УДК 515.14: 515.164.174

Е. П. Андриюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ОКРУЖНОСТИ

We consider the problem of extension of a continuous function defined on a circle to the interior of disk without critical points.

Розглядається проблема продовження неперервної функції, заданої на колі, у внутрішність круга без критичних точок.

Введение. Известно, что непрерывную функцию f, заданную на окружности, можно продолжить до гармонической функции во внутренность круга. Однако неизвестны условия, которые гарантировали бы продолжение f во внутрь круга до гармонической функции без критических точек.

Основной результат работы состоит в том, что при выполнении некоторых условий существует гомеоморфизм $h: S^1 \to S^1$ такой, что функция $g = f \circ h^{-1}$ продолжается во внутрь круга до гармонической функции без критических точек.

1. Функции высоты. Пусть f — непрерывная функция на окружности S^1. Введем ориентацию на S^1. Будем обозначать через p локальные максимумы, а через q локальные минимумы функции f.

Точка $P \in S^1$ является наибольшим (наименьшим) значением функции f, если для произвольного локального максимума p выполняется условие $f(p) \leq \leq f(P)$ (для произвольного локального минимума q — условие $f(q) \geq f(P)$); обозначим ее $M[m]$.

Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию (*), если существует разбиение окружности S^1 на две дуги l_1 и l_2 точками A и B такое, что $l_1 \cup l_2 = S^1$, $l_1 \cap l_2 = \{A, B\}$, $\{A, B\} \not\subset \{M, m\}$ $\forall M \in l_1$, $\forall m \in l_2$.

Лемма 1. *Пусть условие (*) не выполняется. Тогда существуют два наибольших значения (обозначим их M_1, M_2) и два наименьших (m_1, m_2) такие, что на окружности они располагаются в следующем порядке (с учетом ориентации и циклического порядка):* M_1, m_1, M_2, m_2.

Доказательство. Если указанное разбиение окружности S^1 не существует, то для произвольного разбиения окружности S^1 на две дуги l_1 и l_2 выполняется одно из следующих условий:

1) существуют дуга l_1' такая, что $l_1' \subset l_1$, $\partial l_1' \subset \{M\}$, и точка $m \in l_1'$; обозначим эту точку m через m_1;

2) существуют дуга l_2' такая, что $l_2' \subset l_2$, $\partial l_2' \subset \{m\}$, и точка $M \in l_2'$; обозначим эту точку M через M_1.

Точку ξ будем называть ближайшим справа (слева) локальным максимумом к точке ζ, если на промежутке $[\zeta, \xi)$ (или, соответственно, на промежутке $(\xi, \zeta])$ локальные максимумы не существуют, а на $[\xi, \xi + \varepsilon)$ (или, соответственно, на $(\xi - \varepsilon, \xi])$ для любого $\varepsilon > 0$ они существуют.

Точку ξ будем называть ближайшим справа (слева) локальным минимумом к точке ζ, если на промежутке $[\zeta, \xi)$ (или, соответственно, на промежутке $(\xi, \zeta])$ локальные минимумы не существуют, а на $[\xi, \xi + \varepsilon)$ (или, соответственно, на $(\xi - \varepsilon, \xi])$ для любого $\varepsilon > 0$ они существуют.

Рассмотрим первый случай. Найдем ближайшие справа и слева к точке m_1 наибольшие значения M (обозначим их M_1 и M_2), т. е. будем рассматривать дугу L_1 такую, что $\partial L_1 = \{M_1; M_2\}$ и не существует M такое, что $M \subset \subset \operatorname{Int}(L_1)$, причем $m_1 \in L_1$.

Если все наименьшие значения функции f лежат на L_1, то разбиение, указанное в условии леммы, существует всегда. Поэтому существует $m \notin L_1$. Обозначим это наименьшее значение через m_2. Таким образом, мы указали наибольшие и наименьшие значения функции f, которые расположены на окружности S^1 в следующем порядке: M_1, m_1, M_2, m_2 (с учетом циклического порядка).

Рассмотрим второй случай. Найдем ближайшие к M_1 наименьшие значения m (обозначим их m_1 и m_2), т. е. будем рассматривать дугу L_2 такую, что $\partial L_2 = \{m_1; m_2\}$ и не существует m такое, что $m \subset \operatorname{Int}(L_2)$, причем $M_1 \in L_2$.

Если все наибольшие значения функции f лежат на L_2, то разбиение, указанное в условии леммы, существует всегда. Поэтому существует $M \notin L_2$. Обозначим эту точку M_2. Таким образом, мы снова указали M_1, m_1, M_2, m_2 (с учетом циклического порядка).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $Q = \{m \leq y \leq M\}$, L_1 *и* L_2 — *жордановы дуги,* $L_1 \subset Q$, $L_2 \subset Q$, *и выполняются следующие условия:*

1) $\partial L_1 = \partial L_2 = \{a\} \cup \{b\}$, $a \neq b$, $a, b \in \{y = M\}$;

2) $L_1 \cap \{y = m\} \neq \varnothing$;

3) $L_2 \cap \{y = m\} \neq \varnothing$.

Тогда $L_1 \cap L_2 \supset \{a\} \cup \{b\}$, $L_1 \cap L_2 \neq \{a\} \cup \{b\}$.

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[a, b]$. Обозначим его I. Тогда $L_1 \cup I \cong S^1$ — замкнутая жорданова кривая. Согласно теореме Жордана она ограничивает диск, т. е. $f(L_1) \cup I = \partial D$. Обозначим $Q^* := Q \setminus D$. Из условий 1 и 2 леммы следует, что Q^* не является линейно связной. $L_2 \not\subset Q^*$, поскольку в этом случае L_2 не является жордановой дугой. Возможны два случая:

1′) $L_2 \cap \operatorname{Int} Q \supset \{a\} \cup \{b\}$, $L_2 \cap \operatorname{Int} Q \neq \{a\} \cup \{b\}$, $L_2 \cap \operatorname{Int} D \neq \varnothing$

или

2′) $L_2 \subset D$.

В первом случае $\partial L_2 = \{a\} \cup \{b\}$, $Q^* \cap D = L_1$. Тогда $\operatorname{Int} D \cap \operatorname{Int} Q^* = \varnothing$, но $L_2 \in \operatorname{Int} D$, $L_2 \in \operatorname{Int} Q^*$, причем $\partial D \cap \partial Q^* \neq \varnothing$, $\partial D \cap \partial Q^* = L_1$. Отсюда следует, что существует $d \in L_1$, $d \notin \{a\} \cup \{b\}$ такое, что $(L_1, L_2) \supset d$.

Во втором случае $C := L_1 \cap \{y = m\}$, тогда согласно условиям 2, 3 леммы существует $c \in C$ такое, что $L_2 \cap \{y = m\} = c$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует функция* $k\colon [t^*, c] \to [f(t^*), f(c)]$, $k(t^*) = f(t^*)$, $k(c) = f(c)$, *такая, что выполняются следующие условия:*

1) *функция* k *непрерывна;*

2) k *монотонно возрастает;*

3) $\forall\, t \in (t^*, c) : k(t) \leq f(t)$.

Доказательство. Построим функцию k, которая удовлетворяет всем указанным условиям: $k(t^*) := f(t^*)$, $k(c) := f(c)$,

$$k = \begin{cases} f(t^*), & x \in [t_0, c]; \\ t, & t \in \left[f(t^*), f(c)\right], \; x = c, \end{cases}$$

k непрерывна, монотонно возрастает и для любого $t \in [t^*, c]$ $k(t) \le f(t)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Существует функция* $j: [c, l^*] \to [f(c), f(l^*)]$, $j(c) = f(c)$, $j(l^*) = f(l^*)$, *такая, что выполняются следующие условия:*

1) *функция* j *непрерывна;*

2) j *монотонно возрастает;*

3) $\forall\, t \in (c, l^*) : j(t) \ge f(t)$.

Теорема 1. *Вложение* $\varphi: S^1 \to R^2$ *такое, что* $\pi \circ \varphi = f$, π *— функция проекции, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* $(*)$.

***Замечание* 1.** Пусть $S^1 \subset R^3$. Функцию проекции $\pi: S^n \to R^1$, $n \ge 2$, будем называть функцией высоты. Все используемые определения и термины можно найти в [1, 2].

Доказательство. *Необходимость.* Доказательство проводим методом от противного. Пусть существует вложение $\varphi: S^1 \to R^2$: $\pi \circ \varphi = f$, но не существует указанного разбиения. Тогда для произвольного разбиения окружности S^1 на дуги l_1 и l_2 точками A и B такого, что $l_1 \cup l_2 = S^1$, $l_1 \cap l_2 = \{A, B\}$, $\{A, B\} \not\subset \{M, m\}$, существует дуга l_i, $i = 1, 2$ (будем обозначать эту дугу через L) такая, что существуют $M \in L$ и $m \in L$.

Из леммы 1 следует, что существует дуга L такая, что $\varphi(\partial L) = M$, $\varphi(L \setminus \partial L) < M$, $\varphi(L) \cap m \ne \{\varnothing\}$. Согласно условию теоремы существует вложение $\varphi: S^1 \to R^2$, $\pi \circ \varphi = f$, $\pi: R^2 \to R^1$.

Из лемм 1 и 2 следует доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть существует указанное разбиение окружности S^1 на дуги l_1 и l_2. Дуга l_1 содержит все наибольшие значения и ни одного наименьшего значения. Разрежем окружность S^1 по одной из точек A или B, которые разбивают ее на дуги l_1 и l_2, и рассмотрим отображение $g: S^1 \to [a, b]$, $f(a) = f(b)$, $g(l_1) := L_1$. Построим график функции $y = f(x)$, $x \in L_1$ (рис. 1). В рассматриваемом случае или точка $a \in L_1$, или точка $b \in L_1$. Без ограничения общности можем считать, что точка $a \in L_1$. Введем ориентацию на S^1. Точки на графике будем отмечать соответственно ориентации.

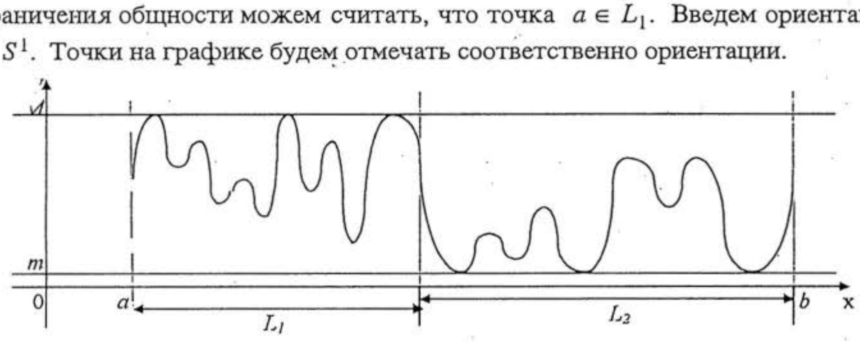

Рис. 1

Обозначим $\partial L_1 = \{a; c\}$, $\partial L_2 = \{b; c\}$ и рассмотрим дугу l_2, которая содержит все наименьшие значения и ни одного наибольшего значения. Обозначим $g(l_2) := L_2$. Построим график функции $y = f(x)$, $x \in L_2$ (рис. 1), затем вложение $\varphi: S^1 \to R^2$: $\pi \circ \varphi = f$. На дуге L_1 рассмотрим ближайшее наибольшее значение к точке c (обозначим его m_c) и сужение функции f на отрезок $[M_c, m_c]$.

Функция f отображает отрезок $[M_c, c]$ в R. Пусть существует $t \in [M_c, c]$ такое, что $f(t) < f(c)$, т. е. существует точка, в которой значение функции f меньше $f(c)$. Проведем прямую $b = f(t)$, где $f(t) < f(c)$. Обозначим $T = \{x \in \in X, f(t) \cap f(x) \neq \varnothing\}$, $T \neq \varnothing$, поскольку $t \in T$.

Будем называть ближайшей видимой слева точкой точку $t_0 \in T$ такую, что на (t_0, c) не существует других $x \in T$. Выберем такую точку t^*, чтобы на промежутке (t^*, t_0) не было локальных минимумов функции f, а на $(t^* - \varepsilon, t_0)$, $\varepsilon > 0$, они были, и рассмотрим $f(t^*)$.

Пусть $Q_1 = \{(x, y), x \in (t_0, c); y \geq f(x)\}$. Из леммы 3 следует, что существует Q_1^* — минимальная выпуклая оболочка, которая содержит Q_1 (рис. 2).

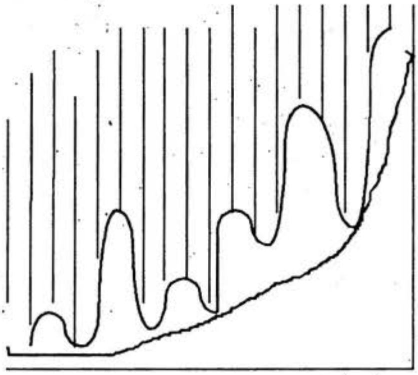

Рис. 2

Рассмотрим теперь $f\colon [c, m_c] \to R$. Пусть существует $t^0 \in (c, m_c)$ такое, что $f(t^0) > f(c)$, т. е. существует точка, в которой значение функции f больше $f(c)$. Проведем прямую $y = f(t^0)$, где $f(t^0) > f(c)$. Обозначим $T^0 = \{x \in X, f(t^0) \cap f(x) \neq \varnothing\}$, $T^0 \neq \varnothing$, поскольку $t^0 \in T^0$.

Будем называть ближайшей видимой справа точкой точку $l \in T^0$ такую, что на (c, l) не существует других $x \in T^0$. Выберем такую точку l^*, чтобы на промежутке (l, l^*) не было локальных максимумов функции f, а на $(l^*, l^* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ они были, и рассмотрим $f(l^*)$.

Пусть $Q_2 = \{(x, y), x \in (c, l^*), y \leq f(x)\}$. Из леммы 4 следует, что существует Q_2^* — минимальная выпуклая оболочка, которая содержит Q_2.

Рассмотрим функцию ψ на $[a, b]$:

$$\psi = \begin{cases} f(x), & x \in [a, t^*) \cup (l^*, b]; \\ \left(Q_1^* \setminus \mathrm{Int}_1^*\right) \cup \left(Q_2^* \setminus \mathrm{Int}_2^*\right), & x \in [t^*, l^*]. \end{cases}$$

На (t^*, l^*) разрежем график функции ψ в любой точке (обозначим ее t_1).

***Замечание* 2.** Возможна ситуация, когда точка t^* совпадает с точкой c, или точка l^* — с точкой c, или одновременно совпадают t^*, l^* и c. В последнем случае точка t_1 будет совпадать с точкой c.

Выберем на L_2 наименьшее значение, ближайшее к точке b (обозначим его m_b). Если на промежутке $[m_b, b]$ существуют локальные максимумы p такие, что $\psi(p) > \psi(a)$, то выбираем из них ближайший к точке m_b (обозначим его p^0). Затем рассматриваем отрезок $[m_b, p^0]$. Если на этом отрезке нет ни одного такого локального максимума, то переходим к отрезку $[m_b, b]$. На отрезке $[m_b, p^0]$ (или, соответственно, $[m_b, b]$ во втором случае) выбираем точку, значение функции f в которой совпадает с $\psi(a)$, и разрезаем в ней график. Обозначим эту точку t_2. Переносим отрезанную часть графика вправо, т. е. теперь $y = \psi(x)$, $x \in [t_2, b]$, превращается в $y = \psi(x)$, $x \in [a - (b - t_2), a]$. Эта операция не изменяет значений функции ψ, поскольку $a = b$. Поэтому рассматриваем график функции $y = \psi(x)$, $x \in [a - (b - t_2); t_2]$. Обозначим ближайшее наибольшее значение к точке a на L_1 через M_a.

Следующий шаг: отображаем зеркально график функции $y = \psi(x)$, $x \in [t_1; t_2]$ относительно оси $x = (t_2 - t_1)/2$ (это делаем для того, чтобы порядок следования максимумов и минимумов функции ψ не изменялся при построении вложения). Получим функцию $y = \psi(-x + (t_1 + t_2))$, $x \in [t_1; t_2]$.

Таким образом,

$$y = \begin{cases} \psi(x), & x \in [a - (b - t_2); t_1]; \\ \psi(-x + (t_1 + t_2)), & x \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

$$\psi_1 := \psi(-x + (t_1 + t_2)), \quad x \in [t_1; t_2] \Rightarrow y = \begin{cases} \psi(x), & x \in [a - (b - t_2); t_1]; \\ \psi_1(x), & x \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

$\psi(t_1) = \psi(t_2) = \psi(a)$, функция ψ непрерывна.

„Подставляем" график функции ψ_1 на $[t_1; t_2]$ под график функции ψ на $[a - (b - t_2); t_1]$. Выполним это следующим образом: рассмотрим как угодно маленькую окрестность точки $M_a : (M_a - \varepsilon_1; M_a + \varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 > 0$, и отрезок $[a - (b - t_2);\ M_a - \varepsilon_1]$. Найдем на этом отрезке наименьший локальный минимум функции ψ. Обозначим его $q_{\text{мал}}$. Точку, которая соответствует ему на оси абсцисс, тоже обозначим через $q_{\text{мал}}$, т. е. $\forall\ q \in [a - (b - t_2); M_a - \varepsilon_1] : \psi(q) \geq \psi(q_{\text{мал}})$. Если таких локальных минимумов несколько, то выберем из них ближайший к точке a.

Рассмотрим окрестности $(m_c - \varepsilon_2; m_c + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 > 0$; $(m_b - \varepsilon_3; m_b + \varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 > 0$; $(t_1 - \varepsilon_4; t_1 + \varepsilon_4)$, $\varepsilon_4 > 0$; ε_2, ε_3, ε_4 — как угодно малые.

Построим функцию $g : [t_1, t_2] \to [a - (b - t_2); t_1]$, которая отображает отрезки так:

$[t_1; m_c - \varepsilon_2] \ \to \ [a - (b - t_2); a - (b - t_2) + n_1]$, $n_1 > 0$, n_1 — как угодно малое;

(1)

$$[m_c - \varepsilon_2; m_c] \ \to \ [a - (b - t_2) + n_1; q_{\text{мал}}], \tag{2}$$

$$[m_c; m_c + \varepsilon_2] \ \to \ [q_{\text{мал}}; M_a - \varepsilon_1], \tag{3}$$

$$[m_c + \varepsilon_2; m_b - \varepsilon_3] \ \to \ [M_a - \varepsilon_1; M_a + \varepsilon_1], \tag{4}$$

$$[m_b - \varepsilon_3; m_b + \varepsilon_3] \ \to \ [M_a + \varepsilon_1; t_1 - \varepsilon_4], \tag{5}$$

$$[m_b + \varepsilon_3; t_2] \ \to \ [t_1 - \varepsilon_4; t_1]. \tag{6}$$

Функция g задается следующим образом:

$$g(x) = \left[\frac{n_1}{m_c - \varepsilon_2 - t_1}\right]^* x - \left(\frac{n_1 t_1}{(m_c - \varepsilon_2 - t_1) - (a - (b - t_2))}\right), \ x \in [t_1; m_c - \varepsilon_2], \tag{1'}$$

$$g(x) = \left[\frac{a-(b-t_2)+n_1-q_{\text{мал}}}{\varepsilon_2}\right]^* x -$$

$$-\left\{\left[\frac{a-(b-t_2)+n_1-q_{\text{мал}}}{\varepsilon_2}\right]^*(m_c-\varepsilon_2)-(a-(b-t_2)+n_1)\right\}, \tag{2′}$$

$$x\in[t_1; m_c-\varepsilon_2]; \quad x\in[m_c-\varepsilon_2; m_c],$$

$$g(x) = \left[\frac{q_{\text{мал}}-(M_a-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2}\right]^* x - \left\{\left[\frac{q_{\text{мал}}-(M_a-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2}\right]^* m_c - q_{\text{мал}}\right\},$$

$$x\in[m_c; m_c+\varepsilon_2], \tag{3′}$$

$$g(x) = \left[\frac{2\varepsilon_1}{m_b-\varepsilon_3-(m_c+\varepsilon_2)}\right]^* x -$$

$$-\left\{\left[\frac{2\varepsilon_1}{m_b-\varepsilon_3-(m_c+\varepsilon_2)}\right]^*(m_c+\varepsilon_2)-(M_a-\varepsilon_1)\right\}, \quad x\in[m_c+\varepsilon_2; m_b-\varepsilon_3], \tag{4′}$$

$$g(x) = \left[\frac{t_1-\varepsilon_4-(M_a+\varepsilon_1)}{2\varepsilon_3}\right]^* x -$$

$$-\left\{\left[\frac{t_1-\varepsilon_4-(M_a+\varepsilon_1)}{2\varepsilon_3}\right]^*(m_c-\varepsilon_3)-(M_a+\varepsilon_1)\right\}, \quad x\in[m_b-\varepsilon_3; m_b+\varepsilon_3], \tag{5′}$$

$$g(x) = \left[\frac{\varepsilon_4}{t_2-(m_b+\varepsilon_3)}\right]^* x -$$

$$-\left\{\left[\frac{\varepsilon_4}{t_2-(m_b+\varepsilon_3)}\right]^*(m_b+\varepsilon_3)-(t_1-\varepsilon_4)\right\}, \quad x\in[m_b+\varepsilon_3; t_2]. \tag{6′}$$

Рассмотрим функцию

$$y = \begin{cases}\psi(x), & x\in[a-(b-t_2); t_1];\\ \psi_1(g(x)), & x\in[t_1, t_2],\end{cases}$$

которая и задает вложение φ.

В случае, если $m_b = m_c$, (1), (1′) и (2), (2′) остаются без изменений, (3), (4) принимают соответственно вид

$$[m_c; m_c+\varepsilon_2] \to [q_{\text{мал}}; t_1-\varepsilon_4], \qquad [m_c+\varepsilon_2; t_2] \to [t_1-\varepsilon_4; t_1],$$

а (3′), (4′) преобразуются соответственно следующим образом:

$$g(x) = \left[\frac{t_1-\varepsilon_4-q_{\text{мал}}}{\varepsilon_2}\right]^* x - \left\{\left[\frac{t_1-\varepsilon_4-q_{\text{мал}}}{\varepsilon_2}\right]^* m_c - q_{\text{мал}}\right\}, \quad x\in[m_c; m_c+\varepsilon_2],$$

$$g(x) = \left[\frac{\varepsilon_4}{t_2-(m_c+\varepsilon_2)}\right]^* x -$$

$$-\left\{\left[\frac{\varepsilon_4}{t_2-(m_c+\varepsilon_2)}\right]^*(m_c+\varepsilon_2)-(t_1-\varepsilon_4)\right\}, \quad x\in[m_c+\varepsilon_2; t_2].$$

Теорема доказана.

Пусть функция $g: D^2 \to R^1$ непрерывна. Точка $x \in D^2$ называется регулярной точкой функции g, если существует координатная окрестность (U, h) точки x $h: U \to V$ такая, что $g \circ h^{-1}(x_1, x_2) = x_2$.

2. Продолжение функции с окружности во внутрь круга.

Теорема 2. *Пусть S^1 — единичная окружность в R^2 $(x^2+y^2=1)$ и f — непрерывная функция на S^1 такая, что $f=\pi\circ\varphi$, где $\varphi: S^1\to R^2$ — вложение (π — проекция на ось Ox). Функция f продолжается во внутрь диска $(x^2+y^2\le 1)$ без критических точек тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию* (∗).

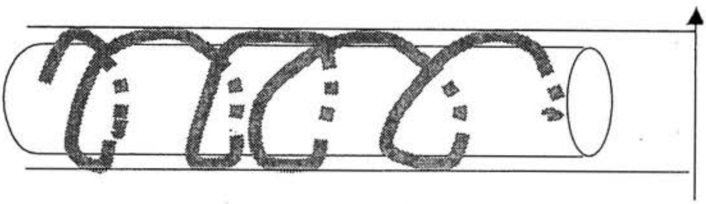

Рис. 3

Доказательство. Необходимость. Из теоремы 1 непосредственно следует доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $S^1=\partial\Delta$. Тогда существует вложение $\varphi:\Delta\to R^2$ такое, что $f=\pi\circ\varphi$. Пусть D^2 — диск, который ограничивает $\varphi(S^1)$. Согласно теореме Шенфлиса существует гомеоморфизм $\Phi:\Delta\to D^2$ такой, что $\Phi|s^1=$ $=\varphi$. Рассмотрим функцию $\Pi: D^2\to R^1$, которая продолжает функцию π. Очевидно, что функция $F=\Pi\circ\Phi$ — функция без критических точек.

Теорема доказана.

Пример. Существенно то, что функция f на окружности S^1 является функцией высоты именно в R^2. Рассмотрим цилиндр, на который намотана лента (рис. 3).

Эта функция является функцией высоты, но она не удовлетворяет условию (∗).

Теорема 3. *Пусть f — непрерывная функция на окружности $S^1=\partial\Delta$ и выполняется условие (∗) Тогда существует гомеоморфизм $h: S^1\to S^1$ такой, что $f\circ h$ продолжается в Δ до гармонической функции без критических точек.*

Доказательство. Пусть D — круг с границей $\varphi(S^1)$. Согласно теореме Римана существует конформное отображение $\gamma:\ \mathrm{Int}\,\Delta\to\mathrm{Int}\,D$, а теорема Каратеодори [5] гарантирует, что γ можно продолжить до гомеоморфизма замкнутых областей $\gamma^*:\Delta\to\mathrm{Int}\,D$. Рассмотрим на S^1 функцию $g=\pi\circ\gamma^*|s^1$. Очевидно, что g продолжается во внутрь Δ до гармонической функции без критических точек [14].

Рассмотрим $\varphi^{-1}\circ\gamma^*: S^1\to S^1$ и $f(\varphi^{-1}\circ\gamma^*)=\pi\circ\varphi(\varphi^{-1}\circ\gamma^*)=g$. Отсюда следует, что функция f после преобразования $h=\varphi^{-1}\circ\gamma^*$ продолжается до гармонической в Δ без критических точек.

Теорема доказана.

1. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 364 с.
2. *Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Г.* Введение в дифференциальную геометрию. – М.: Наука, 1973. – 440 с.
3. *Okabe T.* The existence of topological Morse function and its application to topological h-cobordism theorem // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1971. – **18**, № 1. – P. 23–35.
4. *Kaplan W.* Topology of level curves of garmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **63**, № 3. – P. 514–522.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Ч.1. – 318 с.

Получено 25.02.2003