УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Р. І. Петришин, П. М. Дудницький (Чернівец. нац. ун-т)

ЗВІДНІСТЬ НЕЛІНІЙНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ В ОКОЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ

In the neighborhood of an asymptotically stable integral manifold of multifrequency system with impulse influence at fixed times, we perform the decomposition of equations for angular and positional variables.

В околі асимптотично стійкого інтегрального многовиду багаточастотної системи з імпульсною дією у фіксовані моменти часу здійснено декомпозицію рівнянь для кутових та позиційних змінних.

Дослідження динамічної системи зі сталим вектором частот в околі інваріантного тора проведено в роботах [1, 2], а в статті [3] здійснено розщеплення рівнянь для систем із повільно змінною фазою. Для коливних систем із повільно змінними частотами декомпозицію рівнянь в околі асимптотично стійкого многовиду вивчено в монографії [4]. Відмітимо також монографію [5], в якій детально досліджено питання декомпозиції рухів методом інтегральних многовидів для сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь. У даній статті аналогічні питання вивчаються для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із фіксованими моментами імпульсної дії.

Розглянемо систему $n+m$ звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу $t_\nu = \varepsilon^{-1}\tau_\nu$ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \qquad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta x\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \qquad \Delta\varphi\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \tag{1}$$

де $\tau = \varepsilon t \in \mathbb{R}$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\varepsilon_0 << 1$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$ для всіх $\nu \in Z$, θ — додатне число, D — обмежена область, Z — множина всіх цілих чисел, функції a, b, p, q — 2π-періодичні за кожною із координат φ_j, $j = \overline{1,m}$, вектора φ.

Припустимо, що функції $\dfrac{d^s\omega_r(\tau)}{d\tau^s}$, $s = \overline{0,l}$, $r = \overline{1,m}$, при деякому $l \geq m$ рівномірно неперервні на всій осі і

$$\left\| (V_l^T(\tau)V_l(\tau))^{-1} V_l^T(\tau) \right\| \leq \sigma_1, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де σ_1 — додатна стала, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, а $V_l(\tau)$ і $V_l^T(\tau)$ позначають відповідно матрицю розмірності $l \times m$

$$\left(\frac{d^s\omega_r(\tau)}{d\tau^s} \right)_{s,r=1}^{l,m}$$

і транспоновану матрицю.

Нехай

$$a(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = a^{(1)}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon A(x,\varphi,\tau,\varepsilon),$$
$$p(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = p^{(1)}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon P(x,\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$b(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = b^{(1)}(x, \varphi, \tau) + \varepsilon \tilde{B}(x, \varphi, \tau, \varepsilon),$$

$$q(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = q^{(1)}(x, \varphi, \tau) + \varepsilon \tilde{Q}(x, \varphi, \tau, \varepsilon),$$

$$\left(a^{(1)}, A, p^{(1)}, P, b^{(1)}, \tilde{B}, q^{(1)}, \tilde{Q}\right) \in C^1_\tau\left(G_1, \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cap C^{1+\mu}_{x,\varphi}\left(G_1, \frac{1}{2}\sigma_1\right),$$

$$G_1 = D_1 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0],$$

$$\sum_k \|k\|^\mu \left(\|k\| \sup_{G_1} \|c_k\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial c_k}{\partial x} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial c_k}{\partial \tau} \right\| \right) \le \sigma_1,$$

$$\sum_k \|k\|^{2+\mu} \left(\|k\| \sup_{G_1} \|r_k\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial r_k}{\partial x} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial r_k}{\partial \tau} \right\| \right) \le \sigma_1. \tag{3}$$

Тут $\mu = 1$, $c_k = c_k(x, \tau)$ і $r_k = r_k(x, \tau)$ — коефіцієнти Фур'є 2π-періодичних по φ_j, $j = \overline{1, m}$, $(n + m)$-вимірних вектор-функцій $(a^{(1)}(x, \varphi, \tau), b^{(1)}(x, \varphi, \tau))$ і $(p^{(1)}(x, \varphi, \tau), q^{(1)}(x, \varphi, \tau))$, $C^s_z(G_1, \sigma)$ — множина функцій $f(z, \varepsilon)$, які при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають неперервні по z і обмежені в G_1 сталою σ частинні похідні по z до порядку s.

Розглянемо усереднену по φ систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}^{(1)}(\bar{x}, \tau), \quad \tau \ne \tau_\nu, \quad \Delta \bar{x}\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon \bar{p}^{(1)}(\bar{x}, \tau_\nu), \tag{4}$$

в якій

$$(\bar{a}^{(1)}(\bar{x}, \tau), \bar{p}^{(1)}(\bar{x}, \tau)) = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (a^{(1)}(\bar{x}, \varphi, \tau), p^{(1)}(\bar{x}, \varphi, \tau))\, d\varphi_1 \dots d\varphi_m,$$

і припустимо, що вона має розв'язок $\xi(\tau, \varepsilon)$, який визначається для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і лежить в D разом із своїм ρ-околом, а матрицант $Q(\tau, t, \varepsilon)$ відповідної цьому розв'язку системи у варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau} = H(\tau, \varepsilon) z, \quad \tau \ne \tau_\nu, \quad \Delta z\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu, \varepsilon) z$$

задовольняє нерівність

$$\|Q(\tau, t, \varepsilon)\| \le K e^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \ge t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{5}$$

Тут $K \ge 1$ і $\gamma > 0$ — сталі, не залежні від ε,

$$H(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial \bar{a}^{(1)}(\xi(\tau, \varepsilon), \tau)}{\partial x}, \quad G(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial \bar{p}^{(1)}(\xi(\tau, \varepsilon), \tau)}{\partial x}.$$

На підставі зроблених вище припущень при $\mu = 0$ і за умови

$$\sigma_0 = \frac{K}{\gamma} (\tilde{\sigma}_0 + \theta^{-1} \underset{\sim}{\sigma}_0) < 1, \tag{6}$$

де

$$\tilde{\sigma}_0 = \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial \tilde{a}^{(1)}(x, \varphi, \tau)}{\partial x} \right\|, \quad \underset{\sim}{\sigma}_0 = \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}(x, \varphi, \tau)}{\partial x} \right\|,$$

$$\tilde{a}^{(1)}(x, \varphi, \tau) = a^{(1)}(x, \varphi, \tau) - \bar{a}^{(1)}(x, \tau),$$

$$\tilde{p}^{(1)}(x, \varphi, \tau) = p^{(1)}(x, \varphi, \tau) - \overline{p}^{(1)}(x, \tau),$$

в роботі [6] доведено існування інтегрального многовиду $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (1), причому функція X 2π-періодична по ψ_s, $s = \overline{1, m}$, неперервна по $(\psi, \tau) \in \in \mathbb{R}^m \times \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{\tau_\nu\}$, і задовольняє нерівність

$$\| X(\psi, \tau, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon) \| \leq d_1 \varepsilon^\beta, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0] = G_2$$

зі сталими $d_1 > 0$ та $\beta = (1+l)^{-1}$ і умову Ліпшиця по ψ зі сталою $d_2 \varepsilon^\beta$. Нехай $d_1 \varepsilon_0^\beta < \rho / 2$.

Якщо умови (3) виконуються при $\mu = 1$, то подальше вивчення побудованих в [6] послідовних наближень інтегрального многовиду за розробленою в [4] методикою дослідження інтегрального многовиду гладкої системи вигляду (1) без імпульсної дії дозволяє встановити, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функції X, $\dfrac{\partial X}{\partial \psi}$ і $\dfrac{\partial X}{\partial \tau}$ неперервні по ψ, τ на множині $\mathbb{R}^m \times \overline{\mathbb{R}}$,

$$\left\| \frac{\partial X(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial \psi} \right\| \leq d_2 \varepsilon^\beta, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_2,$$

і $\dfrac{\partial X}{\partial \psi}$ задовольняє умову Ліпшиця по ψ зі сталою $d_2 \varepsilon^\beta$. Крім того, X задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial X}{\partial \psi} \left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X, \psi, \tau, \varepsilon) \right) = a(X, \psi, \tau, \varepsilon) \tag{7}$$

при $(\psi, \tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times \overline{\mathbb{R}} \times (0, \varepsilon_0]$, а на інтегральному многовиді $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (1) рівняння для кутових змінних набирають вигляду

$$\begin{gathered} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \\ \Delta \psi \big|_{\tau = \tau_\nu} = \varepsilon q(X(\psi, \tau_\nu, \varepsilon), \psi, \tau_\nu, \varepsilon). \end{gathered} \tag{8}$$

Для дослідження поведінки системи (1) в околі інтегрального многовиду зручно перейти до нових координат [1]

$$(x, \varphi) \to (y + X(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi).$$

Тут $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $y \in T_{\rho/2}$, де T_α — відкрита куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса α з центром у початку координат.

Лема 1. *При зроблених припущеннях*

$$\begin{gathered} \Delta X(\varphi, \tau, \varepsilon) \big|_{\tau = \tau_s} = \varepsilon p(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon) + \\ + \varepsilon B(y, \varphi, s, \varepsilon)(q(y + X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon) - q(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon)), \end{gathered} \tag{9}$$

де B — матриця розмірності $n \times m$, яка при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ задовольняє нерівності

$$\begin{gathered} \| B(y, \varphi, s, \varepsilon) \| \leq d_2 \varepsilon^\beta, \\ \| B(\overline{y}, \overline{\varphi}, s, \varepsilon) - B(y, \varphi, s, \varepsilon) \| \leq 2 d_2 \varepsilon^\beta (\| \overline{y} - y \| + \| \overline{\varphi} - \varphi \|) \end{gathered} \tag{10}$$

для всіх $y \in T_{\rho/2}$, $\overline{y} \in T_{\rho/2}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\overline{\varphi} \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доведення. Якщо $\varphi(\tau)$ — швидка компонента розв'язку $x(\tau)$, $\varphi(\tau)$ системи (1), то

$$\Delta X(\varphi, \tau, \varepsilon)\big|_{\tau=\tau_s} = X(\varphi(\tau_s + 0), \tau_s + 0, \varepsilon) - X(\varphi, \tau_s, \varepsilon),$$

де $\varphi(\tau_s) = \varphi$.

Для функції X має місце зображення [6]

$$X(\varphi, \tau, \varepsilon) = \xi(\tau, \varepsilon) + \int_{-\infty}^{\tau} Q(\tau, t, \varepsilon)\tilde{F}(\psi_\tau^t(\varphi, \varepsilon), t, \varepsilon)dt + $$
$$+ \varepsilon \sum_{-\infty<\tau_\nu<\tau} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\tilde{\Phi}(\psi_\tau^{\tau_\nu}(\varphi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \tag{11}$$

в якому $(\varphi, \tau, \varepsilon) \in G_2$,

$$\tilde{F}(\psi, t, \varepsilon) = \overline{a}^{(1)}(X(\psi, t, \varepsilon), t) - \overline{a}^{(1)}(\xi(t, \varepsilon), t) - H(t, \varepsilon)(X(\psi, t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)) +$$
$$+ \tilde{a}^{(1)}(X(\psi, t, \varepsilon), \psi, t) + \varepsilon A(X(\psi, t, \varepsilon), \psi, t, \varepsilon),$$
$$\tilde{\Phi}(\psi, t, \varepsilon) = \overline{p}^{(1)}(X(\psi, t, \varepsilon), t) - \overline{p}^{(1)}(\xi(t, \varepsilon), t) - G(t, \varepsilon)(X(\psi, t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)) +$$
$$+ \tilde{p}^{(1)}(X(\psi, t, \varepsilon), \psi, t) + \varepsilon P(X(\psi, t, \varepsilon), \psi, t, \varepsilon),$$

а $\psi_t^\tau(\varphi, \varepsilon)$ — розв'язок системи (8), який при $\tau = t$ набуває значення φ. При зроблених вище припущеннях на гладкість функцій b, q, X по x, φ і досить малому $\varepsilon_0 > 0$ при кожних фіксованих $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in \mathbb{R}$ цей розв'язок $\psi_t^\tau(\varphi, \varepsilon)$ існує, єдиний і визначений для всіх $\tau \in \mathbb{R}$.

Використовуючи рівність [6]

$$Q(\tau_s, t, \varepsilon) = Q(\tau_s + 0, t, \varepsilon) - \varepsilon G(\tau_s, \varepsilon) Q(\tau_s, t, \varepsilon)$$

і формулу (11) при $\tau = \tau_s$, одержуємо

$$X(\varphi, \tau_s, \varepsilon) = \xi(\tau_s, \varepsilon) + \int_{-\infty}^{\tau_s} Q(\tau_s + 0, t, \varepsilon)\tilde{F}(\psi_{\tau_s}^t(\varphi, \varepsilon), t, \varepsilon)dt + $$
$$+ \varepsilon \sum_{-\infty<\tau_\nu<\tau_s+0} Q(\tau_s + 0, \tau_\nu, \varepsilon)\tilde{\Phi}(\psi_{\tau_s}^{\tau_\nu}(\varphi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon) - \varepsilon\tilde{\Phi}(\varphi, \tau_s, \varepsilon) -$$
$$- \varepsilon G(\tau_s, \varepsilon)(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon) - \xi(\tau_s, \varepsilon)). \tag{12}$$

На підставі єдиності розв'язку початкової задачі для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (8) маємо рівності

$$\psi_{\tau_s}^t(\varphi, \varepsilon) = \psi_{\tau_s+0}^t(\psi_{\tau_s}^{\tau_s+0}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) = \psi_{\tau_s+0}^t(\varphi + \varepsilon q(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon), \varepsilon),$$

завдяки яким формула (12) набере вигляду

$$X(\varphi, \tau_s, \varepsilon) = X(\varphi + \varepsilon q(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon), \tau_s + 0, \varepsilon) + \xi(\tau_s, \varepsilon) -$$
$$- \xi(\tau_s + 0, \varepsilon) - \varepsilon\tilde{\Phi}(\varphi, \tau_s, \varepsilon) - \varepsilon G(\tau_s, \varepsilon)(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon) - \xi(\tau_s, \varepsilon)),$$

або

$$X(\varphi, \tau_s, \varepsilon) = X(\varphi + \varepsilon q(X(\varphi, \tau_s, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon), \tau_s + 0, \varepsilon) -$$
$$- \varepsilon p(X(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_s, \varepsilon). \tag{13}$$

Оскільки

$$\varphi(\tau_s+0) = \varphi+\varepsilon q(y+X(\varphi,\tau_s,\varepsilon),\varphi,\tau_s,\varepsilon),$$

то, враховуючи (13), отримуємо рівність

$$\Delta X(\varphi,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\tau_s} = X(\varphi+q^y,\tau_s+0,\varepsilon) - X(\varphi+q^0,\tau_s+0,\varepsilon) + \\ + \varepsilon p(X(\varphi,\tau_s,\varepsilon),\varphi,\tau_s,\varepsilon), \tag{14}$$

де

$$q^z = \varepsilon q(z+X(\varphi,\tau_s,\varepsilon),\varphi,\tau_s,\varepsilon).$$

З формули (14) випливає співвідношення (9) з матрицею

$$B(y,\varphi,s,\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\varphi}X(\varphi+q^0+l(q^y-q^0),\tau_s+0,\varepsilon)\,dl,$$

а нерівності (10) при $\varepsilon_0(\sigma_1+d_2\varepsilon_0^\beta) \le 1$ легко одержати із властивостей матриці $\dfrac{\partial X}{\partial\varphi}$.

Лему доведено.

На підставі рівняння (7) і леми 1 у змінних y, φ система (1) набере вигляду

$$\frac{dy}{d\tau} = a(y+X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon) - a(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon) - \\ - \frac{\partial X(\varphi,\tau,\varepsilon)}{\partial\varphi}\big(b(y+X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon) - b(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon)\big), \quad \tau\ne\tau_\nu,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(y+X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau\ne\tau_\nu, \tag{15}$$

$$\Delta y\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon\big(p(y+X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon) - p(X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon)\big) - \\ - \varepsilon B(y,\varphi,\nu,\varepsilon)\big(q(y+X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon) - q(X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon)\big),$$

$$\Delta\varphi\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(y+X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

де $y\in T_{\rho/2}$, $\varphi\in\mathbb{R}^m$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Ставиться задача: знайти таку функцію $\Phi = \Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon)$, $\Phi(0,\psi,\tau,\varepsilon) = 0$, щоб при заміні

$$y = y, \quad \varphi = \psi + \Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon) \tag{16}$$

повільна компонента y була розв'язком системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dy}{d\tau} = a(y+X(\psi+\Phi,\tau,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau,\varepsilon) - a(X(\psi+\Phi,\tau,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau,\varepsilon) - \\ - \frac{\partial X(\psi+\Phi,\tau,\varepsilon)}{\partial\varphi}\big(b(y+X(\psi+\Phi,\tau,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau,\varepsilon) - \\ - b(X(\psi+\Phi,\tau,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau,\varepsilon)\big), \quad \tau\ne\tau_\nu, \tag{17}$$

$$\Delta y\big|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon\big(p(y+X(\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon) - p(X(\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon)\big) - \\ - \varepsilon B(y,\psi+\Phi,\nu,\varepsilon)\big(q(y+X(\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon) - q(X(\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi+\Phi,\tau_\nu,\varepsilon)\big),$$

а ψ — розв'язком системи (8).

Таким чином, в околі інтегрального многовиду диференціальні рівняння з імпульсною дією для кутових змінних ψ набирають такого ж вигляду, як і рівняння (8) на многовиді.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\Phi(y, \psi, \tau, \varepsilon) = -\int_{\tau}^{\infty}\Big(b\big(y_\tau^t + X(\psi_\tau^t+\Phi(y_\tau^t, \psi_\tau^t, t, \varepsilon), t, \varepsilon), \psi_\tau^t + \Phi(y_\tau^t, \psi_\tau^t, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - b(X(\psi_\tau^t, t, \varepsilon), \psi_\tau^t, t, \varepsilon)\Big)dt - \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu}\Big(q(y_\tau^{\tau_\nu} + X(\psi_\tau^{\tau_\nu} + \Phi(y_\tau^{\tau_\nu}, \psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \psi_\tau^{\tau_\nu} + \Phi(y_\tau^{\tau_\nu}, \psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon) - q(X(\psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{18}$$

в якому $y_t^\tau = y_t^\tau(y, \psi, \varepsilon)$, $\psi_t^\tau = \psi_t^\tau(\psi, \varepsilon)$ — той розв'язок системи (8), (17), який при $\tau = t$ набуває значення y, ψ. Вище відмічалось, що розв'язок $\psi_t^\tau(\psi, \varepsilon)$ системи (8) існує, єдиний і визначений для всіх $\tau\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathbb{R}^m$, $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$. Якщо функція Φ кусково-неперервна по τ з розривами першого роду в точках τ_ν і задовольняє умову Ліпшиця по y, ψ, то завдяки гладкості функцій a, b, p, q в системі (1) по x, φ і належності матриць $\dfrac{\partial X}{\partial\varphi}$, B класу Ліпшиця по y, φ нижче буде встановлено таку сталу $\rho_1 = \rho/2$, що розв'язок $y_t^\tau(y, \psi, \varepsilon)$ системи (17) існує, єдиний і визначений при $\tau\ge t\in\mathbb{R}$, $y\in T_{\rho_1}$, $\psi\in\mathbb{R}^m$, $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$, причому $\left\|y_t^\tau(y, \psi, \varepsilon)\right\| < \rho/2$.

Невідомі функції Φ і y_τ^t будуємо методом послідовних наближень, визначаючи ці наближення формулами

$$\Phi_{j+1}(y, \psi, \tau, \varepsilon) = -\int_{\tau}^{\infty}(b_j - \tilde{b})dt - \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu}(q_{j,\nu} - \tilde{q}_\nu), \tag{19}$$

де

$$b_j = b(y_{\tau,j}^t + X_j, \theta_{\tau,j}^t, t, \varepsilon), \qquad \tilde{b} = b(X(\psi_\tau^t, t, \varepsilon), \psi_\tau^t, t, \varepsilon),$$

$$q_{j,\nu} = q(y_{\tau,j}^{\tau_\nu} + X_{j,\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \qquad \tilde{q}_\nu = q(X(\psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \psi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

$$X_j = X(\theta_{\tau,j}^t, t, \varepsilon), \qquad X_{j,\nu} = X(\theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

$$\theta_{\tau,j}^t = \psi_\tau^t + \Phi_j(y_{\tau,j}^t, \psi_\tau^t, \tau, \varepsilon), \qquad \psi_\tau^t = \psi_\tau^t(\psi, \varepsilon), \qquad \Phi_0 = 0,$$

а $y_{\tau,j}^t = y_{\tau,j}^t(y, \psi, \varepsilon)$, $y_{\tau,j}^\tau(y, \psi, \varepsilon) = y$, є розв'язком системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} \frac{dy_{\tau,j}^t}{dt} &= a_j - \tilde{a}_j - \frac{\partial X_j}{\partial\varphi}(b_j - \tilde{b}_j), \qquad t\ne\tau_\nu, \\ \Delta y_{\tau,j}^t\Big|_{t=\tau_\nu} &= \varepsilon(p_{j,\nu} - \tilde{p}_{j,\nu}) - \varepsilon\tilde{B}_{j,\nu}(b_{j,\nu} - \tilde{b}_{j,\nu}), \end{aligned} \tag{20}$$

в якій

$$a_j = a(y_{\tau,j}^t + X_j, \theta_{\tau,j}^t, t, \varepsilon), \qquad \tilde{a}_j = a(X_j, \theta_{\tau,j}^t, t, \varepsilon),$$

$$p_{j,\nu} = p(y_{\tau,j}^{\tau_\nu} + X_{j,\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \qquad \tilde{p}_{j,\nu} = p(X_{j,\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

$$\tilde{b}_j = b(X_j, \theta_{\tau,j}^t, t, \varepsilon), \qquad b_{j,\nu} = b(y_{\tau,j}^{\tau_\nu} + X_{j,\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

$$\tilde{b}_{j,\nu} = b(X_{j,\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \qquad \tilde{B}_{j,\nu} = B(y_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \theta_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \nu, \varepsilon).$$

Лема 2. *Нехай*:

1) *виконуються умови* (2), (3) *при* $\mu = 1$, (5), (6);

2) *при деякому* $j \geq 0$ *функція* $\Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)$ *кусково-неперервна по* τ *з розривами першого роду при* $\tau = \tau_\nu$ *і задовольняє нерівності*

$$\left\|\Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \leq h_1\|y\|, \qquad \left\|\Phi_j(y, \overline{\psi}, \tau, \varepsilon) - \Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \leq h_2\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|,$$
$$\left\|\Phi_j(\overline{y}, \psi, \tau, \varepsilon) - \Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \leq h_3\|\overline{y} - y\| \tag{21}$$

при $\overline{y} \in T_{\rho_1}$, $y \in T_{\rho_1}$, $\overline{\psi} \in \mathbb{R}^m$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *з деякими сталими* h_1, h_2, h_3.

Тоді для довільних $\gamma_1 \in (0, \gamma(1-\sigma_0))$, $\gamma_2 \in (0, \gamma_1)$ *і* $K_1 \in (K, 2\dot{K})$ *існують такі додатні досить малі* ε_0^* *і* ρ_1^* *та досить велике* h, *залежні від* γ_1, γ_2, K_1, *що при* $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^*$ *і* $\rho_1 \leq \rho_1^*$ *для всіх* $\overline{y} \in T_{\rho_1}$, $y \in T_{\rho_1}$, $\overline{\psi} \in \mathbb{R}^m$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, $t \geq \tau$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справджуються нерівності*

$$\left\|y_{\tau,j}^t(y, \psi, \varepsilon)\right\| < K_1\|y\|e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \tag{22}$$

$$\left\|y_{\tau,j}^t(y, \overline{\psi}, \varepsilon) - y_{\tau,j}^t(y, \psi, \varepsilon)\right\| < h\|y\|e^{-\gamma_2(t-\tau)}\|\overline{\psi} - \psi\|, \tag{23}$$

$$\left\|y_{\tau,j}^t(\overline{y}, \psi, \varepsilon) - y_{\tau,j}^t(y, \psi, \varepsilon)\right\| < K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}\|\overline{y} - y\|. \tag{24}$$

Доведення. Оскільки

$$a(y+X, \varphi, \tau, \varepsilon) - a(X, \varphi, \tau, \varepsilon) = \frac{\partial a(X, \varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial y}y + R_1,$$

$$\frac{\partial a(X, \varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial a(\xi(\tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + R_2,$$

де

$$R_1 = \int_0^1 \left(\frac{\partial a(X+ly, \varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \frac{\partial a(X, \varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial y}\right) dly,$$

$$\|R_1\| \leq \sigma_1\|y\|^2, \qquad \|R_2\| \leq \sigma_1\|X - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq \sigma_1 d_1\varepsilon^\beta,$$

то

$$a(y+X, \varphi, \tau, \varepsilon) - a(X, \varphi, \tau, \varepsilon) = \left(H(\tau, \varepsilon) + \frac{\partial \tilde{a}^{(1)}(\xi(\tau, \varepsilon), \varphi, \tau)}{\partial y}\right)y + R_3,$$

$$\|R_3\| \leq \sigma_1\|y\|\left(\|y\| + d_1\varepsilon^\beta + \varepsilon\right).$$

Аналогічно

$$p(y+X, \varphi, \tau, \varepsilon) - p(X, \varphi, \tau, \varepsilon) = \left(G(\tau, \varepsilon) + \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}(\xi(\tau, \varepsilon), \varphi, \tau)}{\partial y}\right)y + R_4,$$

$$\|R_4\| \le \sigma_1\|y\|\left(\|y\| + d_1\varepsilon^\beta + \varepsilon\right).$$

Тому на підставі нерівностей

$$\left\|\frac{\partial X(\varphi, \tau, \varepsilon)}{\partial\varphi}\right\| \le d_2\varepsilon^\beta, \quad \|B(y, \varphi, \nu, \varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^\beta$$

систему (20) можна записати у вигляді

$$\frac{dy^t_{\tau,j}}{dt} = \left(H(t, \varepsilon) + \frac{\partial\tilde{a}^{(1)}(\xi(t, \varepsilon), \theta^t_{\tau,j}, t)}{\partial y}\right)y^t_{\tau,j} + F_j, \quad t \ne \tau_\nu,$$
$$\Delta y^t_{\tau,j}\Big|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon\left(G(\tau_\nu, \varepsilon) + \frac{\partial\tilde{p}^{(1)}(\xi(\tau_\nu, \varepsilon), \theta^{\tau_\nu}_{\tau,j}, \tau_\nu)}{\partial y}\right)y^{\tau_\nu}_{\tau,j} + F_{j,\nu}, \tag{25}$$

де

$$\left\|F_j\right\| \le \sigma_1\left\|y^t_{\tau,j}\right\|\left(\left\|y^t_{\tau,j}\right\| + (d_1 + d_2)\varepsilon^\beta + \varepsilon\right),$$
$$\left\|F_{j,\nu}\right\| \le \sigma_1\left\|y^{\tau_\nu}_{\tau,j}\right\|\left(\left\|y^{\tau_\nu}_{\tau,j}\right\| + (d_1 + d_2)\varepsilon^\beta + \varepsilon\right).$$

З системи (25) при $t \ge \tau$ одержуємо рівність

$$y^t_{\tau,j} = Q(t, \tau, \varepsilon)y + \int_\tau^t Q(t, l, \varepsilon)\left(\frac{\partial\tilde{a}^{(1)}(\xi(l, \varepsilon), \theta^l_{\tau,j}, l)}{\partial y}y^l_{\tau,j} + F_j\right)dl +$$
$$+ \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t} Q(t, \tau_\nu, \varepsilon)\left(\frac{\partial\tilde{p}(\xi(\tau_\nu, \varepsilon), \theta^{\tau_\nu}_{\tau,j}, \tau_\nu)}{\partial y}y^{\tau_\nu}_{\tau,j} + F_{j,\nu}\right),$$

яка зумовлює таку оцінку для функції $\upsilon^t_{\tau,j} = \left\|y^t_{\tau,j}\right\|e^{\gamma(t-\tau)}$:

$$\upsilon^t_{\tau,j} \le K\|y\| + K\int_\tau^t\left(\tilde{\sigma}_0 + \sigma_1\left(\left\|y^l_{\tau,j}\right\| + (\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + 1)\varepsilon_0^\beta\right)\right)\upsilon^l_{\tau,j}\,dl +$$
$$+ \varepsilon K\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}\left(\sigma_0 + \sigma_1\left(\left\|y^{\tau_\nu}_{\tau,j}\right\| + (\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + 1)\varepsilon_0^\beta\right)\right)\upsilon^{\tau_\nu}_{\tau,j}. \tag{26}$$

Виберемо довільне $K_1 \in (K, 2K)$ і позначимо через $[\tau, \tau + L)$ максимальний півінтервал, для якого

$$\left\|y^t_{\tau,j}\right\| < \frac{K + K_1}{2}\|y\|, \quad t \in [\tau, \tau + L).$$

Тоді, враховуючи припущення $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$, з (26) отримуємо нерівність

$$\upsilon^t_{\tau,j} \le K\left(1 + \varepsilon_0 K\left(\underline{\sigma}_0 + \sigma_1\left(2K\|y\| + (d_1 + d_2 + 1)\varepsilon_0^\beta\right)\right)\right)\|y\| \times$$
$$\times e^{\left(\sigma_0\gamma + K(1+\theta^{-1})\sigma_1\left(2K\|y\| + (d_1+d_2+1)\varepsilon_0^\beta\right)\right)(t-\tau)} \tag{27}$$

при $t \in [\tau, \tau + L)$.

Зафіксуємо довільне додатне $\gamma_1 < \gamma(1 - \sigma_0)$ і по ньому виберемо $\rho_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ настільки малими, щоб

$$2K^2\sigma_1(1 + \theta^{-1})\rho_1 \le \frac{\gamma(1 - \sigma_0) - \gamma_1}{2}, \quad K\sigma_1(1 + \theta^{-1})(d_1 + d_2 + 1)\varepsilon_0^\beta \le \frac{\gamma(1 - \sigma_0) - \gamma_1}{2},$$

$$\varepsilon_0 K^2\Big(\tilde{\sigma}_0+\sigma_1\Big(2K\rho_1+(d_1+d_2+1)\varepsilon_0^{\beta}\Big)\Big) \leq \frac{K_1-K}{3}.$$

Завдяки цим обмеженням нерівність (27) набере вигляду

$$\left\| y^t_{\tau,j} \right\| \leq \frac{2K+K_1}{3}\|y\| e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \quad t \in [\tau, \tau+L).$$

Оскільки

$$\frac{2K+K_1}{3} < \frac{K+K_1}{2} < K_1,$$

то $L=\infty$, що й завершує доведення оцінки (22).

Доведемо тепер нерівність (23). Якщо позначити

$$y^t_{\tau,j}(y,\psi,\varepsilon) = y^t_{\tau,j}, \quad y^t_{\tau,j}(y,\overline{\psi},\varepsilon) = \overline{y}^t_{\tau,j}, \quad X_j = X(\psi^t_\tau+\Phi_j,t,\varepsilon),$$

$$\overline{X}_j = X(\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon), \quad \psi^t_\tau = \psi^t_\tau(\psi,\varepsilon), \quad \overline{\psi}^t_\tau = \psi^t_\tau(\overline{\psi},\varepsilon),$$

$$\Phi_j = \Phi_j(y^t_{\tau,j},\psi^t_\tau,t,\varepsilon), \qquad \overline{\Phi}_j = \Phi_j(\overline{y}^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau,t,\varepsilon),$$

то з (20) одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\overline{y}^t_{\tau,j}-y^t_{\tau,j}) = H(t,\varepsilon)(\overline{y}^t_{\tau,j}-y^t_{\tau,j}) + H_j(t), \quad t \neq \tau_\nu, \\ &\Delta(\overline{y}^t_{\tau,j}-y^t_{\tau,j})\big|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)(\overline{y}^{\tau_\nu}_{\tau,j}-y^{\tau_\nu}_{\tau,j}) + \varepsilon G_{j,\nu}, \end{aligned} \tag{28}$$

де

$$\begin{aligned} H_j(t) = &\int_0^1\left(\frac{\partial a(\overline{X}_j+l\overline{y}^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon)}{\partial y}-H(t,\varepsilon)\right)dl\,(\overline{y}^t_{\tau,j}-y^t_{\tau,j}) + \\ &+\int_0^1\left(\frac{\partial a(\overline{X}_j+ly^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon)}{\partial y}-\frac{\partial a(X_j+ly^t_{\tau,j},\psi^t_\tau+\Phi_j,t,\varepsilon)}{\partial y}\right)dl\,y^t_{\tau,j} - \\ &-\frac{\partial\overline{X}_j}{\partial\varphi}\int_0^1\frac{\partial b(\overline{X}_j+l\overline{y}^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon)}{\partial y}dl\,(\overline{y}^t_{\tau,j}-y^t_{\tau,j}) + \\ &+\left(\frac{\partial\overline{X}_j}{\partial\varphi}-\frac{\partial X_j}{\partial\varphi}\right)\int_0^1\frac{\partial b(\overline{X}_j+l\overline{y}^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon)}{\partial y}dl\,y^t_{\tau,j} + \\ &+\frac{\partial\overline{X}_j}{\partial\varphi}\int_0^1\left(\frac{\partial b(\overline{X}_j+l\overline{y}^t_{\tau,j},\overline{\psi}^t_\tau+\overline{\Phi}_j,t,\varepsilon)}{\partial y}-\frac{\partial b(X_j+ly^t_{\tau,j},\psi^t_\tau+\Phi_j,t,\varepsilon)}{\partial y}\right)dl\,y^t_{\tau,j}. \end{aligned}$$

Функції $G_{j,\nu}$ визначаються такою ж рівністю при $t=\tau_\nu$ та заміною в ній a, $H(t,\varepsilon)$ і $\dfrac{\partial X_j}{\partial\varphi}$ відповідно на p, $G(\tau_\nu,\varepsilon)$ і $\tilde{B}_{j,\nu}$.

У лемі 1 статті [6] при досить малому $\varepsilon_0>0$ встановлено оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\psi^t_\tau(\psi,\varepsilon)-\psi\Big)\right\| \leq c\varepsilon^{\beta}\big(1+|t-\tau|\big)e^{c\varepsilon^{\beta}|t-\tau|}$$

для всіх $t\in\mathbb{R}$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathbb{R}^m$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ з деякою сталою c, не залежною від ε. Звідси випливає, що для довільного як завгодно малого додатного $\tilde{\gamma}_1 < 2$ при $c\varepsilon_0^\beta \le \tilde{\gamma}_1/2$ виконуються нерівності

$$\left\|\psi_\tau^t(\overline{\psi}, \varepsilon) - \psi_\tau^t(\psi, \varepsilon)\right\| \le \left(1 + \frac{2}{\tilde{\gamma}_1} c\varepsilon^\beta e^{\tilde{\gamma}_1|t-\tau|}\right)\|\overline{\psi} - \psi\| \le$$

$$\le 2e^{\tilde{\gamma}_1|t-\tau|}\|\overline{\psi} - \psi\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R}^m, \quad \overline{\psi} \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{29}$$

На підставі зроблених вище припущень і нерівностей (29) знаходимо

$$\begin{aligned} \left\|H_j(t)\right\| &\le (\tilde{\sigma}_0 + c_1\varepsilon_0^\beta + c_2\rho_1)\left\|\overline{y}_{\tau,j}^t - y_{\tau,j}^t\right\| + c_3 e^{-(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)(t-\tau)}\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|, \\ \left\|G_{j,\nu}\right\| &\le (\underset{\sim}{\sigma}_0 + c_1\varepsilon_0^\beta + c_2\rho_1)\left\|\overline{y}_{\tau,j}^{\tau_\nu} - y_{\tau,j}^{\tau_\nu}\right\| + c_3 e^{-(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)(\tau_\nu-\tau)}\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\| \end{aligned} \tag{30}$$

при $t \ge \tau,\ \tau_\nu \ge \tau$ і $\tilde{\gamma}_1 < \gamma_1$, де

$$c_1 = \sigma_1(1 + d_1 + d_2(1 + 4K)), \qquad c_2 = 2K(1 + 3h_3),$$

$$c_3 = 4\sigma_1 d_2(1 + K(1 + \rho)) + 8\sigma_1 K(1 + 2K).$$

Тоді з (28) отримаємо оцінку

$$\left\|\overline{y}_{\tau,j}^t - y_{\tau,j}^t\right\| \le \int_\tau^t \|Q(t, l, \varepsilon)\|\left\|H_j(l)\right\|dl + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \|Q(t, \tau_\nu, \varepsilon)\|\left\|G_{j,\nu}\right\|,$$

з якої згідно з (30) дістаємо

$$u_{\tau,j}^t \le K(\tilde{\sigma}_0 + c_1\varepsilon_0^\beta + c_2\rho_1)\int_\tau^t e^{-(\gamma-\gamma_1+\tilde{\gamma}_1)(t-l)} u_{\tau,j}^l dl + \varepsilon K(\underset{\sim}{\sigma}_0 + c_1\varepsilon_0^\beta + c_2\rho_1) \times$$

$$\times \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} e^{-(\gamma-\gamma_1+\tilde{\gamma}_1)(t-\tau_\nu)} u_{\tau,j}^{\tau_\nu} + \frac{Kc_3(1 + \theta^{-1})e}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1}\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|. \tag{31}$$

Тут

$$u_{\tau,j}^t = \left\|\overline{y}_{\tau,j}^t - y_{\tau,j}^t\right\| e^{(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)(t-\tau)}.$$

Нехай L — довільне додатне число. Позначимо

$$M_L = \sup_{t \in [\tau, \tau+L)} u_{\tau,j}^t.$$

З нерівності (31) випливає нерівність

$$M_L \le \left(\frac{\gamma\sigma_0}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1} + \frac{Kc_1(1 + \theta^{-1})}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1}\varepsilon_0^\beta + \frac{Kc_2(1 + \theta^{-1})}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1}\rho_1 + \right.$$

$$\left. + 2K\theta(\underset{\sim}{\sigma}_0 + c_1 + c_2\rho)\,\varepsilon_0\right)M_L + \frac{Kc_3(1 + \theta^{-1})e}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1}\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|. \tag{32}$$

Оскільки $\gamma_1 < \gamma(1 - \sigma_0)$, то

$$\delta = \frac{\gamma\sigma_0}{\gamma - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1} < 1,$$

тому, вибираючи $\varepsilon_0 > 0$ і $\rho_1 > 0$ настільки малими, що

$$\frac{Kc_1(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1+\tilde{\gamma}_1}\varepsilon_0^{\beta} < \frac{1+3\delta}{4}, \qquad \frac{Kc_2(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1+\tilde{\gamma}_1}\rho_1 < \frac{1+3\delta}{4},$$

$$2K\theta(\underset{\sim}{\sigma}_0+c_1+c_2\rho)\varepsilon_0 < \frac{1+3\delta}{4},$$

з (32) одержуємо нерівність

$$M_L < h\|y\|\|\overline{\psi}-\psi\|$$

або

$$\left\|\overline{y}_{\tau,j}^t - y_{\tau,j}^t\right\| < h\|y\|\|\overline{\psi}-\psi\|e^{-(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)(t-\tau)}, \qquad t \in [\tau, \tau+L),$$

де

$$h = \frac{4Kc_3(1+\theta^{-1})e}{(3+\delta)(\gamma-\gamma_1+\tilde{\gamma}_1)}.$$

Внаслідок довільності $L > 0$ звідси випливає оцінка (23) з $\gamma_2 = \gamma_1 - \tilde{\gamma}_1$ для всіх $t \in [\tau, \infty)$.

Аналогічно обґрунтовується оцінка (24).

Лему доведено.

Позначимо

$$\left\|\Phi_{j+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon) - \Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon)\right\| = \upsilon_j(y,\psi,\tau,\varepsilon)\|y\|, \qquad \upsilon_j(0,\psi,\tau,\varepsilon) = 0,$$

$$\overline{G}_1 = \left\{(y,\psi,\tau,\varepsilon):\ y \in T_{\rho_1},\ \psi \in \mathbb{R}^m,\ \tau \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\right\}.$$

Лема 3. *Якщо виконуються умови леми 2 для всіх $j \geq 0$, то при досить малих $\varepsilon_0 > 0$ і $\rho_1 > 0$ справджується нерівність*

$$\left\|y_{\tau,j+1}^t(y,\psi,\varepsilon) - y_{\tau,j}^t(y,\psi,\varepsilon)\right\| \leq \tilde{h}\|y\|^2 e^{-\gamma_1(t-\tau)}\sup_{\overline{G}_1}\upsilon_j \tag{33}$$

при $t \geq \tau$, $(y,\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$, $j \geq 0$ з деякою сталою $\tilde{h}$, не залежною від j.

Доведення. З системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (20) випливає

$$\frac{d}{dt}(y_{\tau,j+1}^t - y_{\tau,j}^t) = (H(t,\varepsilon)+A_{j+1}(t))(y_{\tau,j+1}^t - y_{\tau,j}^t) + (A_{j+1}(t)-A_j(t))y_{\tau,j}^t, \quad t \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta(y_{\tau,j+1}^t - y_{\tau,j}^t)\Big|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon(G(\tau_\nu,\varepsilon)+A_{j+1,\nu})(y_{\tau,j+1}^{\tau_\nu} - y_{\tau,j}^{\tau_\nu}) + \varepsilon(A_{j+1,\nu}-A_{j,\nu})y_{\tau,j}^{\tau_\nu},$$

де $y_{\tau,s}^t = y_{\tau,s}^t(y,\psi,\varepsilon)$,

$$A_s(t) = \int_0^1\left(\frac{\partial a(X_s+ly_{\tau,s}^t,\ \theta_{\tau,s}^t,\ t,\varepsilon)}{\partial y} - H(t,\varepsilon)\right)dl - \frac{\partial X_s}{\partial\varphi}\int_0^1\frac{\partial b(X_s+ly_{\tau,s}^t,\ \theta_{\tau,s}^t,\ t,\varepsilon)}{\partial y}dl,$$

$$A_{s,\nu} = \int_0^1\left(\frac{\partial p(X_{s,\nu}+ly_{\tau,s}^{\tau_\nu},\ \theta_{\tau,s}^{\tau_\nu},\ \tau_\nu,\varepsilon)}{\partial y} - G(\tau_\nu,\varepsilon)\right)dl -$$

$$- \tilde{B}_{s,\nu}\int_0^1\frac{\partial b(X_{s,\nu}+ly_{\tau,s}^{\tau_\nu},\ \theta_{\tau,s}^{\tau_\nu},\ \tau_\nu,\varepsilon)}{\partial y}dl, \qquad s = j,\ j+1.$$

Тому

$$\left\| y^t_{\tau,j+1} - y^t_{\tau,j} \right\| \le K(\tilde\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \sigma_1(d_1+d_2)\varepsilon_0^\beta + \sigma_1(1+4K)\rho_1) \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t e^{-\gamma(t-l)} \left\| y^l_{\tau,j+1} - y^l_{\tau,j} \right\| dl + \varepsilon K(\underset{\sim}{\sigma}_0 + \varepsilon\sigma_1 + \sigma_1(d_1+d_2)\varepsilon_0^\beta + \sigma_1(1+4K)\rho_1) \times$$

$$\times \sum_{\tau\le\tau_\nu<t} e^{-\gamma(t-\tau_\nu)} \left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,j+1} - y^{\tau_\nu}_{\tau,j} \right\| + 5\sigma_1 K \left(\int\limits_\tau^t e^{-\gamma(t-l)} \left\| \theta^l_{\tau,j+1} - \theta^l_{\tau,j} \right\| \left\| y^l_{\tau,j} \right\| dl + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{\tau\le\tau_\nu<t} e^{-\gamma(t-\tau_\nu)} \left\| \theta^{\tau_\nu}_{\tau,j+1} - \theta^{\tau_\nu}_{\tau,j} \right\| \left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,j} \right\| \right). \tag{34}$$

Оскільки

$$\left\| \theta^l_{\tau,j+1} - \theta^l_{\tau,j} \right\| \le \left\| \Phi_{j+1}(y^l_{\tau,j+1}, \psi^l_\tau, l, \varepsilon) - \Phi_j(y^l_{\tau,j}, \psi^l_\tau, l, \varepsilon) \right\| \le$$

$$\le h_3 \left\| y^l_{\tau,j+1} - y^l_{\tau,j} \right\| + \upsilon_j(y^l_{\tau,j}, \psi^l_\tau, \tau, \varepsilon) \left\| y^l_{\tau,j} \right\|,$$

то з нерівності (34) одержуємо

$$\tilde u^t_{\tau,j} \le K(\tilde\sigma_0 + c_4\varepsilon_0^\beta + c_5\rho_1) \int\limits_\tau^t e^{-(\gamma-\gamma_1)(t-l)} \tilde u^l_{\tau,j}\, dl + \varepsilon K(\underset{\sim}{\sigma}_0 + c_4\varepsilon_0^\beta + c_5\rho_1) \times$$

$$\times \sum_{\tau\le\tau_\nu<t} e^{-(\gamma-\gamma_1)(t-\tau_\nu)} \tilde u^{\tau_\nu}_{\tau,j} + \frac{20e}{\gamma-\gamma_1} K^3 \sigma_1 (1+\theta^{-1}) \|y\|^2 \sup_{\overline{G}_1} \upsilon_j, \tag{35}$$

де

$$c_4 = \sigma_1(1+d_1+d_2), \quad c_5 = \sigma_1(1+4K) + 2Kh_3, \quad \tilde u^t_{\tau,j} = \left\| y^t_{\tau,j+1} - y^t_{\tau,j} \right\| e^{\gamma_1(t-\tau)}.$$

Нерівність (35) має вигляд нерівності (31) з $\tilde\gamma_1 = 0$, тому при

$$\frac{Kc_4(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1}\varepsilon_0^\beta < \frac{1+3\tilde\delta}{4}, \qquad \frac{Kc_5(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1}\rho_1 < \frac{1+3\tilde\delta}{4},$$

$$2K\theta(\underset{\sim}{\sigma}_0 + c_4 + c_5\rho)\varepsilon_0 < \frac{1+3\tilde\delta}{4},$$

де $\tilde\delta = \dfrac{\gamma\sigma_0}{\gamma-\gamma_1} < 1$, із (35) дістанемо нерівність (33) з

$$\tilde h = \frac{80eK^3\sigma_1(1+\theta^{-1})}{(3+\tilde\delta)(\gamma-\gamma_1)}.$$

Лему доведено.

Накладемо далі обмеження

$$c_0 = \frac{K}{\gamma(1-\sigma_0)}(\tilde c_0 + \theta^{-1}\underset{\sim}{c}_0) < 1, \tag{36}$$

в якому

$$\tilde c_0 = \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial \tilde b^{(1)}(x,\varphi,\tau)}{\partial\varphi} \right\|, \qquad \underset{\sim}{c}_0 = \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial \tilde q^{(1)}(x,\varphi,\tau)}{\partial\varphi} \right\|,$$

$\tilde b^{(1)}(x,\varphi,\tau) = b^{(1)}(x,\varphi,\tau) - \overline{b}^{(1)}(x,\tau)$, $\tilde q^{(1)}(x,\varphi,\tau) = q^{(1)}(x,\varphi,\tau) - \overline{q}^{(1)}(x,\tau)$, а

$\overline{b}^{(1)}(x, \tau)$ і $\overline{q}^{(1)}(x, \tau)$ позначають середні по φ в кубі періодів функцій $b^{(1)}(x, \varphi, \tau)$ і $q^{(1)}(x, \varphi, \tau)$.

Дослідимо властивості функціональної послідовності $\{\Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)\}$ на множині $\overline{G}_1$. Для цього подамо функції $b_j - \tilde{b}$ та $q_{j,\nu} - \tilde{q}_\nu$ з формули (19) у вигляді

$$b_j - \tilde{b} = \int_0^1 \left(\frac{\partial b\left(X + l(y^t_{\tau,j} + P_j \Phi_j), \theta^t_{\tau,j}, t, \varepsilon\right)}{\partial y} (y^t_{\tau,j} + P_j \Phi_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial b\left(X, \psi^t_\tau + l\Phi_j, t, \varepsilon\right)}{\partial \varphi} \Phi_j \right) dl,$$

$$q_{j,\nu} - \tilde{q}_\nu = \int_0^1 \left(\frac{\partial q\left(X_{0,\nu} + l(y^{\tau_\nu}_{\tau,j} + P_{j,\nu} \Phi_{j,\nu}), \theta^{\tau_\nu}_{\tau,j}, \tau_\nu, \varepsilon\right)}{\partial y} (y^{\tau_\nu}_{\tau,j} + P_{j,\nu} \Phi_{j,\nu}) + \right. \tag{37}$$

$$\left. + \frac{\partial q\left(X_{0,\nu}, \psi^{\tau_\nu}_\tau + l\Phi_{j,\nu}, \tau_\nu, \varepsilon\right)}{\partial \varphi} \Phi_{j,\nu} \right) dl,$$

де

$$X = X(\psi^t_\tau, t, \varepsilon), \quad \Phi_j = \Phi_j(y^t_{\tau,j}, \psi^t_\tau, t, \varepsilon), \quad P_j = \int_0^1 \frac{\partial X(\psi^t_\tau + l\Phi_j, t, \varepsilon)}{\partial \varphi} dl,$$

$$X_{0,\nu} = X\big|_{t=\tau_\nu}, \quad \Phi_{j,\nu} = \Phi_j\big|_{t=\tau_\nu}, \quad P_{j,\nu} = P_j\big|_{t=\tau_\nu},$$

Оскільки $\Phi_0 = 0$ задовольняє умову 2 леми 2, то функція $y^t_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon)$ справджує нерівності (22) – (24) при $j = 0$. Завдяки цьому з (19) і (37) при $j = 0$ та (29) одержуємо нерівності

$$\|\Phi_1(y, \psi, \tau, \varepsilon)\| \le \sigma_1 \int_\tau^\infty \|y^t_{\tau,0}\| dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{\tau \le \tau_\nu} \|y^{\tau_\nu}_{\tau,0}\| \le$$

$$\le \sigma_1 K_1 \gamma_1^{-1}(1 + \theta^{-1}(1 + \gamma_1 \theta \varepsilon_0)) \|y\| \le h_1 \|y\|,$$

$$\|\Phi_1(\overline{y}, \psi, \tau, \varepsilon) - \Phi_1(y, \psi, \tau, \varepsilon)\| \le \sigma_1 \int_\tau^\infty \left\| y^t_{\tau,0}(\overline{y}, \psi, \varepsilon) - y^t_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon) \right\| \times$$

$$\times \left(1 + \left\|y^t_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon)\right\|\right) dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{\tau \le \tau_\nu} \left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(\overline{y}, \psi, \varepsilon) - y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon) \right\| \left(1 + \left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon)\right\|\right) \le$$

$$\le \sigma_1 K_1 \gamma_1^{-1}(1 + K_1\rho)(1 + \theta^{-1}(1 + \gamma_1 \theta \varepsilon_0)) \|\overline{y} - y\| \le h_3 \|\overline{y} - y\|,$$

$$\|\Phi_1(y, \overline{\psi}, \tau, \varepsilon) - \Phi_1(y, \psi, \tau, \varepsilon)\| \le \sigma_1 \int_\tau^\infty \left(2\left\| y^t_{\tau,0}(y, \overline{\psi}, \varepsilon) - y^t_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon)\right\| + \right.$$

$$+ (1 + d_2 \varepsilon_0^\beta) \left\| \psi^t_\tau(\overline{\psi}, \varepsilon) - \psi^t_\tau(\psi, \varepsilon) \right\| \left\| y^t_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon) \right\| \Big) dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{\tau \le \tau_\nu} \Big(2\left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(y, \overline{\psi}, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon) \right\| + (1 + d_2 \varepsilon_0^\beta) \left\| \psi^{\tau_\nu}_\tau(\overline{\psi}, \varepsilon) - \psi^{\tau_\nu}_\tau(\psi, \varepsilon) \right\| \left\| y^{\tau_\nu}_{\tau,0}(y, \psi, \varepsilon) \right\| \Big) \le$$

$$\leq \left[\frac{2}{\gamma_2}\sigma_1 h(1+\theta^{-1}(1+\gamma_2\theta\varepsilon_0)) + \frac{2}{\gamma_1-\tilde{\gamma}_1}K_1\sigma_1(1+d_2\varepsilon_0^{\beta}) \times \right.$$

$$\left. \times\ (1+\theta^{-1}(1+\theta(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)\varepsilon_0))\right]\|y\|\|\overline{\psi}-\psi\| \leq h_2\|y\|\|\overline{\psi}-\psi\|.$$

Сталі h_1, h_2, h_3 означимо нижче.

Нехай тепер нерівності (21) виконуються для $j = \overline{0, s}$, де s — деяке натуральне число. Згідно з лемою 2 оцінки (22) – (24) мають місце при $j = s$. Розглянемо далі формули (19) і (37) при $j = s$. Тоді отримаємо нерівність

$$\|\Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq \int_{\tau}^{\infty}\left(\sigma_1\|y_{\tau,s}^{t}\| + (\sigma_1 d_2\varepsilon_0^{\beta}+\tilde{c}_0)\|\Phi_s\|\right)dt +$$

$$+\ \varepsilon\sum_{\tau\leq\tau_\nu}\left(\sigma_1\|y_{\tau,s}^{\tau_\nu}\| + (\sigma_1 d_2\varepsilon_0^{\beta}+\underline{c}_0)\|\Phi_{s,\nu}\|\right).$$

Оскільки

$$\|\Phi_s\| \leq h_1\|y_{\tau,s}^{t}\|, \qquad \|\Phi_{s,\nu}\| \leq h_1\|y_{\tau,s}^{\tau_\nu}\|,$$

то на підставі оцінки (22) при $j = s$ одержимо

$$\|\Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq \left[\sigma_1 K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + (\sigma_1 d_2\varepsilon_0^{\beta}(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + \right.$$

$$\left. +\ \underline{c}_0\gamma_1\varepsilon_0+\tilde{c}_0+\theta^{-1}\underline{c}_0)K_1 h_1\gamma_1^{-1}\right]\|y\|. \tag{38}$$

Покладемо $K_1 = K_1^* = K+\mu$, $\gamma_1 = \gamma_1^* = \gamma(1-\sigma_0)-\mu$, а додатне μ виберемо настільки малим, щоб з урахуванням (36) виконувалась нерівність

$$\frac{(K+\mu)(\tilde{c}_0+\theta^{-1}\underline{c}_0)}{\gamma(1-\sigma_0)-\mu} \leq \frac{1+2c_0}{3}.$$

Згідно з лемою 2 за даними K_1 і γ_1 виберемо ε_0^* і ρ_1^* так, щоб справджувалась нерівність (22). Крім того, за рахунок малості ε_0 доб'ємося виконання нерівності

$$\sigma_1 d_2 K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1)\varepsilon_0^{\beta} + \underline{c}_0 K_1\varepsilon_0 \leq \frac{1-c_0}{3}.$$

Тоді з (38) дістанемо

$$\|\Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq \left(\sigma_1 K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + \frac{2+c_0}{3}h_1\right)\|y\|,$$

або

$$\|\Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq h_1\|y\|, \quad (y,\psi,\tau,\varepsilon)\in\overline{G}_1, \tag{39}$$

де

$$h_1 = 3(1-c_0)^{-1}\sigma_1 K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1).$$

Вважаючи, що $d_2\varepsilon_0^{\beta} \leq 1$, із співвідношень (19) і (37) знаходимо

$$\|\Phi_{s+1}(\overline{y},\psi,\tau,\varepsilon)-\Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq \int_{\tau}^{\infty}\left[c_6\|\underline{y}_{\tau,s}^{t}-y_{\tau,s}^{t}\| + (c_7(\rho_1+d_2\varepsilon_0^{\beta}) + \right.$$

$$+ \tilde{c}_0)\left\|\Phi_s(\underline{y}^t_{\tau,s}, \psi^t_\tau, t, \varepsilon) - \Phi_s(y^t_{\tau,s}, \psi^t_\tau, t, \varepsilon)\right\|\Big]dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu} \Big[c_6 \left\|\underline{y}^{\tau_\nu}_{\tau,s} - y^{\tau_\nu}_{\tau,s}\right\| + (c_7(\rho_1 + d_2\varepsilon_0^\beta) +$$

$$+ \underline{c}_0)\left\|\Phi_s(\underline{y}^{\tau_\nu}_{\tau,s}, \psi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon) - \Phi_s(y^{\tau_\nu}_{\tau,s}, \psi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\right\|\Big],$$

де

$$c_6 \le \sigma_1(K_1\rho(1+h_1)+1), \qquad c_7 = \sigma_1((1+K_1\rho h_1)K_1\rho(1+h_1)+2K_1h_1+1),$$

$$\underline{y}^t_{\tau,s} = y^t_{\tau,s}(\overline{y}, \psi, \varepsilon), \qquad y^t_{\tau,s} = y^t_{\tau,s}(y, \psi, \varepsilon), \qquad \psi^t_\tau = \psi^t_\tau(\psi, \varepsilon).$$

Згідно з нерівностями (21) і (24) при $j = s$ маємо

$$\left\|\Phi_{s+1}(\overline{y}, \psi, \tau, \varepsilon) - \Phi_{s+1}(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le \Big[c_6 K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + (K_1\gamma_1^{-1}(\tilde{c}_0 + \theta^{-1}\underline{c}_0) +$$

$$+ c_7(\rho_1 + d_2\varepsilon_0^\beta)K_1\gamma_1^{-1}h_1(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + \underline{c}_0 K_1\varepsilon_0)h_3\Big]\|\overline{y} - y\|. \tag{40}$$

Якщо вибрати $K_1 = K_1^*$ і $\gamma_1 = \gamma_1^*$, а ρ_1 і ε_0 настільки малими, що

$$c_7(\rho_1 + d_2\varepsilon_0^\beta)K_1\gamma_1^{-1}h_1(1+\theta^{-1}+\gamma_1) + \underline{c}_0 K_1\varepsilon_0 \le \frac{1-c_0}{3},$$

то з нерівності (40) отримаємо оцінку

$$\left\|\Phi_{s+1}(\overline{y}, \psi, \tau, \varepsilon) - \Phi_{s+1}(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le h_3\|\overline{y} - y\| \tag{41}$$

для всіх $(y, \psi, \tau, \varepsilon) \in \overline{G}_1$, $\overline{y} \in T_{\rho_1}$ зі сталою

$$h_3 = 3(1-c_0)^{-1}c_6K_1\gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1).$$

Нарешті, на підставі рівностей (37) і оцінок (22) – (24) при $j = s$ та (29) із (19) дістанемо нерівність

$$\left\|\Phi_{s+1}(y, \overline{\psi}, \tau, \varepsilon) - \Phi_{s+1}(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le (c_8\rho_1 + \sigma_1 d_2\varepsilon_0^\beta + \tilde{c}_0)\int_\tau^\infty u_s(t)\,dt +$$

$$+ \varepsilon(c_8\rho_1 + \sigma_1 d_2\varepsilon_0^\beta + \underline{c}_0)\sum_{\tau \le \tau_\nu} u_s(\tau_\nu) + c_9\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|, \tag{42}$$

в якій

$$c_8 = \sigma_1 K_1(2h + h_1 + 2), \quad c_9 = \sigma_1 K_1(\gamma_1 - \tilde{\gamma}_1)^{-1}(6h_1 + 4(1+h)(1+K_1h_1\rho) +$$

$$+ h\rho(1+h))(1+\theta^{-1}+\gamma_1 - \tilde{\gamma}_1) + \sigma_1 h\gamma_2^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_2),$$

$$u_s(t) = \left\|\Phi_s(y^t_{\tau,s}(y, \overline{\psi}, \varepsilon), \psi^t_\tau(\overline{\psi}, \varepsilon), t, \varepsilon) - \Phi_s(y^t_{\tau,s}(y, \psi, \varepsilon), \psi^t_\tau(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon)\right\|.$$

Оскільки

$$u_s(t) \le h_2\left\|y^t_{\tau,s}(y, \overline{\psi}, \varepsilon)\right\|\left\|\psi^t_\tau(\overline{\psi}, \varepsilon) - \psi^t_\tau(\psi, \varepsilon)\right\| + h_3\left\|y^t_{\tau,s}(y, \overline{\psi}, \varepsilon) - y^t_{\tau,s}(y, \psi, \varepsilon)\right\| \le$$

$$\le \Big[K_1h_2(1 + 2c\tilde{\gamma}_1^{-1}\varepsilon^\beta e^{-\tilde{\gamma}_1(t-\tau)})e^{-\gamma_1(t-\tau)} + hh_3e^{-\gamma_2(t-\tau)}\Big]\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\|,$$

то з (42) одержимо оцінку

$$\left\|\Phi_{s+1}(y, \overline{\psi}, \tau, \varepsilon) - \Phi_{s+1}(y, \psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le \Big[c_{10}(c_{11}\rho_1 + c_{12}\varepsilon_0^\beta +$$

$$+ K_1\gamma_1^{-1}(\tilde{c}_0 + \theta^{-1}\underline{c}_0))h_2\Big]\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\| \tag{43}$$

зі сталими

$$c_{10} = c_9 + hh_3\gamma_2^{-1}\Big[(c_8\rho+\sigma_1)(1+\theta^{-1}+\gamma_2)+\tilde{c}_0+\underset{\sim}{c}_0(\theta^{-1}+\gamma_2)\Big],$$

$$c_{11} = K_1 c_8 \gamma_1^{-1}(1+\theta^{-1}+\gamma_1),$$

$$c_{12} = K_1\Big[\underset{\sim}{c}_0 h_2 + \sigma_1 d_2(1+\theta^{-1}+\gamma_1)\gamma_1^{-1} + 2c\gamma_1^{-1}(\gamma_1-\tilde{\gamma}_1)^{-1}(1+\theta^{-1} + \gamma_1-\tilde{\gamma}_1)(c_8\rho+\sigma_1+\tilde{c}_0+\underset{\sim}{c}_0(\theta^{-1}+\gamma_1-\tilde{\gamma}_1))\Big].$$

Припустимо, що

$$\rho_1 \le \frac{1-c_0}{6c_{11}}, \quad \varepsilon_0^\beta \le \frac{1-c_0}{6c_{12}},$$

і покладемо

$$K_1 = K_1^*, \quad \gamma_1 = \gamma_1^*, \quad h_2 = \frac{3c_{10}}{1-c_0}.$$

Тоді з нерівності (43) випливає оцінка

$$\|\Phi_{s+1}(y,\overline{\psi},\tau,\varepsilon) - \Phi_{s+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \le h_2\|y\|\|\overline{\psi}-\psi\| \tag{44}$$

для $(y,\psi,\tau,\varepsilon)\in\overline{G}_1$, $\overline{\psi}\in\mathbb{R}^m$.

Таким чином, на підставі нерівностей (39), (41), (44) та методу математичної індукції можна стверджувати, що нерівності (21) виконуються для всіх $j \ge 0$ при відповідному виборі малих $\rho_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$.

Оскільки функції a, b, p, q в системі (1) і функція X, яка визначає інтегральний многовид цієї системи, 2π-періодичні по φ_r, $r = \overline{1,m}$, а

$$\psi_\tau^t(\psi+2\pi e_\mu,\varepsilon) = 2\pi e_\mu + \psi_\tau^t(\psi,\varepsilon),$$

$$\psi\in\mathbb{R}^m,\ \mu = \overline{1,m},\ \tau\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

де $e_\mu = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ — μ-й орт простору $\mathbb{R}^m$, то кожна з функцій Φ_j, $j\ge 0$, є 2π-періодичною по ψ_r, $r = \overline{1,m}$.

Дослідимо збіжність функціональної послідовності $\{\Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon)\}$ на множині $\overline{G}_1$. З (19) при $j\ge 1$ маємо рівність

$$\Phi_{j+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon) - \Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon) = -\int_\tau^\infty (b_j-b_{j-1})dt - \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu}(q_{j,\nu}-q_{j-1,\nu}),$$

яка з урахуванням нерівностей

$$\|X_j - X_{j-1}\| \le d_2\varepsilon_0^\beta\|\theta_{\tau,j}^t - \theta_{\tau,j-1}^t\|,$$

$$\|\theta_{\tau,j}^t - \theta_{\tau,j-1}^t\| \le \|y_{\tau,j}^t\|\sup_{\overline{G}_1} v_{j-1} + h_2\|y_{\tau,j}^t - y_{\tau,j-1}^t\|$$

зумовлює оцінку

$$\|\Phi_{j+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon) - \Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_1(1+2h_2)\left(\int_\tau^\infty\|y_{\tau,j}^t - y_{\tau,j-1}^t\|dt + \varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu}\|y_{\tau,j}^{\tau_\nu} - y_{\tau,j-1}^{\tau_\nu}\|\right) + (\sigma_1 d_2\varepsilon_0^\beta+\tilde{c}_0)\int_\tau^\infty\|y_{\tau,j}^t\|dt\sup_{\overline{G}_1} v_{j-1} +$$

$$+ \ (\sigma_1 d_2 \varepsilon_0^\beta + \underset{\sim}{c}_0) \sum_{\tau \le \tau_\nu} \left\| y_{\tau,j}^{\tau_\nu} \right\| \sup_{\overline{G}_1} v_{j-1}.$$

На підставі означення функції $v_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)$, оцінки (22) і леми 3 одержимо нерівність

$$\sup_{\overline{G}_1} v_j \le \Big[\sigma_1 \gamma_1^{-1} \tilde{h}(1+2h_2)(1+\theta^{-1}+\gamma_1)\|y\| + \sigma_2 d_2 (1+\theta^{-1}+\gamma_1)\varepsilon_0^\beta + \\ + \underset{\sim}{c}_0 K_1 \varepsilon_0 + (\tilde{c}_0 + \theta^{-1}\underset{\sim}{c}_0) K_1 \gamma_1^{-1}\Big] \sup_{\overline{G}_1} v_{j-1}, \quad j \ge 1. \tag{45}$$

Якщо вважати, що $K_1 = K_1^*$, $\gamma_1 = \gamma_1^*$ і

$$\sigma_1 \gamma_1^{-1} \tilde{h}(1+2h_2)(1+\theta^{-1}+\gamma_1)\rho_1 \le \frac{1-c_0}{6}, \ \sigma_1 d_2 (1+\theta^{-1}+\gamma_1)\varepsilon_0^\beta + \underset{\sim}{c}_0 K_1 \varepsilon_0 \le \frac{1-c_0}{6},$$

то нерівність (45) набере вигляду

$$\sup_{\overline{G}_1} v_j \le \frac{c_0+2}{3} \sup_{\overline{G}_1} v_{j-1}, \quad j \ge 1. \tag{46}$$

У зв'язку з тим, що

$$\frac{c_0+2}{3} < 1, \quad \sup_{\overline{G}_1} v_0 \le h_1, \quad \left\| \Phi_{j+1}(y,\psi,\tau,\varepsilon) - \Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon) \right\| = \|y\| v_j(y,\psi,\tau,\varepsilon),$$

з рівності (46) дістанемо рівномірну збіжність функціональної послідовності $\{\Phi_j(y, \psi, \tau, \varepsilon)\}$ на множині $\overline{G}_1$ до граничної функції

$$\{\Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon)\} = \lim_{j\to\infty} \{\Phi_j(y,\psi,\tau,\varepsilon)\},$$

причому функція Φ 2π-періодична по ψ_r, $r = \overline{1, m}$, кусково-неперервна по τ з розривами першого роду в точках τ_ν і згідно з (21) задовольняє нерівності

$$\|\Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \le h_1\|y\|, \quad \|\Phi(\overline{y},\psi,\tau,\varepsilon) - \Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \le h_2\|\overline{y} - y\|, \\ \|\Phi(y,\overline{\psi},\tau,\varepsilon) - \Phi(y,\psi,\tau,\varepsilon)\| \le h_3\|y\|\|\overline{\psi} - \psi\| \tag{47}$$

при $(y,\psi,\tau,\varepsilon) \in \overline{G}_1$, $\overline{y} \in T_{\rho_1}$, $\overline{\psi} \in \mathbb{R}^m$.

З леми 3 випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} y_{\tau,j}^t(y,\psi,\varepsilon) = y_\tau^t(y,\psi,\varepsilon)$$

рівномірно по $(y,\psi,\tau,\varepsilon) \in \overline{G}_1$ і $\tau \in \mathbb{R}$ при $t \ge \tau$. Тоді граничний перехід при $j \to \infty$ у (19), (20) веде до співвідношень (17), (18).

Нехай $\mathbb{R} \ni \overline{\tau}$ — довільне фіксоване число. Розглянемо розв'язок $y_{\overline{\tau}}^\tau(y,\psi,\varepsilon)$, $\psi_{\overline{\tau}}^\tau(\psi,\varepsilon)$ системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (8), (17) з $y \in T_{\rho_1}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\tau \ge \overline{\tau}$. На підставі єдиності розв'язку початкової задачі справджуються тотожності

$$y_\tau^t\Big(y_{\overline{\tau}}^\tau(y,\psi,\varepsilon), \psi_{\overline{\tau}}^\tau(\psi,\varepsilon), \varepsilon\Big) = y_{\overline{\tau}}^t(y,\psi,\varepsilon), \qquad \psi_\tau^t\Big(\psi_{\overline{\tau}}^\tau(\psi,\varepsilon), \varepsilon\Big) = \psi_{\overline{\tau}}^t(\psi,\varepsilon)$$

для всіх $t \ge \tau \ge \overline{\tau}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $y \in T_{\rho_1}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тоді, враховуючи рівність

$$\psi_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon) = \psi + \int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\left(\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\Big(X(\psi_{\bar\tau}^{l}(\psi,\varepsilon), l, \varepsilon), \psi_{\bar\tau}^{l}(\psi,\varepsilon), l, \varepsilon\Big)\right)dl \; +$$

$$+\; \varepsilon \sum_{\bar\tau\le\tau_\nu<\tau} q\Big(X\,(\psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\Big),$$

яка випливає з (8), і формулу (18), одержуємо

$$\psi_{\bar\tau}^{\tau} + \Phi(y_{\bar\tau}^{\tau}, \psi_{\bar\tau}^{\tau}, \tau, \varepsilon) = \psi + \Phi(y, \psi, \bar\tau, \varepsilon) \; +$$

$$+ \int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\left(\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\Big(y_{\bar\tau}^{l} + X\Big(\psi_{\bar\tau}^{l} + \Phi(y_{\bar\tau}^{l}, \psi_{\bar\tau}^{l}, l, \varepsilon), l, \varepsilon\Big), \psi_{\bar\tau}^{l} + \Phi(y_{\bar\tau}^{l}, \psi_{\bar\tau}^{l}, l, \varepsilon), l, \varepsilon\Big)\right)dl \; +$$

$$+\; \varepsilon \sum_{\bar\tau\le\tau_\nu<\tau} q\Big(y_{\bar\tau}^{\tau_\nu} + X\Big(\psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu} + \Phi(y_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\Big), \psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu} + \Phi(y_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \psi_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon\Big), \tag{48}$$

де $\psi_{\bar\tau}^{\tau} = \psi_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon)$, $y_{\bar\tau}^{\tau} = y_{\bar\tau}^{\tau}(y,\psi,\varepsilon)$.

Але функція $\varphi_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon)$ з $\varphi = \psi + \Phi(y,\psi,\bar\tau,\varepsilon)$, що міститься у правій частині рівності (48), є швидкою компонентою розв'язку $y_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon)$, $\varphi_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon)$ системи (15). Отже, суть заміни (16) полягає в тому, що коли $y_{\bar\tau}^{\tau}(y,\psi,\varepsilon)$, $\psi_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon)$ є розв'язком системи (8), (17) при $\tau \ge \bar\tau$, $y \in T_{\rho_1}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, то відповідний йому розв'язок $y_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon)$, $\varphi_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon)$ системи (15) визначається умовами

$$\varphi_{\bar\tau}^{\tau}(y,\varphi,\varepsilon) = \psi_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon) + \Phi(y_{\bar\tau}^{\tau}(y,\psi,\varepsilon), \psi_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon), \tau, \varepsilon), \quad \varphi = \psi + \Phi(y,\psi,\bar\tau,\varepsilon).$$

Нарешті, покажемо, що відображення $(y,\varphi) \to (y,\psi)$, яке визначається заміною (16), є ліпшицевим гомеоморфізмом області $T_{\rho_1} \times \mathbb{R}^m$ на себе при кожних фіксованих $\tau \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Для цього досить довести, що ψ із (16) однозначно визначається за формулою

$$\psi = \varphi + \Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)$$

з функцією Ψ, яка задовольняє умову Ліпшиця по y і φ в області $\overline{G_1}$. Для знаходження Ψ маємо рівняння

$$\Psi = -\,\Phi(y, \varphi + \Psi, \tau, \varepsilon), \tag{49}$$

яке розв'язуємо методом послідовних наближень:

$$\Psi_{j+1} = -\,\Phi(y, \varphi + \Psi_j, \tau, \varepsilon), \qquad j \ge 0, \qquad \Psi_0 = 0. \tag{50}$$

На підставі (47) з (50) дістанемо нерівності

$$\left\|\Psi_{j+1} - \Psi_j\right\| \le h_3\|y\|\left\|\Psi_j - \Psi_{j-1}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\Psi_j - \Psi_{j-1}\right\|$$

при $\rho_1 \le (2h_3)^{-1}$ і $j \ge 1$. Звідси випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \Psi_j(y,\varphi,\tau,\varepsilon) = \Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)$$

рівномірно по $(y,\varphi,\tau,\varepsilon) \in \overline{G_1}$ при $\rho_1 \le (2h_3)^{-1}$. Отже, так побудована функція $\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)$ є розв'язком рівняння (49), і з урахуванням (47) для неї маємо нерівності

$$\|\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\| \leq h_1\|y\|, \quad \|\Psi(\bar{y},\varphi,\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\| \leq$$

$$\leq h_2\|\bar{y}-y\| + h_3\rho_1\|\Psi(\bar{y},\varphi,\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\|,$$

$$\|\Psi(y,\bar{\varphi},\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\| \leq h_3\|y\|\left(\|\bar{\varphi}-\varphi\|+\|\Psi(y,\bar{\varphi},\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\|\right)$$

для всіх $(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\in\overline{G_1}$, $\bar{y}\in T_{\rho_1}$, $\bar{\varphi}\in\mathbb{R}^m$. Звідси знаходимо

$$\|\Psi(\bar{y},\varphi,\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\| \leq 2h_2\|\bar{y}-y\|,$$

$$\|\Psi(y,\bar{\varphi},\tau,\varepsilon)-\Psi(y,\varphi,\tau,\varepsilon)\| \leq 2h_3\|y\|\|\bar{\varphi}-\varphi\|.$$

Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема. *Якщо виконуються умови* (2), (3) *при* $\mu = 1$, (5), (6) *і* (36), *то можна вказати такі сталі* $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ *і* $\tilde{\rho}_1 > 0$, *що при* $\varepsilon_0 \leq \tilde{\varepsilon}_0$ *і* $\rho_1 \leq \tilde{\rho}_1$ *існує заміна змінних* (16), *яка визначає ліпшицевий гомеоморфізм області* $T_{\rho_1}\times\mathbb{R}^m$ *на себе і зводить систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією* (15) *до вигляду* (8), (17), *причому функція* Φ — *кусково-неперервна по* τ *з розривами першого роду при* $\tau=\tau_\nu$, 2π*-періодична по* ψ_s, $s=\overline{1,m}$, *і задовольняє нерівності* (47).

1. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
2. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия // Укр. мат. журн. – 1991. – **42**, № 4. – С. 530 – 537.
3. *Самойленко А. М., Свищук М. Я.* О расщеплении системы дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора // Там же. – 1985. – **37**, № 6. – С. 751 – 756.
4. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
5. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
6. *Самойленко А. М., Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Побудова інтегрального многовиду багаточастотної коливної системи з фіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 641 – 662.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287.

Одержано 19.03.2004