, \ldots, \partial_n y)$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q'} = 1, \qquad p \in (2, \infty),$$

ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Кроме того, пусть функциональные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям.

A$_1$. *Условия роста.* Функции $a_i(t, x, y, \xi)$, $i = \overline{0, n}$, измеримы по $(t, x) \in Q$ и непрерывны по y, ξ для почти всех $(t, x) \in Q$ (условия Каратеодори). Кроме того, существуют $c > 0$, $h \in L_q(Q)$ такие, что

$$|a_i(t, x, \xi_0, \xi)| \le c \sum_{0 \le j \le n} |\xi_j|^{p-1} + h(t, x), \qquad i = \overline{0, n}.$$

A$_2$. *Условие сильной эллиптичности.* Для $(t, x) \in Q$, $y \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{1 \le i \le n} (a_i(t, x, y, \xi) - a_i(t, x, y, \eta))(\xi_i - \eta_i) > 0 \qquad \text{при } \xi \ne \eta.$$

A$_3$. *Условие коэрцитивности.* Существуют $c_0 > 0$, $g_1 \in L_1(Q)$ такие, что

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \xi)\xi_i + a_0(t, x, y, \xi)y \ge c_0\left(\sum_{1 \le i \le n} |\xi_i|^p + |y|^p\right) - g_1(t, x).$$

A$_{3'}$. *Условие частичной коэрцитивности.* Существуют $c_0 > 0$, $\lambda > 0$, $p_2 > 1$ и $g_1 \in L_1(Q)$ такие, что

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \xi)\xi_i + a_0(t, x, y, \xi) y + \lambda |y|^2 \ge c_0 \sum_{1 \le i \le n} |\xi_i|^{p_2} - g_1(t, x).$$

Покажем, что при данных условиях существует обобщенное решение. Сн чала заметим, что в силу условия A_1 интегральное равенство (4) задано ко ректно в пространстве

$$X = L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big) \cap L_2(0, T; L_2(\Omega)).$$

Поскольку при $p \ge 2$ $L_p(Q) \subset L_2(Q)$, запись упрощается. Ниже приведен доказательства для оператора в пространстве $X = L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big)$, $p \in [2, \infty$ Однако все результаты сохраняются и для случая $p \in (1; 2)$.

Введем оператор

$$A\colon L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big) \to \Big(L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big)\Big)^*$$

по формуле

$$\langle Ay, z\rangle = \int\limits_Q \sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \nabla y)\partial_i z \, dx\, dt + \int\limits_Q a_0(t, x, y, \nabla y) z \, dx\, dt$$

с учетом, что

$$\langle Ay, z\rangle_{\Gamma_T} = \int\limits_{\Gamma_T} \sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \nabla y)\cos(x_i, \nu) z \, d\sigma\, dt.$$

Лемма 4. *Пусть справедливо условие* A_1. *Тогда оператор*

$$A\colon L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big) \to \Big(L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big)\Big)^*$$

непрерывный и ограниченный.

Доказательство. Согласно оценке A_1

$$\left| \int\limits_Q \sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \nabla y)\partial_i z \, dx\, dt \right| \le \sum_{1 \le i \le n} \|\nabla z\|_{L_p(Q)} \|a_i(t, x, y, \nabla y)\|_{L_q(Q)} \le$$

$$\le C \|z\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} \Big(\|y\|^{p-1}_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|h\|_{L_q(Q)} \Big),$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_T} \sum_{1 \le i \le n} a_i(t, x, y, \nabla y)\cos(x_i, \nu) z \, d\sigma\, dt \right| \le$$

$$\le \sum_{1 \le i \le n} \|z\|_{L_p(\Gamma_T)} \|a_i(t, x, y, \nabla y)\|_{L_q(\Gamma_T)} \le$$

$$\le C^p_{\Gamma_T} \|z\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} \Big(\|y\|^{p-1}_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|h\|_{L_q(Q)} \Big),$$

$$\left| \int\limits_Q a_0(t, x, y, \nabla y) z \, dx\, dt \right| \le C \|z\|_{L_p(Q)} \Big(\|y\|^{p-1}_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|h\|_{L_q(Q)} \Big),$$

$$\langle Ay, z\rangle \le \gamma\Big(\|y\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))}\Big) \|z\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))},$$

где C_{Γ_T} — константа, зависящая от оценки нормы следа

$$\|\zeta\|_{L_p(\partial\Omega)} \le c_\Omega \|\zeta\|_{W_p^1(\Omega)}$$

(§ 2.2 [11]); $\gamma\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ — непрерывная функция. Ограниченность доказан Непрерывность следует из ограниченности, так как оператор является комп зицией линейного оператора дифференцирования и алгебраического оператора суперпозиции.

Лемма 5. *Пусть справедливы условия* A_1, A_3 (A_1, $A_{3'}$). *Тогда оператор*

$$A\colon L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big) \to L_q\big(0, T; (W_p^1(\Omega))^*\big)$$

коэрцитивен (*удовлетворяет условию* (12)).

Доказательство. Проинтегрируем условие A_3:

$$\langle Ay, y\rangle \ge c_0 \| y\|^p_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} - \| g_1\|_{L_1(Q)},$$

$$\| y\|^{-1}_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))}\langle Ay, y\rangle \to \infty \quad \text{при} \quad \| y\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} \to \infty.$$

Для случая $A_{3'}$ доказательство аналогично с $\beta = \lambda_0 = 1$, $\gamma = c_0$, $\lambda = 0$, $p_2 = p$.

Лемма доказана.

Введем вспомогательную функцию $H\colon Q\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ (см. [6]):

$$H(t, x, y, \xi, \eta) = \sum_{1\le i\le n} (a_i(t, x, y, \xi) - a_i(t, x, y, \eta))(\xi_i - \eta_i).$$

Лемма 6. *На произвольном ограниченном множестве* $|y| \le M$, $|\eta| \le M_1$ *справедлива оценка*

$$H(t, x, y, \xi, \eta) \ge c(t, x)|\xi - \eta|, \quad |\xi - \eta| \ge 1,$$

где функция $c(t, x)$ *неотрицательна для почти всех* $(t, x) \in Q$, *зависит от* M, M_1, *но не зависит от* $y, \eta \in \mathbb{R}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $r = |\xi - \eta|$. Тогда $\xi = \eta + r\zeta^0$, где $|\zeta^0| = 1$. Введем функцию $h(r) = H(t, x, \xi, \eta + r\zeta^0)$, все аргументы которой, кроме r, фиксированы. По определению

$$h(r) = \sum_{1\le i\le n} \big(a_i(t, x, y, \eta + r\zeta^0) - a_i(t, x, y, \eta)\big) r\zeta_i^0 =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \big(a_i(t, x, y, \eta + r\zeta^0) - a_i(t, x, y, \eta + \zeta^0)\big) r\zeta_i^0 +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \big(a_i(t, x, y, \eta + \zeta^0) - a_i(t, x, y, \eta)\big) r\zeta_i^0 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

По построению $\sigma_2 = rh(1)$. Пусть $\xi^0 = \eta + \zeta^0$, тогда

$$r\zeta^0 = \frac{r}{r-1}(\xi - \xi^0).$$

Т. е.

$$\sigma_1 = \sum_{1\le i\le n} \big(a_i(t, x, y, \xi) - a_i(t, x, y, \xi^0)\big)(\xi_i - \xi_i^0)\frac{r}{r-1} > 0,$$

если $r > 1$, вследствие условия A_2. Но тогда $\sigma_1 \ge 0$ для $r \ge 1$. Следовательно, $h(r) = \sigma_1 + \sigma_2 \ge rh(1)$, что можно записать так:

$$H(t, x, y, \eta, \xi) \ge |\xi - \eta| H(t, x, y, \eta, \eta + \zeta^0),$$

где $\xi = \eta + r\zeta^0$, $|\zeta^0| = 1$, $r \ge 1$. Введем константу

$$c(t, x) = \min_U H(t, x, y, \eta, \eta + \zeta^0),$$

$$U = \{|y| \le M, |\eta| \le M_1, |\zeta^0| = 1\},$$

с фиксированными M, M_1. Поскольку U ограничено и замкнуто, минимум достижим, кроме того, $c(t, x) > 0$ вследствие различия двух последних аргументов функции H.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть справедливы условия* A_1, A_2. *Тогда оператор*

$$A\colon L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big) \to \big(L_p\big(0, T; W_p^1(\Omega)\big)\big)^*$$

псевдомонотонный на W *(с точностью до подпоследовательностей) и имеет свойство* S_+ *на* W.

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0.$$

Вследствие ограниченности оператора образ $\{y_n\}$ ограничен в рефлексивном банаховом пространстве X^*, т. е. $Ay_n \to w$ слабо в X^* (с точностью до подпоследовательностей). Воспользуемся компактностью вложения $W \subset L_p(Q)$: $y_n \to y$ в $L_p(Q)$. Тогда

$$\langle Ay_n, y_n - y\rangle = \int_Q \sum_{1\le i\le n} a_i(t, x, y_n, \nabla y)\partial_i(y_n - y)\,dx\,dt \;+$$

$$+ \int_Q a_0(t, x, y_n, \nabla y_n)(y_n - y)\,dx\,dt \;+$$

$$+ \int_Q \sum_{1\le i\le n} (a_i(t, x, y_n, \nabla y_n) - a_i(t, x, y_n, \nabla y))\partial_i(y_n - y)\,dx\,dt.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, если $y_n \to y$ в $L_p(Q)$, так как функции a_i непрерывны по y и $\{a_i(t, x, y_n, \nabla y)\}$ ограничены в совокупности на $L_q(Q)$ (условие A_1), т. е. $a_i(\cdot, \cdot, y_n, \nabla y) \to a_i(\cdot, \cdot, y, \nabla y)$ в $L_q(Q)$ (лемма 1.1.3 [5]). Второе слагаемое

$$\left|\int_Q a_0(t, x, y_n, \nabla y_n)(y_n - y)\,dx\,dt\right| \le \|a_0(t, x, y_n, \nabla y_n)\|_{L_q(Q)} \|y_n - y\|_{L_p(Q)} \to 0,$$

если $y_n \to y$ в $L_p(Q)$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_Q H(t, x, y_n, y_n, y)\,dx\,dt = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0.$$

Но форма H положительна, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n - y\rangle = 0,$$

$$\langle Ay_n, y_n\rangle \to \langle w, y\rangle.$$

Одновременно мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} H(t, x, y_n, y_n, y) = 0$$

для почти всех $(t, x) \in Q$. Но согласно лемме 6 это означает, что $\partial_i y_n \to \partial_i y$ почти всюду на Q. Таким образом, вследствие непрерывности функций a_i по двум последним аргументам это возможно только при $Ay_n \to Ay$ слабо в X^*, $y_n \to y$ в X.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть справедливы условия* $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$ (A_1, A_2, $\mathrm{A}_{3'}$). *Тогда задача* (1) – (3) *имеет обобщенное решение.*

***Замечание* 2.** Условие A_1 можно уточнить в зависимости от отношения между p и n (см. [12], для эллиптических задач данное исследование приведено в [6]).

***Замечание* 3.** Аналогичное исследование можно провести для операторов порядка $2m$ (оценки для эллиптической задачи доказаны в [7]).

***Пример* 1.** Рассмотрим задачу

$$\partial_t y - \sum_{1 \le i \le n} \partial_i\left(|\partial_i y|^{p-2} \partial_i y\right) + c|y|^{p-2} y = f \quad \text{п. в. на} \quad Q,$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1 \le i \le n} |\partial_i y|^{p-2} \partial_i y \cos(x_i, \nu) = g \quad \text{п. в. на} \quad \Gamma_T, \tag{15}$$

где $c \ge 0$, $f \in L_q(Q)$, $g \in L_q(\Gamma_T)$. Заметим, что при $c = 0$ в задаче используется некоэрцитивный оператор. Однако условия теоремы 2 удовлетворены с $p_0 = p_1 = p > 2$, $\lambda = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, λ_0 и β определяются из свойств Ω, поскольку в силу регулярности границы

$$\|y\|^p_{L_p(\Omega)} \le C(n, p, \Omega)\left(\|\nabla y\|^p_{L_p(\Omega)} + \|y\|^p_{L_2(\Omega)}\right)$$

(следствие неравенства Фридрихса, см. лемму 2.1.36 [4]).

Задача имеет обобщенное решение.

***Пример* 2.** Рассмотрим задачу

$$\partial_t y - \sum_{1 \le i \le n} \partial_i\left(|\partial_i y|^{p-2} \partial_i y\right) +$$

$$+ c_1 \sum_{1 \le i \le n} |y|^{p-2} \partial_i y + c|y|^{p-2} y = f \quad \text{п. в. на} \quad Q,$$

с начально-краевыми условиями (14), (15), где $c \ge 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $f \in L_q(Q)$, $g \in$ $\in L_q(\Gamma_T)$. Обобщенное решение существует, несмотря на то, что второе слагаемое оператора может нарушать псевдомонотонность.

1. *Browder F. E.* Problèm non linéaries // Sémin. Math. Supér. – 1966. – № 15. – 153 p.
2. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces // J. Func. Anal. – 1972. – **11**, № 2. – P. 25 – 294.
3. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики // ВИНИТИ. – 1976. – **9**. – С. 5 – 130.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
6. *Лаптев Г. И.* Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с двойным вырождением // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**. – С. 1057 – 1068.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
8. *Солонуха О. В.* Про існування розв'язків параболічних варіаційних нерівностей із операторами монотонного типу // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2002. – № 1. – С. 152 – 161.
9. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с.
10. *Мельник В. С., Згуровский М. З.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – Киев: Наук. думка, 1999. – 630 с.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
12. *Солонуха О. В.* Про існування розв'язків параболічних рівнянь із операторами монотонного типу // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2001. – № 6. – С. 137 – 146.

Получено 24.04.2002