УДК 517.5

Б. В. Винницкий, В. Л. Шаран (Дрогобыч. пед. ун-т)

О НУЛЯХ, СИНГУЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ И МОДУЛЯХ УГЛОВЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

We obtain the description of the zeros, singular boundary functions, and modules of angular boundary values of the functions $f \not\equiv 0$ which are analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ and satisfy the condition

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+): |f(z)| \le c_1 \exp((\sigma + \varepsilon)|z|\,\eta(|z|)),$$

where $0 \le \sigma < +\infty$ is a given number and η is a positive function continuously differentiable on $[0; +\infty)$ and such that $t\eta'(t)/\eta(t) \to 0$ as $t \to +\infty$.

Отримано опис послідовностей нулів, сингулярних граничних функцій і модулів кутових граничних значень аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+): |f(z)| \le c_1 \exp((\sigma + \varepsilon)|z|\,\eta(|z|)),$$

де $0 \le \sigma < +\infty$ — задане число, η — додатна неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ функція, для якої $t\eta'(t)/\eta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Пусть η — положительная непрерывно дифференцируемая на $[0; +\infty)$ функция, для которой

$$\lim_{t \to +\infty} t\eta'(t)/\eta(t) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $A_\eta(\sigma)$ класс аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функций $f \not\equiv 0$, удовлетворяющих условию

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+): |f(z)| \le c_1 \exp((\sigma + \varepsilon)|z|\,\eta(|z|)), \tag{2}$$

где $0 \le \sigma < +\infty$ — заданное число.

В работе [1] получено описание нулей, а в работе [2] — сингулярных граничных функций функций из класса $A_\eta(\sigma)$. В работах [3, 4] указаны необходимые и достаточные условия того, чтобы аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция имела конечный формальный тип при заданном уточненном порядке. В настоящей работе будет получено параметрическое представление класса $A_\eta(\sigma)$ с точностью к сомножителю $\exp(cz)$, а также описание полных мер (по терминологии А. Ф. Гришина [4]) функций из класса $A_\eta(\sigma)$. Из приведенной ниже теоремы 1, которую можно рассматривать как аналог хорошо известного утверждения для аналитических и ограниченных в $\mathbb{C}_+$ функций, следуют, в частности, упомянутые выше результаты из [1, 2].

Теорема 1. *Для того чтобы существовала функция $f \in A_\eta(\sigma)$, для которой (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, является последовательностью нулей, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сингулярной граничной функцией и модули угловых предельных значений которой на*

$\partial\mathbb{C}_+$ почти всюду равны $|f(it)|$, необходимо и достаточно, чтобы функция h была невозрастающей с равной почти всюду нулю производной и

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \tag{3}$$

$$\ln|f(it)| \in L^1(-1;1), \qquad (\forall\varepsilon>0): f(it)e^{-(\sigma+\varepsilon)|t|\eta(|t|)} \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{4}$$

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists c_2>0)\,(\forall r\ge 1):\ C_0(r) \le \frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}\eta(r) + c_2, \tag{5}$$

где

$$C_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} + \frac{1}{2\pi}\int_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(|d\,h(t)| - \ln|f(it)|dt\right).$$

Заметим, что условие (5) является некоторым условием на согласованность поведения последовательности нулей, сингулярной граничной функции и модулей угловых предельных значений и это качественно отличает теорему 1 от ее аналога для аналитических и ограниченных в $\mathbb{C}_+$ [5, 6] функций, обобщенного в [7].

Пусть $z = x + iy = re^{i\varphi}$ и

$$W_n(z) = \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar\lambda_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\bar\lambda_n}\right), \qquad K(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{i(t^2+1)^2(t+iz)}.$$

Справедливость теоремы 1 следует из такого утверждения.

Теорема 2. *Пусть последовательность (λ_n) из $\mathbb{C}_+$, невозрастающая на $(-\infty;+\infty)$ функция h, производная которой равна нулю почти везде, и функция $f(it)$ удовлетворяют условиям (3)–(5). Тогда функция*

$$f(z) = e^{ia_0+a_1z}\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\bar\lambda_n}\prod_{|\lambda_n|>1}W_n(z)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,z)\left(\ln|f(it)|dt + dh(t)\right)\right), \tag{6}$$

где a_0, a_1 — действительные постоянные, аналитична в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяет условию

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists c_3>0)(\forall z\in\mathbb{C}_+): |f(z)| \le c_3\exp\left((\sigma+\varepsilon)|z|\,\eta(|z|)+c_3x\right), \quad x=\operatorname{Re}z, \tag{7}$$

при этом ее последовательность нулей, сингулярная граничная функция и модули угловых предельных значений совпадают соответственно с (λ_n), h и $|f(it)|$. Наоборот, если аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция $f\not\equiv 0$ удовлетворяет условию (7), то она представима в виде (6), где (λ_n) — последовательность нулей, h — сингулярная граничная функция, $f(it)$ — угловые предельные значения функции f, и выполняются условия (3)–(5).

Напомним, что сингулярная граничная функция аналитической и ограниченной в каждом полукруге $Q_R = \{z: |z|<R, \operatorname{Re}z>0\}$, $0<R<+\infty$, функции $f\not\equiv 0$ является невозрастающей на $(-\infty;+\infty)$ функцией h, которая определяется с точностью до аддитивной постоянной и значений в точках непрерывности равенством

$$h(t_2)-h(t_1) = \lim_{x\to+0}\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2}\ln|f(iy)|dy, \qquad t_1<t_2.$$

Ее производная равна нулю почти везде (см. [6, с. 23]).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма [6, с. 26].

Лемма 1. *Пусть аналитическая и ограниченная в каждом полукруге* Q_R *функция* $f\not\equiv 0$ *имеет нули в точках* $\lambda_n\in\mathbb{C}_+$. *Тогда для всех* $r\in[1;+\infty)$ *имеем*

$$\sum_{|\lambda_n|\le r}\operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \tag{8}$$

$$C_0(r) = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\cos\varphi\, d\varphi + c_4 + \frac{c_5}{r^2}, \tag{9}$$

где c_4, c_5 *— действительные постоянные, не зависящие от* r.

***Доказательство теоремы* 2.** Не уменьшая общности, считаем ± 1 точками непрерывности функции h. Пусть условия (3)–(5) выполнены. Из (4) следует, что

$$(\exists c_6>0):\ |f(it)| \le c_6\exp\left((\sigma+\varepsilon)|t|\,\eta(|t|)\right) \quad \text{для п. в.} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Поскольку $\ln|f|=\ln^+|f|-\ln^+|1/f|$, из (5), учитывая (4), получаем

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} + \frac{1}{2\pi}\int_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\ln^+\frac{1}{|f(it)|}dt+|d\,h(t)|\right) \le$$

$$\le \frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}\eta(r) + \frac{\sigma+\varepsilon}{\pi}\psi(r) + c_7,$$

где $\psi(r) := \int_1^r \eta(t)/t\,dt$. Кроме того, из (1) следует, что $\eta(r)\le c_8(\varepsilon)r^{\varepsilon}$ и $\psi(r)\le$ $\le c_9(\varepsilon)r^{\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$ при $r\ge r_0(\varepsilon)$. Поэтому при $r\ge r_0(\varepsilon)$ имеем

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} \le c_{10}(\varepsilon)r^{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$s_1(r) := \int_{1\le|t|\le r}\frac{1}{t^2}\ln^+\frac{1}{|f(it)|}dt \le \frac{4}{3}\int_{1\le|t|\le 2r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^+\frac{1}{|f(it)|}dt \le c_{11}(\varepsilon)r^{\varepsilon}, \tag{12}$$

$$s_2(r) := \int_{1\le|t|\le r}\frac{|d\,h(t)|}{t^2} \le \frac{4}{3}\int_{1\le|t|\le 2r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)|d\,h(t)| \le c_{12}(\varepsilon)r^{\varepsilon}. \tag{13}$$

Далее, из равенства

$$\int_{1\le|t|\le R}\frac{1}{|t|^3}\ln^+\frac{1}{|f(it)|}dt = \int_1^R\frac{d\,s_1(t)}{t} = \frac{s_1(R)}{R} + \int_1^R\frac{s_1(t)}{t^2}dt, \qquad 1<R<+\infty,$$

и (12) заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln^+|1/f(it)|}{1+|t|^3}dt < +\infty.$$

Поскольку $|\ln|f||=\ln^+|f|+\ln^+|1/f|$, учитывая (10), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln|f(it)||}{1+|t|^3}dt < +\infty. \tag{14}$$

Аналогично, используя (13), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\,h(t)|}{1+|t|^3}\,dt \;<\; +\infty. \tag{15}$$

Из (3) и (11) следует абсолютная и равномерная сходимость на каждом компакте из $\mathbb{C}_+$ произведений [6, с. 30; 1, с. 905], а из (14) и (15) — интегралов, входящих в (6). Поэтому нам осталось убедиться в справедливости оценки (7). Пусть

$$C(r) \;=\; \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}\;+$$

$$+\;\frac{1}{2\pi}\int_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\Big(\big((\sigma+\varepsilon)|t|\eta(|t|)+\ln c_6-\ln|f(it)|\big)dt\;+\;|d\,h(t)|\Big).$$

На основании (5) и (10) получаем

$$(\forall\varepsilon>0)\;(\exists c_{13}>0)\;(\forall r\ge 1):\;C(r)\;\le\;\frac{\sigma+\varepsilon}{\pi}\psi(r)+c_{13}. \tag{16}$$

Кроме того,

$$C(r)\;=\;\frac{1}{2\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)d\,h_1(t),$$

где

$$d\,h_1(t)\;=\;d\,s_3(t)+d\,h_2(t)-d\,h_2(-t),\qquad s_3(t)\;=\;2\pi\sum_{1<|\lambda_n|\le t}\operatorname{Re}\lambda_n,$$

$$d\,h_2(t)\;=\;-\,d\,h(t)+\big((\sigma+\varepsilon)\,|t|\,\eta(|t|)+\ln c_6-\ln|f(it)|\big)\,dt,$$

при этом функция h_2 не убывает на $(-\infty;+\infty)$. Пусть

$$f_1(z)\;=\;\frac{f(z)}{f_2(z)\exp(ia_0+a_1 z)}, \tag{17}$$

где

$$f_2(z)\;=\;\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,z)\big((\sigma+\varepsilon)|t|\eta(|t|)+\ln c_6\big)\,dt\right\}.$$

Поскольку

$$K(t,z)\;=\;-\frac{z}{t^2}+\frac{i}{t+iz}-\frac{it\left(t^2+2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}+\frac{z\left(2t^2+1\right)}{t^2\left(t^2+1\right)^2}, \tag{18}$$

учитывая, что функция $t\eta(t)$ не убывает на $[t_0;+\infty)$, при $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $r\ge$ $\ge r_0$ (это фактически показано в лемме 2 из [1]), имеем

$$\ln|f_2(z)|\;\le\;(\sigma+\varepsilon)\,r\eta(r)-\frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}x\psi(r)\,+\,c_{14}(\varepsilon)\,x. \tag{19}$$

Пусть $\lambda=1/\varepsilon$. Очевидно, можно считать, что $\lambda\ge 2$. Учитывая (18), получаем

$$\ln|f_1(z)|\;=\;\sum_{|\lambda_n|\le 1}\ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}\right|\;+\;\sum_{|\lambda_n|>1}\ln|W_n(z)|\;+$$

$$+\;\frac{x}{\pi}\int_{|t|\ge 1}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\right)dh_2(t)\;-\;\frac{x}{\pi}\int_{|t|\le 1}\frac{dh_2(t)}{|t+iz|^2}\;+$$

$$+\frac{x}{\pi}\int_{|t|\le 1}\frac{t^2\,dh_2(t)}{\left(t^2+1\right)^2}-\frac{x}{\pi}\int_{|t|\ge 1}\frac{\left(2t^2+1\right)dh_2(t)}{t^2\left(t^2+1\right)^2}\le$$

$$\le\sum_{1<|\lambda_n|\le\lambda r/2}\ln|W_n(z)|+\frac{x}{\pi}\int_{1\le|t|\le\lambda r/2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\right)dh_2(t)+$$

$$+\sum_{|\lambda_n|>\lambda r/2}\ln|W_n(z)|+\frac{x}{\pi}\int_{|t|\ge\lambda r/2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\right)dh_2(t)+c_{15}x. \tag{20}$$

Поскольку $(4x\operatorname{Re}\lambda_n)/\left|\overline{\lambda}_n+z\right|^2<1$, $z\ne\lambda_n$, $z\in\mathbb{C}_+$, используя неравенство $\ln(1-t)\le -t$, $t\in[0;1)$, при $1<|\lambda_n|\le\lambda r/2$ и $z\ne\lambda_n$, имеем

$$\ln|W_n(z)|=2x\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{4x\operatorname{Re}\lambda_n}{\left|\overline{\lambda}_n+z\right|^2}\right)\le$$

$$\le 2x\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}-\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{(|\lambda_n|+r)^2}\right)\le 2x\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{(\lambda r)^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Аналогично, при $1<|t|\le\lambda r/2$ и $z\in\mathbb{C}_+$ получаем

$$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\le\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(\lambda r)^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le\lambda r/2}\ln|W_n(z)|+\frac{x}{\pi}\int_{1\le|t|\le\lambda r/2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\right)dh_2(t)\le$$

$$\le 2x\sum_{1<|\lambda_n|\le\lambda r/2}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{(\lambda r)^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}+$$

$$+\frac{x}{\pi}\int_{1\le|t|\le\lambda r/2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(\lambda r)^2}\right)dh_2(t)\le 2xC(\lambda r). \tag{21}$$

Далее, учитывая, что при $z\in\mathbb{C}_+$, $t\ne 0$, $\lambda_n\ne 0$

$$\ln|W_n(z)|\le\frac{4xr(|\lambda_n|+r/2)\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2(|\lambda_n|+r)^2}\le\frac{4xr\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^3},$$

$$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\le\frac{2r(|t|+r/2)}{t^2(|t|+r)^2}\le\frac{2r}{|t|^3},$$

находим

$$\sum_{|\lambda_n|>\lambda r/2}\ln|W_n(z)|+\frac{x}{\pi}\int_{|t|\ge\lambda r/2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{|t+iz|^2}\right)dh_2(t)\le$$

$$\le 4xr\sum_{|\lambda_n|>\lambda r/2}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^3}+\frac{2xr}{\pi}\int_{|t|\ge\lambda r/2}\frac{dh_2(t)}{|t|^3}=\frac{2xr}{\pi}\int_{\lambda r/2}^{+\infty}\frac{dh_1(t)}{t^3}. \tag{22}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{a/2}^{a}\frac{dh_1(t)}{t^2}\le\frac{4}{3}C(2a),\qquad a\ge 2,$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda r/2}^{+\infty}\frac{d\,h_1(t)}{t^3} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{2^{j-1}\lambda r}^{2^j\lambda r}\frac{d\,h_1(t)}{t^3} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}\lambda r}\int\limits_{2^{j-1}\lambda r}^{2^j\lambda r}\frac{d\,h_1(t)}{t^2} \le \frac{8}{3\lambda r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}}C\left(2^j\lambda r\right). \tag{23}$$

Из (20) – (23), учитывая (16), при $|z| = r > 1$ имеем

$$\ln\left|f_1(z)\right| \le 2xC(\lambda r) + \frac{16x}{3\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}}C\left(2^j\lambda r\right) + c_{15}x \le$$

$$\le \frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}x\psi(\lambda r) + \frac{16(\sigma+\varepsilon)x}{3\pi\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\psi\left(2^j\lambda r\right)}{2^{j-1}} + c_{16}(\lambda)\,x. \tag{24}$$

Поскольку функция ψ удовлетворяет условию (1), для каждого $c > 0$ $\psi(ct)/\psi(t) \to 1$ при $t \to +\infty$ и $\psi(2t) \le 3\psi(t)/2$, $t \ge t_0 \ge 2$ [8, с. 15]. На основании этого для всех $r > 1$ и $\lambda \ge \lambda_0$ выполняется

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}}\psi\left(2^j\lambda r\right) \le 2\psi(\lambda r)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^j = 8\psi(\lambda r).$$

Таким образом, из (24) при $z \in \mathbb{C}_+$, $|z| = r > 1$, $\lambda \ge \lambda_0$ получаем

$$\left|f_1(z)\right| \le \exp\left(\frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}\left(1+\frac{64}{3\lambda}\right)x\psi(\lambda r) + c_{17}(\lambda)\,x\right).$$

Следовательно,

$$\left|f_1(z)\right| \le \exp\left(\frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}x\psi(r) + c_{18}(\varepsilon)\,x\right) \qquad r \ge r_0.$$

Поэтому из (17), (19) при $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $r \ge r_0$, имеем

$$\left|f(z)\right| \le \exp\left((\sigma+\varepsilon)r\eta(r) + c_{19}(\varepsilon)\,x\right).$$

Поскольку из (3) – (5) следует ограниченность функции f в каждом полукруге Q_{r_0}, из последнего неравенства получаем (7).

Пусть теперь аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция $f \not\equiv 0$ удовлетворяет условию (7). Тогда [6, с. 32] ее можно представить в виде (6), где λ_n — нули функции f, $f(it)$ — угловые предельные значения функции f, h — сингулярная граничная функция функции f, и выполняется условие (4). Далее из леммы 1 получаем (3) и (5).

Теорема доказана.

1. *Винницький Б. В., Шаран В. Л.* Про нулі аналітичних у півплощині функцій заданого уточненого формального порядку // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 904–909.
2. *Шаран В. Л.* Про сингулярні граничні функції деяких класів функцій, аналітичних у півплощині // Сучасні проблеми математики: Мат. Міжнар. наук. конф. Ч. 3. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 208–210.
3. *Гришин А. Ф.* Функции первого порядка, субгармонические в полуплоскости, и одна тауберова теорема // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – **53**. – С. 87–94.
4. *Гришин А. Ф.* Субгармонические функции первого порядка: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Харьков, 1992. – 30 с.
5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
6. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
7. *Vynnytskyi B. V., Sharan V. L.* On factorization of one class functions analytic in the half-plane // Мат. студ. – 2000. – **14**, № 1. – С. 41–48.
8. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 240 с.

Получено 10.09.2001,
после доработки — 25.03.2002