УДК 512.54

С. Н. Козулин, В. И. Сенашов, В. П. Шунков
(Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Красноярск, Россия)

ГРУППЫ С РУЧКАМИ ПОРЯДКА, ОТЛИЧНОГО ОТ ТРЕХ *

We obtain the test for the unsimplicity of an infinite group.

Отримано ознаку непростоти нескінченної групи.

M_p-группы с ручками порядка, отличного от двух, в группе без инволюций изучал В. П. Шунков [1, 2], M_p-группы с ручками порядка 2 — В. О. Гомер [3]. В настоящей работе получен признак непростоты M_p-группы с ручкой порядка, отличного от трех.

Напомним определение M_p-группы.

Группа G называется M_p-группой, если для ее бесконечной нормальной полной абелевой p-подгруппы B с условием минимальности и элемента a порядка p выполняются следующие условия:

а) локально конечные p-подгруппы из $C_G(a)B/B$ конечны;

б) если некоторая полная абелева p-подгруппа C группы G содержится в множестве $\bigcup_{g\in G}\langle a, a^g\rangle$, то $C \leq B$.

Подгруппы B, $\langle a\rangle$ называются соответственно ядром и ручкой M_p-группы G.

Ручка называется p-конечной (конечной), если в $C_G(a)$ локально конечные p-подгруппы (подгруппы) конечны.

Определение M_p-группы ввел В. П. Шунков в 1983 г. [1].

Любая черниковская группа, имеющая бесконечную p-подгруппу и почти регулярный элемент порядка p, является M_p-группой. Голоморфное расширение таких групп с помощью любой группы внешних автоморфизмов является M_p-группой.

Если G — M_p-группа с конечной ручкой $\langle a\rangle$, то $C_G(a)$ может иметь бесконечные p-подгруппы. Например, достаточно взять прямое произведение указанных выше групп и свободной периодической группы Новикова – Адяна [4].

Другие примеры M_p-групп можно найти в [1, 2].

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть G — группа, B — ее бесконечная полная абелева p-подгруппа с условием минимальности (p — простое число, отличное от трех), удовлетворяющие условиям:*

1) *$H = N_G(B)$ является M_p-группой с ядром B и p-конечной ручкой $\langle a\rangle$;*

2) *для произвольного элемента $g \in G \setminus H^{\#}$ подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$ конечны и разрешимы;*

3) *$|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и $H \cap C_G(a)$ содержит все p'-элементы конечного порядка из $C_G(a)$;*

4) *если Q — конечная $\langle a\rangle$-инвариантная q-подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq 1$, то $N_G(Q) \leq H$ (q — простое число, отличное от p);*

5) *в G все конечные $\langle a\rangle$-инвариантные p'-подгруппы разрешимы.*

Тогда $B \lhd G$.

Приведем некоторые необходимые определения.

---

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00078) и гранта № 9 шестого конкурса-экспертизы 1999 г. научных проектов молодых ученых.

Группа вида $G = F \leftthreetimes H$ называется *группой Фробениуса,* если выполняются следующие условия:

1) $H^g \bigcap H = 1,\ g \in G \setminus H$;

2) $G \setminus F = \bigcup_{g \in G} H^g \setminus \{1\}$.

Любое конечное расширение прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе, называется *черниковской группой.*

Элемент g из группы G называется *p-вещественным* относительно некоторого элемента a простого порядка p из G, если $\langle g, a\rangle$ — группа Фробениуса и g содержится в ее ядре.

Пусть G — группа, $A = \operatorname{Aut} G$. Множество $G^* = \{\phi g \mid \phi \in A,\ g \in G,\ \phi g \phi' g' = \phi\phi' g^{\phi'} g'\}$ называется *голоморфным расширением* группы G с помощью группы A.

Пусть G — группа, содержащая элемент g. Элемент g называется *почти регулярным,* если централизатор $C_G(g)$ конечен.

Перейдем к доказательству основного результата. Для $p = 2$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 8 [3]. Следовательно, в дальнейшем можем предполагать, что $p \neq 2$.

Предположим, что теорема неверна, т. е. $H \neq G$. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$ троек типа (T, V, c), где $N_T(V)$ — M_p-группа с ядром V и p-конечной ручкой $\langle c\rangle$, удовлетворяющие условиям $2-5$ теоремы, и $N_T(V) \neq T$. В множестве $\mathfrak{R}$ выделим подмножество $\mathfrak{I}$ троек (G, B, a) с наименьшим рангом $l_p = l(B)$ ядра B. Ввиду условия 1 теоремы и из [5, 6] следует, что l_p — конечное число. Но тогда $m_p = \max(|S| \mid S$ — силовская p-подгруппа из $\operatorname{Aut}(B))$ — также конечное число [7] (см. также [6, с. 458]).

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть (G, B, a) — тройка из $\mathfrak{I}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *$(G, B^g, a^g) \in \mathfrak{I}$ для любого $g \in G$;*

2) *$N_G(H) = H$, где $H = N_G(B)$;*

3) *если S — собственная $\langle a\rangle$-инвариантная конечная подгруппа из B и $N_G(S) \nleq H$, то $(N_G(S), B, a) \in \mathfrak{I}$, $(N_G(S)/S, B/S, aS) \in \mathfrak{I}$;*

4) *если группа S — $\langle a\rangle$-инвариантная бесконечная подгруппа из B, то $N_G(S) \leq H$;*

5) *если P — максимальная локально конечная $\langle a\rangle$-инвариантная p-подгруппа из H, то P/B — конечная группа;*

6) *$(G, B, a^h) \in \mathfrak{I}$ для любого $h \in H$ и, в частности, $(G, B, ra) \in \mathfrak{I}$ для любого $r \in B$;*

7) *если подгруппа P — конечная $\langle a\rangle$-инвариантная p-подгруппа из H, $N_G(P) \nleq H$ и $C_G(P) \bigcap B$ бесконечно, то $B < C_G(P)$ и тройки $(N_G(P), B, a)$, $(C_G(P)\langle a\rangle, B, a) \in \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Сначала докажем, что $N_G(B^g)$ — M_p-группа. Поскольку $B^g \cong B$, то B^g — бесконечная полная абелева p-группа с условием минимальности. Пусть Y — некоторая локально конечная p-подгруппа из $C_G(a^g)B^g/B^g$. Поскольку $C_G(a^g) = (C_G(a))^g$, то $Y^{g^{-1}}$ — локально конечная p-подгруппа из $C_G(a)B/B$. Тогда из определения M_p-группы следует, что $Y^{g^{-1}}$ — конечная группа, а вместе с ней и Y — конечная группа. Условие а) из определения M_p-группы выполняется для $N_G(B^g)$. Пусть C — некоторая полная абелева p-подгруппа группы G и подгруппа $C \leq$

$\leq \bigcup_{h\in G}\langle a^g, a^{gh}\rangle$. Сопрягая последнее элементом g^{-1}, получаем полную абелеву p-подгруппу $C^{g^{-1}}$, содержащуюся в $\bigcup_{g_1\in G}\langle a, a^{g_1}\rangle$, $g_1 \in G$. По определению M_p-группы $C^{g^{-1}} \leq B$, а значит, $C \leq B^g$, т. е. условие б) выполняется, а значит, $N_G(B^g)$ — M_p-группа.

Для доказательства утверждения 1 осталось доказать, что G и B^g удовлетворяют условиям $2-5$ теоремы.

Сопрягая множество подгрупп вида $\langle a^g, a^{gh}\rangle$ элементом g^{-1}, получаем взаимно однозначное соответствие их на множество подгрупп вида $\langle a, a^{g^{-1}}\rangle$. Поскольку подгруппы вида $\langle a, a^{g^{-1}}\rangle$ конечны, то и подгруппы вида $\langle a^g, a^{gh}\rangle$ конечны, т. е. условие 2 теоремы выполняется.

Пусть Q — произвольная конечная $\langle a^g\rangle$-инвариантная q-подгруппа из нормализатора $N_G(B^g)$ и выполняется условие $Q\cap C_G(a^g) \neq 1$, $q \neq p$. Сопрягая, получаем, что $Q^{g^{-1}}$ — конечная $\langle a\rangle$-инвариантная q-подгруппа из $N_G(B)$ и выполняется условие $Q^{g^{-1}} \cap C_G(a) \neq 1$, $q \neq p$. Поскольку пара G и B удовлетворяет условиям теоремы, то $N_G(Q^{g^{-1}}) \leq N_G(B)$. Сопрягая последнее элементом g, получаем $N_G(Q) \leq N_G(B^g)$. Следовательно, условие 4 теоремы выполняется для пары G и B^g. Очевидно, в G все конечные $\langle a^g\rangle$-инвариантные p'-подгруппы разрешимы и условие 5 также выполняется. Ранги $l(B)$ и $l(B^g)$ совпадают ввиду сопряженности.

Таким образом, утверждение 1 леммы доказано.

Докажем утверждение 6 леммы. Поскольку $h \in H = N_G(B)$, то $B^h = B$. Тройка $(G, B^h, a^h) \in \Im$ согласно утверждению 1 леммы. Следовательно, тройка $(G, B, a^h) \in \Im$. Для завершения доказательства утверждения 6 осталось доказать, что тройка $(G, B, ra) \in \Im$. Поскольку $\langle a\rangle$ — p-конечная ручка, а $B \leftthreetimes \langle a\rangle$ — локально конечная p-группа, то $\left|C_{B\leftthreetimes\langle a\rangle}(a)\right| < \infty$ (см., например, [8]), т. е. для любого элемента $r \in B$ имеем $ra = a^h$ для некоторого $h \in B$. Так как, согласно доказанному, тройка $(G, B, a^h) \in \Im$ и $B < H$, то утверждение 6 доказано.

Докажем утверждение 3. Обозначим $T = N_G(S)$. Докажем сначала, что $N_T(B)$ — M_p-группа. Пусть Y — некоторая локально конечная p-подгруппа фактор-группы $C_T(a)B/B$. Поскольку $Y \leq C_G(a)B/B$, то согласно определению M_p-группы Y — конечная группа и условие а) из определения M_p-группы выполняется для группы $N_T(B)$. Пусть C — некоторая полная абелева p-подгруппа из $\bigcup_{h\in G}\langle a^g, a^{gh}\rangle$. Так как $C \leq \bigcup_{h\in G}\langle a^g, a^{gh}\rangle$, то $C \leq B$ и условие б) из определения M_p-группы выполняется, а значит, $N_T(B)$ — M_p-группа.

Для доказательства утверждения $(N_G(S), B, a) \in \Im$ осталось доказать, что T и B удовлетворяют условиям $2-5$ теоремы.

Если $t \in T\backslash N_T(B)$, то $t \in G\backslash N_G(B)$ $(N_G(S) \not< H)$. Это означает, что множество подгрупп вида $\langle a, a^t\rangle$ содержится в множестве подгрупп вида $\langle a, a^g\rangle$, $g \in G\backslash N_G(B)$, т. е. условие 2 теоремы выполняется для пары T и B.

Индекс $\left| C_T(a) : N_T(B) \cap C_T(a)\right|$ конечен ввиду конечности индекса

$|C_G(a): H \cap C_G(a)|$. Множество $N_T(B) \cap C_T(a)$ содержит все p'-элементы конечного порядка из $C_T(a)$, так как $H \cap C_G(a)$ содержит все p'-элементы конечного порядка из $C_G(a)$, т. е. условие 3 теоремы выполняется для пары T и B.

Пусть Q — конечная $\langle a \rangle$-инвариантная q-подгруппа из $N_T(B)$ и выполняется условие $Q \cap C_T(a) \neq 1$ и $q \neq p$. Поскольку $Q < N_G(S) \cap H$, то $Q \leq H$, а значит, нормализатор $N_G(Q) \leq H$. Следовательно, $N_G(Q) \cap T \leq H \cap T$. Условие 4 теоремы выполняется для пары T и B. Очевидно, в $T = N_G(S)$ все конечные $\langle a \rangle$-инвариантные p'-подгруппы разрешимы, а значит, условие 5 также выполняется и $(N_G(S), B, a) \in \mathfrak{I}$.

Осталось доказать, что $(N_G(S)/S, B/S, aS) \in \mathfrak{I}$. Докажем, что нормализатор $N_{T/S}(B/S)$ — M_p-группа. Пусть Y/S — некоторая локально конечная p-подгруппа из $C_{T/S}(aS)(B/S)/(B/S)$. Из [8] следует, что $C_{T/S}(aS) = RC_T(a)/S$, где R — элементарная абелева подгруппа из B/S. Переходя к прообразам, получаем

$$Y < RC_T(a)B/B \cong C_T(a)B/B,$$

где Y — полный прообраз группы Y/S в группе $C_T(a)B/B$. Согласно теореме Шмидта из [9] и так как S — локально конечная группа, Y — локально конечная группа. Из определения M_p-группы следует, что Y — конечная группа, а вместе с ней и Y/S — конечная группа, т. е. условие а) из определения M_p-группы выполняется. Докажем, что выполняется условие б). Пусть $\overline{C}$ — некоторая полная абелева p-подгруппа группы T/S и

$$\overline{C} \leq \bigcup_{gS \in T/S} \langle aS, (aS)^{gS} \rangle.$$

Доказательство будем проводить от противного. Пусть $C \nleq B$. Поскольку группа $\langle aS, (aS)^{gS} \rangle = \langle a, a^g \rangle S/S$ содержит элементы бесконечных порядков p^n, а группа S конечна (и так как $\langle a, a^g \rangle S/S < T = N_G(S)$), то в группах $\langle a, a^g \rangle$ можно выбрать элементы сколь угодно больших порядков p^n. Следовательно, существует квазициклическая группа из группы $\langle a, a^g \rangle$, не содержащаяся в B, что противоречит определению M_p-группы, т. е. условие б) выполняется, а значит, нормализатор $N_{T/S}(B/S)$ — M_p-группа.

Для доказательства утверждения 3 осталось доказать, что T/S и B/S удовлетворяют условиям $2-5$ теоремы.

Ввиду конечности групп вида $\langle a, a^g \rangle$, S и так как

$$\langle aS, (aS)^{gS} \rangle = \langle a, a^g \rangle S/S \cong \langle a, a^g \rangle / \langle a, a^g \rangle \cap S,$$

группы вида $\langle aS, (aS)^{gS} \rangle$ также конечны. Значит, условие 2 теоремы выполняется для пары T/S, B/S. Аналогично предыдущему доказывается, что для пары T/S, B/S выполняются условия $3-5$ теоремы.

Утверждение 3 леммы доказано.

Утверждение 4 следует из результатов [8], условий теоремы и определения множества $\mathfrak{I}$.

Докажем утверждение 5. Предположим, что $\overline{P} = P/B$ — бесконечная группа ($B \lhd P$ ввиду максимальности P в H и того, что B — локально конечная группа, нормальная в H). Из [8] следует $C_{\overline{P}}(\overline{a}) = C_P(a)B/B$, где $\overline{a} = aB$. Поскольку $C_P(a)$ — локально конечная группа из $C_H(a)$, то $C_{\overline{P}}(\overline{a}) = C_P(a)B/B$ — локально конечная группа из $C_H(a)B/B$. Следовательно, ввиду того, что H — M_p-группа, $\left|C_{\overline{P}}(\overline{a})\right| < \infty$. Из [6] следует, что $\overline{P}$ — черниковская группа. Пусть $\overline{V}$ — ее полная часть и V — полный прообраз группы $\overline{V}$. Докажем, что $V < \bigcup_{v\in V}\langle a, a^v\rangle$. Так как H — M_p-группа с p-конечной ручкой и группа B локально конечна (следует из абелевости и периодичности B), то $\left|C_B(a)\right| < \infty$. Выберем произвольный элемент $v \in V$. Из [8] следует, что $av = a^h$ для некоторого $h \in H$, т. е. $v = a^{-1}a^h$. Очевидно, $v \in \langle a, a^h\rangle$. Значит, $V < \bigcup_{v\in V}\langle a, a^v\rangle$. Из определения M_p-группы следует, что $V < B$. Значит, P — конечная группа, и мы получили противоречие. Следовательно, $\overline{P}$ — конечная группа и утверждение 5 доказано.

Если бы $N_G(H) \neq H$, то в $N_G(H)\setminus H$ существовал бы такой элемент x, что $B^x \neq B$, $B^x < H$ и BB^x — $\langle a\rangle$-инвариантная подгруппа из H, причем BB^x/B — бесконечная группа. Но тогда мы получили бы противоречие с утверждением 5 леммы. Следовательно, $H = N_G(H)$ и утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 7. Пусть $H_1 = C_G(P)\langle a\rangle \bigcap H$ и B_1 — полная часть пересечения $B \bigcap C_G(P)$. Как и выше, легко показать, что $N_G(H_1) \bigcap C_G(P)\langle a\rangle = H_1$ и тройка $(C_G(P)\langle a\rangle, B_1, \langle a\rangle)$ удовлетворяет условиям теоремы, причем $l_p(B_1) \leq l_p$. Если бы было $l_p(B_1) < l_p$, то ввиду определения $\mathfrak{J}$ получили бы $B_1 \lhd C_G(P)\langle a\rangle$. А так как B_1 — $\langle a\rangle$-инвариантная бесконечная группа, то согласно утверждению 4 $N_G(B_1) \leq H$, и, следовательно, $C_G(P) \leq H$. Рассмотрим группу $B_1B_1^x$, $(x \in N_G(P))$ — локально конечная полная $\langle a\rangle$-инвариантная p-подгруппа. Если $B_1B_1^x \nless B_1$, то согласно утверждению 5 индекс $\left|B_1B_1^x : B_1\right|$ конечен. Получили противоречие со строением полных групп. Следовательно, $B_1 \lhd N_G(P)$. А так как $C_G(P) \lhd N_G(P)$ и $B_1^x \lhd C_G(P) \lhd N_G(P)$, то $N_G(P) \leq N_G(B_1) \leq H$, что противоречит условиям леммы. Следовательно, $l_p(B_1) = l_p$ и $B_1 = B$. Но тогда, очевидно, $(N_G(P), B, a) \in \mathfrak{J}$, $(C_G(P)\langle a\rangle, B, a) \in \mathfrak{J}$. Утверждение 7 доказано, а вместе с ним завершено доказательство леммы.

Определение 1. *Конечную нетривиальную $\langle a\rangle$-инвариантную подгруппу R из B назовем подгруппой второго рода, если $N_G(R) \nleq H$, и подгруппой первого рода — в противном случае.*

Лемма 2. *Пусть K — конечная $\langle a\rangle$-инвариантная p'-подгруппа группы G. Тогда $R = N_G(K) \bigcap B = C_G(K) \bigcap B$.*

Доказательство. Пусть L — нильпотентный радикал подгруппы $K \neq 1$. Согласно условию 5 теоремы K — разрешимая группа, а значит, $L \neq 1$. В силу леммы 1 (G, H, ra) $(r \in R)$ — тройка-контрпример.

Пусть $L \bigcap C_G(r_1a) \neq 1$ для некоторого $r_1 \in R$. Обозначим $L = L \bigcap C_G(r_1a)$. Поскольку группа L_1 содержится в $C_G(r_1a)$ и является p'-группой, то согласно утверждению 3 теоремы она содержится в H. Рассмотрим группу $L_1 \times \langle r_1a\rangle$. Выберем силовскую s-подгруппу S из L_1. Так как L_1 — нильпотентная группа, то S — характеристическая группа в L_1. Следовательно, S — $\langle r_1a\rangle$-инвариантная подгруппа и ввиду утверждения 4 теоремы $N_G(S) \leq H$. Поскольку $L \lhd K$, то L можно представить в виде прямого произведения силовских подгрупп: $L = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Пусть выбранная подгруппа S содержится в некоторой подгруппе S_i. Из строения группы L следует, что $S_j \leq N_G(S)$ для всех $j \neq i$. Так как L — нильпотентный радикал группы K, то $S_j \lhd K$, $1 \leq j \leq n$. Рассмотрим сначала случай, когда группа L состоит из двух или более силовских подгрупп. Выберем силовскую s_j-подгруппу S_j, $j \neq$

$\neq i$, из L. Очевидно, S_j — характеристическая подгруппа в L. Поскольку L — нильпотентная и $\langle r_1 a\rangle$-инвариантная группа, то S_j — $\langle r_1 a\rangle$-инвариантная подгруппа. Так как $S_j \leq H$ и $S_j \bigcap C_G(r_1 a) \neq 1$ (для некоторого $j \neq i$), то согласно утверждению 4 теоремы $N_G(S_j) \leq H$. Из того, что $N_G(S_j) \leq H$ и $S_j \lhd K$, следует, что $K < H$. Рассмотрим теперь случай, когда L состоит из единственной силовской подгруппы: $L = S_1$. В этом случае $S = C_L(a)$. Обозначим $M = S \bigcap Z(L)$. Так как $S = C_G(r_1 a) \bigcap L$, то M — $\langle r_1 a\rangle$-инвариантная подгруппа. Согласно утверждению 4 теоремы $N_G(M) \leq H$. Из последнего, ввиду того, что $L \leq N_G(M)$, следует $L \leq H$. Тогда, используя утверждение 4 теоремы, получаем $N_G(L) \leq H$. Так как $L \lhd K$, то $K \leq N_G(L)$, и $K < H$. Таким образом, если $L \bigcap C_G(r_1) \neq 1$, то $K < H$.

Обозначим $C = N_G(K) \bigcap B$. Поскольку группа $CK \leq N_G(K)$, то $K \lhd CK$. Рассмотрим группу $M = K \leftthreetimes C$. Группа C — силовская p-подгруппа группы M. Очевидно, $B \bigcap M = C$. Так как $B \lhd H$, $C = B \bigcap M$ и $M < H$, то C — нормальная подгруппа в группе M, а так как группа $M = C \leftthreetimes K$ и $C \lhd M$, то $M = C \times K$. Поскольку подгруппа $C = N_B(K)$ и $M = C \times K$, то $C = N_B(K) \leq C_B(K)$. Из последнего ввиду того, что $C_B(K) \leq N_B(K)$, следует $N_B(K) = C_B(K)$, и лемма доказана для случая, когда $L \bigcap C_G(r_1 a) \neq 1$.

Пусть $C_G(ra) \bigcap L = 1$ для любого $r \in R$. Тогда на основании теоремы Бернсайда [10] и представимости подгруппы $\langle L, R, a\rangle$ в виде $L \leftthreetimes R \leftthreetimes (a)$ получаем $R < C_G(L)$. Отсюда и из результатов [11] следует, что $R \times L \lhd K \leftthreetimes R$ и $R < C_G(K)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть K — конечная нетривиальная $\langle a\rangle$-инвариантная p'-подгруппа из G и $T = N_G(K) \nless H$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если L — нильпотентный радикал подгруппы K, то $L \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса и в K/L силовские примарные подгруппы циклические, причем*

$$(K \leftthreetimes \langle a\rangle / L) = K/L \times \langle aL\rangle;$$

2) *если $L \neq K$, то существует такая $\langle a\rangle$-инвариантная силовская q-подгруппа P группы K, что $P \nless L$, $T = KN_T(P)$ и $N_T(P) < H$, $L \neq H$.*

Доказательство. Докажем, что $L \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса. Пусть $D = C_G(a) \bigcap L \neq 1$. Согласно условию 3 теоремы $D < H$. Если $D \neq L$, то обозначим $D_1 = N_L(D)$. По условию 4 теоремы $N_L(D_1) \leq H$. Если опять $D_2 = N_L(D_1) \neq L$, то обозначим $D_3 = N_L(D_2)$. Применив к группе D_3 рассуждения, аналогичные таковым в случае группы D, построим цепочку подгрупп

$$D \leq D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n = L.$$

Каждая из подгрупп D_n содержится в H, значит, $L < H$. Согласно условию 4 теоремы $N_G(L) \leq H$, следовательно, $K < H$. Из условия 4 теоремы и так как K — p'-подгруппа, получаем $N_G(K) < H$. Пришли к противоречию с условиями леммы. Значит, $C_G(a) \bigcap L = 1$ и $L \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса. Отсюда в силу леммы Подуфалова [8] и из [11] получим

$$(K \leftthreetimes \langle a\rangle)/L = K/L \times \langle aL\rangle.$$

Докажем утверждение 2. Пусть $L \neq K$ и P — силовская q-подгруппа из K, $P \nless L$, и $a \in N_T(P)$. Из утверждения 1 следует $P \bigcap C_G(a) \neq 1$. Отсюда, используя нормализаторное условие в P (теорема 16.2.2 из [11]), а также условие 4 теоремы, получаем $N_T(P) < H$. Осталось показать, что $L \nless H$. Докажем сначала, что $T = KN_T(P)$. Действительно, пусть t — произвольный элемент из

T. Поскольку $K^t = K$, то $P^t \leq K$ и P^t — силовская подгруппа из K. Согласно теореме Силова найдется такой элемент $k \in K$, что $P = (P^t)^k$, а значит, $kt = n \in N_T(P)$ или $t = nk^{-1}$. Последнее равенство доказывает утверждение $T = KN_T(P)$. Согласно утверждению 1 имеем $K = LC_K(a)$, где $C_K(a) < H$ (условие 3 теоремы). Отсюда, если $L < H$, то $K < H$, а так как согласно доказанному выше $N_T(P) < H$, то получили бы $T < H$ — противоречие с условием леммы. Следовательно, $L \nless H$.

Предположим, что $\overline{P} = PL/L$ — нециклическая группа. В этом случае из результатов [12] заключаем, что либо $\overline{P}$ имеет элементарную абелеву подгруппу V порядка q^2, либо $\overline{P}$ — группа кватернионов. Предположим, что $\overline{P}$ — группа кватернионов. Поскольку L — нильпотентная группа, то в ней силовская подгруппа P — характеристическая. Отсюда, так как $L \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, то и $P \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса. Но $|a| \neq 3$, а группа кватернионов допускает регулярный автоморфизм только порядка 3, значит, группа P не может быть группой кватернионов.

Согласно доказанному выше $V \times \langle aL \rangle$. Поскольку $L = L_1 \times P_1$, где P_1 — силовская q-подгруппа из L, то L_1 — V-инвариантная подгруппа. Из леммы Фраттини [11] (лемма 17.1.8) и теоремы Бернсайда [10] следует $L_1 = \langle C_{L_1}(\overline{u}) \mid \overline{n} \in V^{\#} \rangle$. Следовательно, $C_{L_1}(\overline{u}) = S_u \times \langle u \rangle$, где u — q-прообраз элемента $\overline{u}$ в K. Очевидно, $u \in C_G(a)$. Отсюда согласно условию 4 теоремы имеем $S_u < H$. Но тогда $L_1 < H$, а значит, и $L < H$, что противоречит доказанному ранее соотношению $L \nless H$. Следовательно, $\overline{P}$ — циклическая группа, и лемма полностью доказана.

Лемма 4. *Пусть P — конечная p-подгруппа из G и $a \in P$. Если $R = B \bigcap P \neq 1$ и $N_G(P) \nless H$, то B имеет подгруппы второго рода.*

Доказательство. Пусть $D = P \bigcap H$. Очевидно, $N_G(D) \nless H$ и в $N_G(D) \setminus H$ найдется элемент c. Далее, $L = R \bigcap Z(D) \neq 1$ [11] (теорема 16.2.3). В силу автоморфной допустимости $Z(D)$ в D имеем $L_1 = L^c \leq Z(D)$ и, кроме того, $L_1 < B^c = B_1 < H^c = H_1$. Если $C_G(L_1) \nless H_1$, то, очевидно, $C_G(L) \nless H$, и в этом случае L — подгруппа второго рода. Пусть $C_G(L_1) < H_1$. Но тогда $\langle L, a \rangle \leq C_G(L_1) < H_1$. Выберем в L элемент $t \neq 1$ и $S = \langle t \rangle \times \langle a \rangle$. Рассмотрим подгруппу $B_1 S$. Из результатов [8, 13] заключаем, что в S существует неединичный элемент r такой, что $C_G(r) \bigcap B_1$ — бесконечная группа. Если $r = ha$, где $h \in (t) < B$, то ввиду леммы 1 и условия 3 теоремы пересечение $H \bigcap C_G(r) \bigcap B_1$ бесконечно. Но тогда мы получим противоречие с условием 1 теоремы и леммой 1. Следовательно, $r \in \langle t \rangle \leq B$. Если $C_G(r) \nless H$, то $\langle r \rangle$ — подгруппа второго рода. Пусть $C_G(r) \leq H$. В этом случае $B_1 < H$ и так как B_1 — $\langle a \rangle$-инвариантная полная абелева p-подгруппа, причем $C_{B_1}(a)$ конечен, то из результатов [8] имеем $B_1 < \bigcup_{h \in B_1} \langle a, a^b \rangle$. Отсюда и из утверждения 5 леммы 1 следует $B^c = B_1 = B$ и $c \in N_G(B) = H$, а это невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Определение 2. *Конечную нетривиальную $\langle a \rangle$-инвариантную p-подгруппу X из H назовем подгруппой типа $(*)$, если $N_G(X) \nless H$.*

Лемма 5. *Пусть P — подгруппа типа $(*)$ и $|N_G(P) : N_G(P) \bigcap H| < \infty$. Тогда H имеет подгруппу второго рода.*

Доказательство. Поскольку BP — черниковская p-группа, то $N_G(P) \bigcap B = R_1 \neq 1$ [9, 11]. Из условий леммы следует, что централизатор R_1 в $G_1 =$

$= N_G(P)$ имеет конечный индекс в G_1 и согласно лемме Дицмана [9, 14] замыкание R_1 в G_1 конечно. Следовательно, в G_1 существует конечная нормальная подгруппа Z_1, содержащая подгруппу $\langle P, R_1\rangle$. Пусть S — $\langle a\rangle$-инвариантная силовская p-подгруппа из Z_1, причем $R_1 < S$. Если $S(a) \not< H$, то согласно лемме 4 B имеет подгруппу второго рода. Пусть $S < H$ и, следовательно, $R_1 \lhd S$. Отсюда на основании теоремы из [15, с. 93, 94] заключаем, что $R_1 < O_{p'p}(Z_1) = L$. Согласно лемме 2 $\langle P, R_1\rangle \le P_1 = O_p(L) \lhd G_1$.

Следовательно, $G_2 = N_G(P_1) \not< H$ и $a \in G_2$. Снова по лемме 4 получаем $P_1 < H$. Пусть $R_2 = B \bigcap G_2$. Из [9, 11] следует $R_2 \not< P_1$ и, значит, $R_2 \neq R_1$ и $R_1 < R_2$. Относительно пары (G_2, R_2) рассуждения аналогичны приведенным выше для пары (G_1, R_1). Повторяя эти рассуждения, строим в H строго возрастающую цепочку конечных $\langle a\rangle$-инвариантных p-подгрупп

$$P = P_0 < P_1 < \ldots < P_n < \ldots \tag{1}$$

такую, что $G_{n+1} = N_G(P_n) \not\le H$, $n = 0, 1, \ldots$.

Из леммы 1 следует, что $|P_n/R_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности. Отсюда легко получить, что при достаточно большом n подгруппа R_n имеет нетривиальную подгруппу, нормальную в G_{n+1}, т. е. подгруппу второго рода. Если же цепочка (1) обрывается на конечном номере, то из способа ее построения будет следовать существование подгруппы второго рода.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если H не имеет подгрупп второго рода, то справедливы следующие утверждения:*

1) *любая конечная p-подгруппа, содержащая элемент a, содержится в H;*

2) *если P — подгруппа типа $(*)$, $G_1 = N_G(P)$, $H_1 = H \bigcap G_1$, $\overline{G_1} = G_1/P$, $\overline{H_1} = H_1/P$, $\overline{a} = aP$, то $C_{\overline{G_1}}(\overline{a}) < \overline{H_1}$;*

3) *если P — подгруппа типа $(*)$, то $B \bigcap P = 1$;*

4) *если $a^g \in H$, то $g \in H$ и $C_G(a) < H$.*

Доказательство. Пусть S — конечная p-подгруппа группы G, содержащая элемент a. Предположим, что $S_1 = H \bigcap S \neq S$. В этом случае $N_G(S_1) \not< H$ [11] (теорема 16.2.2). Поскольку $a \in S_1$ и $|C_G(a) : H \bigcap C_G(a)| < \infty$ (условие 3 теоремы), то, очевидно, $|N_G(S_1) : H \bigcap N_G(S_1)| < \infty$ и согласно лемме 5 H имеет подгруппы второго рода, что противоречит условиям леммы. Следовательно, $S < H$, и утверждение 1 доказано. Если бы было $C_{\overline{G_1}}(\overline{a}) \not< \overline{H}_1$, то полный прообраз S_2 подгруппы $\langle\overline{a}\rangle$ в G являлся бы подгруппой типа $(*)$, содержащей элемент a. Рассуждая относительно подгруппы S_2, как и относительно S, получили бы противоречие с условиями леммы. Следовательно, $C_{\overline{G_1}}(\overline{a}) < \overline{H}_1$, и утверждение 2 доказано. Пусть $B \bigcap P = S_3 \neq 1$. Поскольку P — подгруппа типа $(*)$, то $N_G(P) \not\le H$. Очевидно, $N_G(S_3) \not\le H$. Следовательно, S_3 — подгруппа второго рода, и мы получили противоречие с условиями леммы. То есть $B \bigcap P = 1$ и утверждение 3 доказано. Поскольку $a^g \in H$, то $a \in H^{g^{-1}}$. Подгруппа $B^{g^{-1}} \leftthreetimes \langle a\rangle$ — локально конечная p-группа, содержащая элемент a. Согласно утверждению 1 $B^{g^{-1}} < H$ и ввиду леммы 1 $gBg^{-1} = B$; значит, $g \in H$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Подгруппа H содержит подгруппу второго рода.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Сначала докажем, что H имеет подгруппы типа $(*)$. Рассмотрим подгруппу $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \in G \setminus H$. Согласно условию 2 теоремы она конечна и по лемме 6 $a^g \notin H$; значит, $L_g \not< H$. Если $O_{p'}(L_g) = 1$, то ввиду разрешимости L_g $O_p(L_g) \neq 1$. Поскольку $a \in L_g$, то $O_p(L_g)\langle a \rangle$ — конечная p-подгруппа, содержащая элемент a, и ввиду предположения об отсутствии в H подгрупп второго рода и леммы 6 $O_p(L_g) < H$. Но тогда $O_p(L_g)$ — подгруппа типа $(*)$.

Пусть $F_g = O_{p'}(L_g) \neq 1$. Согласно лемме Фраттини [11] (лемма 17.1.8) $L_g = F_g N_{L_g}(Q)$, где Q — силовская p-подгруппа из $O_{p'p}(L_g)$ и $a \in N_{L_g}(Q)$. Если $N_{L_g}(Q) \not< H$, то Q — подгруппа типа $(*)$. Пусть $N_{L_g}(Q) < H$ и в этом случае $F_g \not< H$. Предположим, что элемент a содержится в некоторой элементарной абелевой p-подгруппе R порядка p^2 из L_g. Рассмотрим подгруппу $F_g \leftthreetimes R$. Из леммы Фраттини [11] (лемма 17.1.8) и теоремы Бернсайда [10] следует $F_g \leq \langle C_G(s) \mid s \in R^{\#} \rangle$, а так как $F_g \not< H$, то для некоторого элемента $b \in R^{\#}$ имеем $C_G(b) \not< H$, $b \in C_G(a) < H$ (лемма 6). Следовательно, $\langle b \rangle$ — подгруппа типа $(*)$. Остается рассмотреть случай, когда силовская p-подгруппа из L_g имеет единственную подгруппу порядка p и ввиду условия $p \neq 2$ и результатов из [12] она циклическая. На основании леммы 3, разрешимости L_g и ее порождаемости двумя элементами порядка p заключаем, что $L_g = F_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. Из результатов [16, 17] следует, что $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$, где $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса. Но тогда $B \cap F = 1$ и, значит, $B \leftthreetimes \langle a \rangle \cap F = 1$, причем ввиду представимости G в виде $F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ отсюда следовало бы, что в G/F подгруппа $(B \leftthreetimes \langle a \rangle)F/F$ равна $BF/F \times \langle aF \rangle$. Однако это невозможно, так как $(B \leftthreetimes \langle a \rangle)F/F \cong B \leftthreetimes \langle a \rangle$ не является абелевой группой. Все рассмотренные случаи подтверждают наличие в H подгрупп типа $(*)$.

Ввиду предположения об отсутствии в G подгрупп второго рода и леммы 6 любая подгруппа типа $(*)$ пересекается с B по единице. Отсюда и из леммы 1 следует, что в G найдется некоторая подгруппа P типа $(*)$, не содержащаяся ни в какой большей подгруппе типа $(*)$.

Введем обозначения

$$G_1 = N_G(P), \quad H_1 = H \cap G_1, \quad S = B \cap G_1, \quad \overline{G_1} = G_1/P, \quad \overline{H_1} = H_1/P,$$

$$\overline{S} = SP/P, \qquad \overline{a} = aP.$$

Из [9, 11] следует, что $S \neq 1$ и согласно доказанному выше $\overline{S} \neq 1$. Далее, $\overline{a} \notin \overline{S}$. Действительно, если $\overline{a} \in \overline{S}$, то $a = rh$, где $r \in B$, $h \in P$ и $h = r^{-1}a$. Из результатов [8] заключаем, что элементы h и a сопряжены с помощью некоторого элемента $x \in B: x^{-1}hx = a$. Но тогда подгруппа P^x, очевидно, являлась бы подгруппой типа $(*)$ и $a \in P^x$. Отсюда и из леммы 5 вытекало бы, что H имеет подгруппы второго рода вопреки предположению. Следовательно, $\overline{a} \notin \overline{S}$. Поскольку $\overline{S} \lhd \overline{H_1}$, то ввиду леммы 6 и теоремы 16.2.12 из [11] неравенство $N_{\overline{G_1}}(\overline{H_1}) \neq \overline{H_1}$ означало бы, что H_1 имеет подгруппу $P_1 \geq S \neq 1$ типа $(*)$, а это противоречило бы предположению, что $P_1 \cap B = 1$. Следовательно, $N_{\overline{G_1}}(\overline{H_1}) = \overline{H_1}$. Далее, согласно лемме 6 $C_{\overline{G_1}}(\overline{a}) < \overline{H_1}$. Используя те же соображения, что и примененные в начале доказательства леммы, а также выбор подгруппы P как подгруппы типа $(*)$ наибольшего порядка, легко показать, что подгруппы вида $L_g = \langle \overline{a}, \overline{a}^g \rangle$, где $g \in \overline{G}_1 \setminus \overline{H}_1$, являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. Из [16, 17] следует, что $\overline{G}_1 = F \leftthreetimes N_{\overline{G}_1}(\langle \overline{a} \rangle)$, где $F \leftthreetimes \langle \overline{a} \rangle$ — группа Фробениуса.

Пусть $\overline{t}$ — элемент порядка p из $\overline{S}$, $\overline{t} \in C_{\overline{G}_1}(\overline{a})$ и t — прообраз $\overline{t}$ в S. Рассмотрим подгруппу $F \leftthreetimes Q$, где $Q = \langle \overline{t} \rangle \times \langle \overline{a} \rangle$. Поскольку элементы a и at сопряжены в $B \leftthreetimes \langle a \rangle$ (см., например, [8]), то подгруппы $K_g = \langle \overline{a}\overline{t}, \overline{a}^g \rangle$, $g \in F \setminus \overline{H}_1$, конечны (условие 2 теоремы и лемма 1) и K_g имеет вид $K_g = D_g \leftthreetimes Z$, где Z — элементарная абелева p-группа порядка p^2 и $\overline{a}t \in Z$. По лемме 1 циклические подгруппы вида $\langle ah \rangle$, $h \in S$, являются ручками M_p-группы H, а поэтому подгруппа вида $F \leftthreetimes \langle \overline{a}r \rangle$, $r \in \overline{S}$, также является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle \overline{a}r \rangle$. Отсюда следует, что $Q = Z$ и, значит, $\overline{t}$, $\overline{a} \in Z$. В силу лемм 2, 6 $D_g < C_{\overline{G}_1}(\overline{t})$ и $B \nless \overline{H}_1$. Очевидно, полный прообраз подгруппы $\langle \overline{t} \rangle$ в G является подгруппой типа $(*)$, имеющей нетривиальное пересечение с B. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Перейдем к выбору более удобного контрпримера. Пусть Y — подгруппа второго рода из нижнего слоя B, причем наибольшего порядка в множестве всех таких подгрупп. Согласно лемме 7 $Y \neq 1$, а согласно лемме 1 $(T_1/Y, B/Y, aY) \in \Im$, где $T_1 = N_G(Y)$. По лемме 7 в T_1/Y существует подгруппа $\overline{Y}_1$ второго рода. Если Y_1 — полный прообраз $\overline{Y}_1$ в T_1, то Y_1 — подгруппа второго рода в T_1. Если $T_2 = N_{T_1}(Y_1)$, то $(T_2/Y_1, B/Y_1, aY_1) \in \Im$ (лемма 1). Относительно этой тройки рассуждаем аналогично предыдущему. Повторяя эти рассуждения, строим строго возрастающую цепочку подгрупп второго рода

$$Y < Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n < \ldots . \tag{2}$$

Ей будет соответствовать убывающая цепочка подгрупп $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \ldots \leq T_n \leq \ldots$ такая, что

$$(T_{n+1}/Y_n,\ B/Y_n,\ aY_n) \in \Im, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В цепочке (2), начиная с некоторого номера n, подгруппа $Y_n^{m_p}$, где m_p — параметр, введенный в [1], имеет элементы порядка p^2. Не нарушая общности рассуждений, буде считать, что уже $Y_1^{m_p}$ имеет такие элементы.

Пусть $E = C_{T_2}(Y_1)$, $V = \langle E, a \rangle$. Из результатов [8] заключаем, что $V = E \leftthreetimes \langle a \rangle$.

Лемма 8. *Пусть P — подгруппа типа $(*)$ и $P < E$. Тогда $B < C_V(P)$.*

Доказательство. Поскольку $Y_1 < C_V(P)$ и Y_1 имеет элементы порядка p^2, то ввиду [1] $C_V(P) \cap B$ — бесконечная группа. Отсюда, из леммы 1 и определения подгрупп типа $(*)$ следует утверждение леммы.

Ввиду лемм 1, 7, 8 группа V содержит такую подгруппу K типа $(*)$ из E, что $Y_1 \leq K$, и если K_1 — подгруппа типа $(*)$ из E и $K \leq K_1$, то $K_1 = (B \cap K_1)K$.

Очевидно, $(C_V(K) \leftthreetimes \langle a \rangle, B, a) \in \Im$, причем любая подгруппа типа $(*)$ из $C_V(K)$, содержащая $Z(K)$, является подгруппой группы $BZ(K)$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что K — абелева группа.

Положим

$$V_1 = C_V(K) \leftthreetimes \langle a \rangle, \quad Q = H \cap V_1, \quad E_1 = E \cap V_1, \quad G_1 = V_1/K, \quad H_1 = Q/K,$$
$$\overline{B} = BK/K, \quad \overline{E}_1 = E_1/K, \quad a_1 = aK.$$

Нам будет необходимо следующее утверждение.

Утверждение. *Если S — конечная $\langle a_1 \rangle$-инвариантная p-подгруппа из $H_1 \cap \overline{E}_1$ и $N_{G_1}(S) \not< H_1$, то $S < \overline{B}$.*

Доказательство этого утверждения следует из определения подгруппы K и леммы 8.

В следующей лемме подведены итоги более удобного выбора контрпримера.

Лемма 9. *Если теорема неверна, то существует такая группа G, содержащая бесконечную полную абелеву p-подгруппу B и элемент a порядка p, что имеют место следующие утверждения:*

1) $(G, B, a) \in \mathfrak{I}$;

2) $G = E \leftthreetimes \langle a \rangle$, $N_G(B) = H = D \leftthreetimes \langle a \rangle$, $D < E$;

3) *если P — подгруппа типа* (*) *из D, то $P < B$ и $(N_G(P), B, a) \in \mathfrak{I}$, $(N_G(P)/P, B/P, aP) \in \mathfrak{I}$;*

4) *если R — конечная $\langle a \rangle$-инвариантная подгруппа второго рода и $R \lhd T$, где T — конечная подгруппа из G и T/R — p'-группа, то $R < Z(T)$;*

5) *если U — конечная подгруппа из D, то пересечение $C_G(U) \cap B$ бесконечно;*

6) $C_G(a) < H$.

Доказательство. Утверждение леммы 9 фактически доказано (см. лемму 10 из [1]). Согласно условию 2 теоремы подгруппы L_g конечны и разрешимы. В дальнейшем при рассмотрении подгрупп L_g предполагаем, что $g \in G \setminus H$.

Лемма 10. *Если P — конечная p-подгруппа группы G и $a \in P$, то $P < H$.*

Лемма 11. *Для любого $g \in G \setminus H$ группа L_g имеет вид $L_g = (O_{p'}(L_g) \times R_g) \leftthreetimes \langle a \rangle$, где R_g — подгруппа из B.*

Доказательство лемм 10, 11 практически дословно переносится из [1] (см. леммы 11, 15 из [1]).

Лемма 12. *Пусть b — a-вещественный элемент из $E \setminus D$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппы $L_t = \langle a, a^{tb} \rangle$, $t \in B$, являются конечными группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$.*

Доказательство. Согласно лемме 11

$$L_t = (O_{p'}(L_t) \times S_t) \leftthreetimes \langle a \rangle,$$

где $O_{p'}(L_t) \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$, $S_t < B$. Докажем, что $b \in N_G(S_t)$. Поскольку $S_t \leftthreetimes \langle a \rangle$ — силовская p-подгруппа группы L_t, то согласно лемме 9 $a^{tb} \notin S_t$ и в $O_{p'}(L_t)$ существует такой элемент c, что $a^{tbc^{-1}} = ha$, где $h \in S_t < B$. Из результатов [8] заключаем, что для некоторого элемента $l \in B$ $ha = a^l$ и $a^{tbc^{-1}} = a^l$. Отсюда $tbc^{-1}l^{-1} = r \in C_G(a) < H$ (лемма 9) или $tb = rlc$, $r^{-1}b = (t^{-1})^r lc$. Так как $(t^{-1})^r l \in B$, $S_t < B$, $c \in C_G(S_t)$ и B — абелева группа, то $r^{-1}b \in C_G(S_t)$ и, кроме того, $a \in N_G(S_t)$. Отсюда получаем a, $r^{-1}b \in N_G(S_t)$. Но тогда

$$N_G(S_t) > \langle a, a^{r^{-1}b} \rangle = \langle a, a^b \rangle = \langle a, b \rangle$$

(см. [16, 17]). Следовательно, $b \in N_G(S_t)$.

Итак, доказано, что если в множестве подгрупп типа L_t, $t \in B$, найдется хотя бы одна подгруппа, не являющаяся группой Фробениуса, то B содержит подгруппу второго рода S_1, нормализуемую элементом b, т. е. $b \in N_G(S_1) = G_1$. Тройка $(\overline{G}_1, B/S_1, aS_1)$ находится в $\mathfrak{F}$ (лемма 9), где $\overline{G}_1 = G_1/S_1$. Применив к этой тройке рассуждения, аналогичные предыдущим, докажем, что либо в $\overline{G}_1$ все подгруппы типа $L_t = \langle \overline{a}, \overline{a}^{t\overline{b}} \rangle$, где $t \in B/S_1$, $\overline{a} = aS_1$, $\overline{b} = bS_1$, — группы Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle \overline{a} \rangle$, либо B/S_1 содержит подгруппу второго рода $S_2/S_1 \neq S_1$, нормализуемую элементом $\overline{b}$, где S_2 — полный прообраз S_2/S_1 в B. Рассуждая таким образом и дальше, строим строго возрастающую цепочку подгрупп второго рода

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots \tag{3}$$

такую, что $b \in N_G(S_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если бы цепочка (3) не обрывалась на конечном номере, то ее объединение S было бы бесконечным и $b \in N_G(S)$. Но тогда по лемме 1 получили бы $b \in N_G(S) \leq H$, что невозможно. Следовательно, цепочка (3) обрывается на конечном номере n и для тройки $(N_G(S_n)/S_n, b/S_n, aS_n) \in \mathfrak{F}$ справедливо утверждение леммы.

Лемма доказана.

В дальнейшем предполагаем, что для тройки $(G, B, a) \in \mathfrak{F}$ справедлива лемма 12, т. е. для некоторого a-вещественного элемента $b \in E \setminus D$ и любого элемента $t \in B$ подгруппы $L_t = \langle a, a^{tb} \rangle$ — конечные группы Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$.

Лемма 13. *Пусть t — элемент из B. Тогда $tb = rc$, где $r \in C_G(a) \cap B$, c — a-вещественный элемент из $E \setminus D$.*

Доказательство. Согласно лемме 12 $L_t = \langle a, a^{tb} \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$: $L_t = F_t \leftthreetimes \langle a \rangle$. Ввиду определения группы Фробениуса и леммы 9 в F_t существует такой элемент c, что $a^{tbc^{-1}} = a$. Отсюда получаем $tbc^{-1} = r \in C_G(a) < H$ (лемма 9) и $tb = rc$, а так как $t, b, c \in E$, то $r \in D$.

Рассмотрим равенство

$$atba = arca. \tag{4}$$

Очевидно, $at \in H$ и at, a сопряжены в H (см., например, [8]). Элементы a и ba также сопряжены в G, так как они содержатся в группе Фробениуса $\langle a, b \rangle$ с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром, содержащим элемент b. Кроме того, $ba \notin H$ и ввиду условия 2 теоремы и леммы 11

$$L = \langle at, ba \rangle = F \leftthreetimes \langle ba \rangle,$$

где $F = O_{p'}(L) \times S$ и $S < B$.

Из (4) видно, что $arca \in L$. Поскольку $a^2 \neq 1$ и $rc \in E$, то, очевидно, $arca \notin F$. Отсюда и из $arca \in L$ следует, что $arca \in L \setminus F$. Но все элементы из $L \setminus F$ сопряжены с некоторыми элементами из $\langle a \rangle^{\#}$. В этом случае согласно условию 2 теоремы подгруппа $Z = \langle a, arca \rangle$ конечна и $Z \not< H$, причем $\langle a, rc \rangle = Z$. Но тогда $Z \geq \langle a, a^{rc} \rangle = \langle a, ac \rangle = \langle a, c \rangle$ (см. [16, 17]) и $r \in Z$. Так как $r \in D$, то, используя лемму 11 применительно к Z, получаем $r \in B$.

Лемма доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Если теорема неверна, то справедливы все предыдущие леммы и, в частности, ввиду лемм 12, 13

$E \setminus D$ имеет такой a-вещественный элемент b, что для любого $t \in B$

$$tb = r_t c_t, \tag{5}$$

где $r_t \in B \cap C_G(a)$, c_t — a-вещественный элемент из $E \setminus D$. Умножим равенство (5) справа на элемент a и рассмотрим подгруппу $X_t = \langle c_t a, ba \rangle$. Из (5) видно, что $r_t^{-1} t \in X_t$ и $X_t = \langle r_t^{-1} t, ba \rangle$. Поскольку $\langle a, b \rangle = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и $b \in F$, то a и ba сопряжены с помощью некоторого элемента d из F: $a^d = ba$. Тройка (G^d, B^d, ba) находится в $\mathfrak{I}$ и для нее справедливы все предыдущие леммы (лемма 1). Докажем, что $B < \Psi^d$, где $\Psi = \bigcup_{g \in H} \langle a, a^g \rangle$.

Предположим что для некоторого элемента $u \in B$ выполняется соотношение $X_u \not< H^d$. Так как подгруппа X_u порождается двумя элементами $c_u a$, ba, сопряженными с некоторыми элементами из $\langle a \rangle^\#$, то по условию 2 теоремы и ввиду предположения, что $c_u a \notin H^d$, группа X_u имеет вид

$$X_u = (O_{p'}(X_u) \times S_u) \leftthreetimes \langle ba \rangle,$$

где $S_u < B^d$ (лемма 11). Но $r_u^{-1} u \in S_u$ и, кроме того, $X_u = \langle r_u^{-1} u, ba \rangle$. Отсюда следует, что X_u — конечная p-группа, содержащая элемент ba, и по лемме 10 $X_u < H^d$, что противоречит предположению. Следовательно, для любого $t \in B$

$$r_t^{-1} t \in \langle c_t a, ba \rangle \leq H^d. \tag{6}$$

Из [8] следует, что $|r_t| \leq p$, а поэтому $t^p \in X_t < H^d$. Но $B^p = B$ и из (6) следует, что $B < \Psi^d$. На основании последнего включения и определения M_p-группы заключаем, что $B = B^d$ и $d \in N_G(B) = H$. Но тогда $b \in H$ вопреки предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

1. *Шунков В. П.* M_p-группы // Алгебра и логика. – 1984. – **23**, № 4. – С. 445 – 475.
2. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
3. *Гомер В. О.* О группах с элементами конечных рангов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 1992. – 69 с.
4. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
5. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 4. – С. 484 – 496.
6. *Blackburn N.* Some remarks on Cernikov p-groups // Ill. J. Math. – 1962. – **6**. – P. 421 – 433.
7. *Мерзляков Ю. И.* Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп // Алгебра и логика. – 1969. – **8**, № 4. – С. 478 – 482.
8. *Измайлов А. Н., Шунков В. П.* Два признака непростоты групп с бесконечно изолированной подгруппой // Там же. – 1982. – **21**, № 6. – С. 647 – 669.
9. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
10. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968. – 130 с.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
12. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
13. *Старостин А. И.* Периодические локально разрешимые вполне расщепляемые группы // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 2. – С. 168 – 177.
14. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. – М.: Наука, 1978. – 235 с.
15. *К теории* конечных групп: Сб. пер. иностр. ст. – М.: Мир, 1979.
16. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 6. – С. 711 – 735.
17. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Там же. – 1975. – **14**, № 5. – С. 576 – 603.

Получено 14.04.2003,
после доработки — 01.03.2004