УДК 513.88

С. А. Кругляк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ФУНКТОРАХ КОКСТЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ИДЕМПОТЕНТАМИ

For an algebra generated by linearly connected idempotents, we present the construction of Coxeter functors on the category of algebra representations in the category of Banach spaces.

Для алгебри, породженої лінійно зв'язаними ідемпотентами, наведено конструкцію функторів Кокстера на категорії зображень алгебри в категорії банахових просторів.

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются алгебры

$$\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}} = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_n \;\middle|\; p_i^2 = p_i,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = e \right\rangle$$

над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Здесь $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, e — единица алгебры.

При некоторых ограничениях на константы α_i и при инволюции $p_i^* = p_i$ представления соответствующих $*$-алгебр изучались в работах [1 – 3]. При этом существенным инструментом для изучения $*$-представлений были функторы Кокстера, введенные в [4, 5].

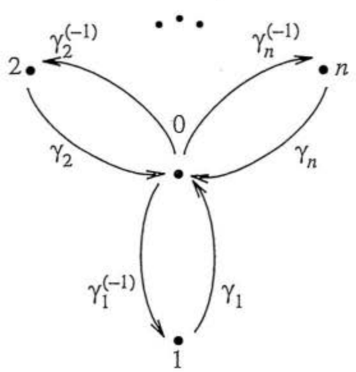
В [6] показано, что функторы Кокстера из работ [4, 5] индуцируются некоторыми гомоморфизмами алгебр, и приведено обобщение этих функторов на алгебры без инволюции.

В настоящей статье для алгебр $\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$ (без инволюции) приведена иная (см. [4, 5]) конструкция функторов Кокстера.

2. О связи между представлениями алгебр $\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$ и колчанов $Q_{n,\bar{\alpha}}$. Пусть для банаховых пространств H_1, H имеем линейные операторы $\Gamma_1\colon H_1 \to H$ и $\Gamma_1^{(-1)}\colon H \to H_1$ со свойством $\Gamma_1^{(-1)}\Gamma_1 = I_{H_1}$. Тогда $P = \Gamma_1\Gamma_1^{(-1)}$ — проектор в H $(P^2 = P)$, $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im}\Gamma_1$, $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}\Gamma_1^{(-1)}$, Γ_1 и $\Gamma_1^{(-1)}$ — соответственно инъективный и сюръективный операторы. Будем называть оператор $\Gamma_1^{(-1)}$ полуобратным к Γ_1 [7].

Наоборот, если P — проектор в пространстве H, $H_1 = \operatorname{Im} P$ и $\Gamma_1\colon H_1 \to H$ — естественное вложение, то существует единственный линейный оператор $\Gamma_1^{(-1)}\colon H \to H_1$ со свойствами $\Gamma_1^{(-1)}\Gamma_1 = I_{H_1}$, $\operatorname{Ker}\Gamma_1^{(-1)} = \operatorname{Ker} P$.

Пусть Q_n — колчан



(1)

и $\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$ — колчан (1) с соотношениями

$$\gamma_i^{(-1)}\gamma_i = \varepsilon_i, \quad i=1,\ldots,n; \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i\gamma_i^{(-1)} = \varepsilon_0, \tag{2}$$

где $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i\in\mathbb{C}$.

$\operatorname{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$ — категория представлений колчана $\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$ в категории $\mathcal{B}$ банаховых пространств.

Напомним, что если $\Pi\in\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$, то $\Pi(i)=H_i$, $i=0,\ldots,n$, — банаховы пространства, $\Pi(\gamma_i)=\Gamma_i\colon H_i\to H_0$ и $\Pi(\gamma_i^{-1})=\Gamma_i^{-1}\colon H_0\to H_i$ — ограниченные линейные операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma_i^{(-1)}\Gamma_i = I_{H_i}, \quad i=1,\ldots,n; \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Gamma_i\Gamma_i^{(-1)} = I_{H_0}, \tag{3}$$

I_{H_0}, I_{H_i} — единичные операторы соответственно в H_0 и H_i.

Морфизмами из $\operatorname{Hom}\left(\Pi,\tilde{\Pi}\right)$ в $\operatorname{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$ являются семейства операторов $\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$, $C_i\colon H_i\to\tilde{H}_i$ таких, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H_i \arrow[r, "\Gamma_i"] \arrow[d, "C_i"'] & H_0 \arrow[r, "\Gamma_i^{(-1)}"] \arrow[d, "C_0"'] & H_i \arrow[d, "C_i"] \\
\tilde{H}_i \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_i"'] & \tilde{H}_0 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_i^{(-1)}"'] & \tilde{H}_i
\end{tikzcd}$$

коммутативны, т. е.

$$C_0\Gamma_i = \tilde{\Gamma}_i C_i \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}_1^{(-1)} C_0 = C_i\Gamma_1^{(-1)}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует

$$C_i = \tilde{\Gamma}_1^{(-1)} C_0\Gamma_i \quad \text{и} \quad C_0 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{\Gamma}_i C_i\Gamma_1^{(-1)}. \tag{5}$$

В дальнейшем иногда будем опускать доказательства утверждений, так как они формально повторяют доказательства соответствующих утверждений из [4, 5] (с заменой Γ^* на $\Gamma^{(-1)}$), и аккуратно излагать процесс построения интересующих нас функторов.

Определим функтор $\mathcal{E}_{n,\bar{\alpha}}\colon \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}\to\operatorname{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$. Пусть $\pi\in\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$ — представление в пространстве H_0. Тогда, как показано выше, проектору $\pi(p_i)=P_i$ однозначно соответствует пара операторов Γ_i и $\Gamma_i^{(-1)}$, где Γ_i: $H_i\to H_0$, $\Gamma_i^{(-1)}\colon H_0\to H_i$, $i=1,\ldots,n$, и удовлетворяют соотношениям (3). Положим $\Pi(\gamma_i)=\Gamma_i$, $\Pi\left(\gamma_i^{(-1)}\right)=\Gamma_i^{(-1)}$, определив таким образом представление $\Pi\in\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar{\alpha}}$.

Пусть, по определению, $\mathcal{E}_{n,\bar{\alpha}}(\pi)=\Pi$, $\pi,\tilde{\pi}\in\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$ и C_0 — оператор, сплетающий представления π и $\tilde{\pi}$ (морфизм из π в $\tilde{\pi}$ в категории $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$), т. е. $C_0\colon H_0\to\tilde{H}_0$ и $C_0\pi(p_i)=\tilde{\pi}(p_i)C_0$ при $i=1,\ldots,n$. Положим $C_i=\tilde{\Gamma}_i^{(-1)}C_0\Gamma_i$, $C_i\colon H_i\to\tilde{H}_i$. Тогда, как легко проверить, семейство операторов

$\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ является морфизмом из представления $\mathcal{E}_{n,\bar\alpha}(\pi)=\Pi$ в представление $\mathcal{E}_{n,\bar\alpha}(\tilde\pi)=\tilde\Pi$ в категории $\mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}$. Пусть, по определению, $\mathcal{E}_{n,\bar\alpha}(C_0)=\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$. Можно проверить, что $\mathcal{E}_{n,\bar\alpha}$ сохраняет произведения морфизмов и тождественные морфизмы, т. е. является функтором.

Можно построить и „обратный" функтор

$$G_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}\to\mathrm{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar\alpha}.$$

Если $\Pi\in\mathrm{Ob\,Rep}\,\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}$ и $\Pi(\gamma_i)=\Gamma_i$, $\Pi\left(\Gamma_i^{(-1)}\right)=\Gamma_i^{(-1)}$, то определим представление $\pi=G_{n,\bar\alpha}(\Pi)$ алгебры $\mathcal{P}_{n,\bar\alpha}$ следующим образом: $\pi(p_i)=\Gamma_i\Gamma_i^{(-1)}$. Если $\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ — морфизм из представления Π в представление $\tilde\Pi$, то C_0 является морфизмом из представления π в представление $\tilde\pi$; положим, по определению, $G_{n,\bar\alpha}\left(\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}\right)=C_0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Функторы* $\mathcal{E}_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar\alpha}\to\mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}$ *и* $G_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}\to$ $\to\mathrm{Rep}\mathcal{P}_{n,\bar\alpha}$ *— функторы эквивалентности категорий.*

3. Функторы отражений Кокстера для колчанов $\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}$ и алгебр $\mathcal{P}_{n,\bar\alpha}$. Пусть $\bar\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i\in\mathbb{C}$, $\alpha_i\,\overline{\in}\,\{0,1\}$, $i=1,\ldots,n$. В этой ситуации определим функтор $\mathring{F}_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}\to\mathrm{Rep}\mathcal{Q}_{n,\bar 1-\bar\alpha}$, где $\bar 1-\bar\alpha=(1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n)$.

Пусть $\Pi\in\mathrm{Ob\,Rep}\,\mathcal{Q}_{n,\bar\alpha}$, $\Pi(i)=H_i$, $i=0,\ldots,n$, $\Pi(\gamma_j)=\Gamma_j$, $\Pi\left(\Gamma_j^{(-1)}\right)=\Gamma_j^{(-1)}$, $j=1,\ldots,n$.

Пусть, кроме того, $H^{(0)}=H_1\oplus H_2\oplus\ldots\oplus H_n$. Построим операторы $\Gamma^{(-1)}\colon$ $H^{(0)}\to H_0$ и $\Gamma\colon H_0\to H^{(0)}$:

$$\Gamma^{(-1)} = [\sqrt{\alpha_1}\,\Gamma_1,\ldots,\sqrt{\alpha_n}\,\Gamma_n]$$

и

$$\Gamma = \begin{bmatrix}\sqrt{\alpha_1}\,\Gamma_1^{(-1)}\\ \vdots\\ \sqrt{\alpha_n}\,\Gamma_n^{(-1)}\end{bmatrix}.$$

В записи операторов $\Gamma^{(-1)}$ и Γ $\sqrt{\alpha_i}$ обозначает одно и то же значение корня квадратного из комплексного числа α_i, для определенности, с наименьшим значением аргумента.

Поскольку $\Gamma^{(-1)}\Gamma=I_{H_0}$, то $\Gamma\Gamma^{(-1)}=P$ — проектор в $H^{(0)}$, и подпространство $\mathrm{Ker}\,P=\hat H_0\subset H^{(0)}$ однозначно определено.

Пусть

$$\Delta = \begin{bmatrix}\sqrt{1-\alpha_i}\,\Delta_1^{(-1)}\\ \vdots\\ \sqrt{1-\alpha_n}\,\Delta_n^{(-1)}\end{bmatrix}$$

— естественное вложение $\hat H_0$ в $H^{(0)}$, тогда оператор

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1}\,\Gamma_1^{(-1)} & \sqrt{1-\alpha_1}\,\Delta_1^{(-1)} \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_n}\,\Gamma_n^{(-1)} & \sqrt{1-\alpha_n}\,\Delta_n^{(-1)} \end{bmatrix},$$

$W\colon H_0 \oplus \hat{H}_0 \to H^{(0)}$, обратим и оператор $\Gamma^{(-1)}$ может быть расширен до обратного:

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1}\,\Gamma_1 & \ldots & \sqrt{\alpha_n}\,\Gamma_n \\ \sqrt{1-\alpha_1}\,\Delta_1 & \ldots & \sqrt{1-\alpha_n}\,\Delta_n \end{bmatrix}.$$

Из $WW^{-1} = I_{H_0}$ следует $\alpha_i \Gamma_i^{(-1)} \Gamma_i + (1-\alpha_i)\Delta_i^{(-1)}\Delta_i = I_{H_i}$, поэтому, учитывая (3), получаем

$$\Delta_i^{(-1)}\Delta_i = I_{H_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

что оправдывает введенные обозначения. Кроме этого

$$\sqrt{\alpha_i\alpha_j}\,\Gamma_i^{(-1)}\Gamma_j + \sqrt{(1-\alpha_i)(1-\alpha_j)}\,\Delta_i^{(-1)}\Delta_j = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, из $W^{-1}W = I_{H_0 \oplus \hat{H}_0}$ следует

$$\sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)\Delta_i \Delta_i^{(-1)} = I_{\hat{H}_0}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1-\alpha_i)\alpha_i}\,\Delta_i \Gamma_i^{(-1)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1-\alpha_i)\alpha_i}\,\Gamma_i \Delta_i^{(-1)} = 0. \tag{9}$$

Положим, по определению, $\mathring{F}_{n,\bar{\alpha}}(\Pi) = \mathring{\Pi}$, где $\mathring{\Pi}(i) = H_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathring{\Pi}(0) = \hat{H}_0$; $\mathring{\Pi}(\gamma_j) = \Delta_j$, $\mathring{\Pi}\left(\gamma_j^{(-1)}\right) = \Delta_j^{(-1)}$. Вследствие (6) и (8) $\mathring{\Pi} \in \mathrm{Ob\,Rep}\, Q_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}}$. Пусть $\Pi, \tilde{\Pi} \in \mathrm{Ob\,Rep}\, Q_{n,\bar{\alpha}}$ и $\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ — морфизм из Π в $\tilde{\Pi}$, т. е. выполняются соотношения (4). Тогда, используя соотношения (5), полагаем

$$\mathring{F}_{n,\bar{\alpha}}\left(\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}\right) = \{\mathring{C}_i\}_{i=\overline{0,n}},$$

где $\mathring{C}_i = C_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\mathring{C}_0 = \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)\tilde{\Delta}_i C_i \Delta_i^{(-1)}$. Можно проверить, что $\{\mathring{C}_i\}_{i=\overline{0,n}}$ — морфизм из представления $\mathring{\Pi}$ в представление $\mathring{\tilde{\Pi}}$ в категории $\mathrm{Rep}\, Q_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}}$, т. е.

$$C_0 \Delta_i = \tilde{\Delta}_i C_i \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}_i^{(i)} C_0 = C_i \Delta_i^{(-1)} \tag{10}$$

(см. также [4]).

Можно убедиться, что $\mathring{F}_{n,\bar{\alpha}}$ сохраняет произведение морфизмов и тождественные морфизмы, т. е. является функтором.

Легко видеть, что $\mathring{F}_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}} \circ \mathring{F}_{n,\bar{\alpha}} \simeq \mathrm{Id}$ и $\mathring{F}_{n,\bar{\alpha}} \circ \mathring{F}_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}} \simeq \mathrm{Id}$.

Пусть $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ и $A_n \neq 1$. В этой ситуации определим функтор $\dot{F}_{n,\bar{\alpha}}\colon \mathrm{Rep}\, Q_{n,\bar{\alpha}} \to \mathrm{Rep}\, Q_{n,\frac{\bar{\alpha}}{A_n-1}}$ следующим образом.

Пусть, как и ранее, $\Pi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar\alpha}$. Тогда $\Gamma_i\Gamma_i^{(-1)} = P_i$ — проектор в H_0. Пусть $\hat H_1 = \operatorname{Ker} P_i = \operatorname{Im}(I_0 - P_i)$. Построим разложение $I_{H_0} - P_i = B_i B_i^{(-1)}$, где $B_i^{(-1)}\colon H_0 \to \hat H_i$, $B_i\colon \hat H_i \to H_0$ и $B_i^{(-1)} B_i = I_{\hat H_i}$. Тогда $P_i = I_{H_0} - B_i B_i^{(-1)}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(I_{H_0} - B_i B_i^{(-1)}\right) = I_{H_0}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i B_i^{(-1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right) I_{H_0},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{A_n - 1} B_i B_i^{(-1)} = I_{H_0},$$

Положим, по определению, $\dot F_{n,\bar\alpha}(\Pi) = \dot\Pi$, где $\dot\Pi(i) = \hat H_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\dot\Pi(0) = H_0$, $\dot\Pi(\gamma_i) = B_i$, $\dot\Pi\left(\gamma_i^{(-1)}\right) = B_i^{(-1)}$. Тогда $\dot\Pi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,Q_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}}$.

Пусть $\Pi, \tilde\Pi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar\alpha}$ и $\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ — морфизм из представления Π в представление $\tilde\Pi$. Тогда согласно соотношениям (5) $C_i = \tilde\Gamma_i^{(-1)} C_0 \Gamma_i$. Положим, по определению, $\dot F_{n,\bar\alpha}\left(\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}\right) = \{\dot C_i\}_{i=\overline{0,n}}$, где $\dot C_0 = C_0$, а $\dot C_i = \tilde B_i^{(-1)} C_0 B_i$ при $i \in \overline{1,n}$. Можно показать, что $\{\dot C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ — морфизм из представления $\dot\Pi$ в представление $\dot{\tilde\Pi}$ категории $\mathrm{Rep}\,Q_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}}$ и $\dot F_{n,\bar\alpha}$ — функтор из категории $\mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar\alpha}$ в категорию $\mathrm{Rep}\,Q_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}}$. При этом $\dot F_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}} \circ \dot F_{n,\bar\alpha} \simeq \mathrm{Id}$ и $\dot F_{n,\bar\alpha} \circ \dot F_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}} \simeq \mathrm{Id}$. Можно показать, что построенные функторы являются функторами эквивалентности категорий. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. 1. *При* $\bar\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \,\overline{\in}\, \{0,1\}$, $\bar 1 - \bar\alpha = (1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha_n)$, *определен функтор эквивалентности категорий*

$$\mathring F_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar\alpha} \to \mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar 1-\bar\alpha},$$

$$\mathring F_{n,\bar\alpha} \circ \mathring F_{n,\bar 1-\bar\alpha} \simeq \mathrm{Id}, \qquad \mathring F_{n,\bar 1-\bar\alpha} \circ \mathring F_{n,\bar\alpha} \simeq \mathrm{Id}.$$

2. *При* $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\bar\alpha \neq \bar 0$, *определен функтор эквивалентности категорий*

$$\dot F_{n,\bar\alpha}\colon \mathrm{Rep}\,Q_{n,\bar\alpha} \to \mathrm{Rep}\,Q_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}},$$

$$\dot F_{n,\bar\alpha} \circ \dot F_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}} \simeq \mathrm{Id}, \qquad \dot F_{n,\frac{\bar\alpha}{A_n-1}} \circ \dot F_{n,\bar\alpha} \simeq \mathrm{Id}.$$

Рассмотрим функторы $\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} = E_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}} \circ \overset{\circ}{F}_{n,\bar{\alpha}} \circ G_{n,\bar{\alpha}}$ и $\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} = E_{n,\frac{\bar{\alpha}}{A_n-1}} \circ \dot{F}_{n,\bar{\alpha}} \circ$ $\circ\, G_{n,\bar{\alpha}}$. Из теорем 1 и 2 следует такая теорема.

Теорема 3. 1. *При* $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \overline{\in} \{0, 1\}$, *определен функтор эквивалентности категорий*

$$\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}\colon \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}},$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} \circ \overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}} \simeq \mathrm{Id}, \qquad \overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{1}-\bar{\alpha}} \circ \overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} \simeq \mathrm{Id}.$$

2. *При* $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$, *определен функтор эквивалентности категорий*

$$\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}\colon \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\frac{\bar{\alpha}}{A_n-1}},$$

$$\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} \circ \dot{\Phi}_{n,\frac{\bar{\alpha}}{A_n-1}} \simeq \mathrm{Id}, \qquad \dot{\Phi}_{n,\frac{\bar{\alpha}}{A_n-1}} \circ \dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}} \simeq \mathrm{Id}.$$

Функторы $\dot{F}_{n,\bar{\alpha}}$, $\overset{\circ}{F}_{n,\bar{\alpha}}$, $\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}$, $\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}$ будем называть функторами отражений Кокстера.

Если π — конечномерное представление алгебры $\mathcal{P}_{n,\bar{\alpha}}$ в пространстве H, $\pi(p_i) = P_i$ и $d_0 = \dim H$, $d_i = \dim \operatorname{Im} P_i$, $i = 1, \ldots, n$, то вектор $\vec{d} = (d_0; d_1, \ldots, d_n)$ будем называть обобщенной размерностью представления π. Функторы $\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}$, $\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}$ индуцируют отображения на множестве размерностей; обозначим эти отображения теми же символами. Легко проверить, что

$$\dot{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}(d_0; d_1, \ldots, d_n) = \left(-d_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i; d_1, \ldots, d_n\right),$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{n,\bar{\alpha}}(d_0; d_1, \ldots, d_n) = (d_0; d_0 - d_1, \ldots, d_0 - d_n).$$

1. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функцион. анализ и прил. – 2000. – **34**, вып. 4. – С. 91 – 93.
2. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда скалярный оператор представляется суммой проекторов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 939 – 952.
3. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **34**, вып. 3. – С. 30 – 35.
4. *Kruglyak S. A.* Coxeter functors for a certain class of ∗-quivers and ∗-algebras // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 4. – P. 49 – 58.
5. *Кругляк С. А.* Функторы Кокстера для одного класса ∗-колчанов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 6. – С. 789 – 797.
6. *Попович С. В., Самойленко Ю. С.* О гомоморфизмах алгебр, порожденных проекторами, и функторах Кокстера // Там же. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1224 – 1237.
7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

Получено 26.06.2003