УДК 517.956

С. А. Алдашев (Казах. акад. трансп. и коммуникаций, Алматы)

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

We obtain a criterion of the uniqueness of regular solution of the Darboux – Protter problem for multidimensional hyperbolic equations with the Chaplygin operator. We also prove the theorem on the uniqueness of solution of the adjoint problem.

Отримано критерій єдиності регулярного розв'язку задачі Дарбу – Проттера для багатовимірних гіперболічних рівнянь з оператором Чаплигіна, а також доведено теорему єдиності розв'язку спряженої до неї задачі.

Задачи Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены [1, 2]. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены М. Н. Проттером [3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования изучение задач Дарбу – Проттера для многомерных гиперболических уравнений требует специальных исследований и привлечения новых методов, поэтому в этом направлении опубликовано мало работ (см. [4]). В данной статье предложен метод исследования многомерных гиперболических задач, в частности, получен критерий единственности регулярного решения задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, а также доказана теорема единственности решения сопряженной к ней задачи.

1. Постановки задач и основные результаты. Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\,d\xi + \varepsilon$, $|x| = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\,d\xi$ и плоскостью $t = 0$, $0 \le t \le t_0$; $t_0 : \dfrac{(1-\varepsilon)}{2} = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\xi)}\,d\xi$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, а $0 \le \varepsilon < 1$.

Части этих поверхностей, образующие границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим взаимно сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* v \equiv g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \tag{1*}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C^2((0, t_0)) \cap C([0, t_0])$, $d(x,t) = c -$

$-\sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

Следует отметить, что уравнения (1) встречаются при математическом моделировании процессов взрыва горных пород [5, 6].

Рассмотрим следующие задачи Дарбу – Проттера для уравнения (1).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = 0, \quad u\big|_{S_\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

или

$$u_t\big|_S = 0, \quad u\big|_{S_\varepsilon} = 0. \tag{3}$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = 0, \quad u\big|_{S_1} = 0 \tag{4}$$

или

$$u_t\big|_S = 0, \quad u\big|_{S_1} = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, сохранив обозначения, использованные в [4, 7].

Пусть Ω_ε — проекция области D_ε на плоскость (r, t) с границами

$$\Gamma_\varepsilon : r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi + \varepsilon, \quad \Gamma_1 : r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi \quad \text{и} \quad \Gamma : t = 0, \quad \varepsilon \leq r \leq 1.$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространство Соболева.

Если $a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geq m+1$, то справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При* $\varepsilon = 0$ *решение задачи* 1 *имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Теорема 2. *Решение задачи* 1 $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon \geq 0$ *решение задачи* 2 *тривиально.*

Отметим, что при $g(t) = t^p$, $p = \text{const} \geq 0$ эти теоремы установлены в [7 – 10]. Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\,\rho(\theta)$, $a_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon = 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Ее решение в сферических координатах будем искать в виде ряда

$$\upsilon(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{\upsilon}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Тогда, как и в [4, 7], для $\overline{v}_n^k$ получим ряд

$$g(t)\rho_0^1\overline{v}_{0rr}^1 - \rho_0^1\overline{v}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=0}^m \hat{a}_{i0}^1\right)\overline{v}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\overline{v}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\overline{v}_0^1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k g(t)\overline{v}_{nrr}^k - \rho_n^k\overline{v}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k g(t) + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k\right)\overline{v}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\overline{v}_{nt}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t) + \sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k - n\hat{a}_{in}^k)\right]\overline{v}_n^k\right\} = 0, \qquad \lambda_n = n(n+m-2). \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\overline{v}_{0rr}^1 - \rho_0^1\overline{v}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 g(t)\overline{v}_{0r}^1 = 0, \tag{8}$$

$$\rho_1^k g(t)\overline{v}_{1rr}^k - \rho_1^k\overline{v}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k g(t)\overline{v}_{1r}^k + \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k g(t)\overline{v}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\overline{v}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\overline{v}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\overline{v}_0^1\right), \qquad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{9}$$

$$\rho_n^k g(t)\overline{v}_{nrr}^k - \rho_n^k\overline{v}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k g(t)\overline{v}_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k g(t)\overline{v}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m \hat{a}_{in-1}^k\overline{v}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k\overline{v}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)\hat{a}_{in-1}^k)\right]\overline{v}_{n-1}^k\right\}, \tag{10}$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Нетрудно показать, что если $\{\overline{v}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы (8) – (10), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ [11], из краевого условия (2) в силу (6) имеем

$$\overline{v}_n^k(r, t)\big|_{\Gamma} \equiv 0, \qquad \overline{v}_n^k(r, t)\big|_{\Gamma_0} \equiv 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_0 для уравнений (8) – (10). Перейдем к нахождению решений этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8) – (10) можно представить в виде

$$g(t)\overline{v}_{nrr}^k - \overline{v}_{ntt}^k + \frac{(m-1)g(t)}{r}\overline{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\overline{v}_n^k = f_n^k(r, t), \tag{12}$$

где $f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv 0$. Выполнив в (12) замену переменных $\overline{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2}v_n^k(r, t)$ и положив затем $r = r$, $y = \left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{g(\xi)}\,d\xi\right)^{2/3}$, получим

$$yv_{nrr}^k - v_{nyy}^k + \frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}v_n^k - b(y)v_{ny}^k = \overline{f}_n^k(r, y),$$

$$\overline{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}, \quad b(y) = \frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy} - \frac{g}{y}\right], \tag{13}$$

$$\bar{f}_n^k(r, y) = r^{(m-1)/2}\,\frac{f_n^k(r, t)}{y^2}.$$

Полагая $v_n^k = \omega_n^k \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)\,d\xi\right]$, уравнение (13) приводим к виду

$$y\omega_{nrr}^k - \omega_{nyy}^k + \frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}\,\omega_n^k = c(y)\omega_n^k + \tilde{f}_n^k(r, y), \tag{14}$$

$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b_y') \in C(y > 0), \qquad \tilde{f}_n^k(r, y) = \bar{f}_n^k(r, y)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)\,d\xi\right].$$

Уравнение (14), в свою очередь, с помощью замены переменных $r = r,\ x_0 = \frac{2}{3}\,y^{3/2}$ переходит в уравнение

$$\omega_{nrr}^k - \omega_{nx_0x_0}^k - \frac{1}{3x_0}\,\omega_{nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\omega_n^k = g_n^k(r, x_0), \tag{15}$$

$$g(r, x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-2/3}\left\{\tilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right] + c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right]\omega_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (11) примет вид

$$\omega_n^k(r, 0) = 0, \quad \omega_n^k(r, r) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad 0 \le r \le 1. \tag{16}$$

Наряду с уравнением (15) рассмотрим уравнения

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^k \equiv \omega_{\alpha,nrr}^k - \omega_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}\,\omega_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\omega_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r, x_0), \tag{17}$$

$$L_0\omega_{0,n}^k \equiv \omega_{0,nrr}^k - \omega_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\omega_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r, x_0), \tag{18}$$

$$g_{\alpha,n}^k(r, x_0) =$$

$$= \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}\left\{\tilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] + c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\omega_{\alpha,n}^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\},$$

$$g_{0,n}^k(r, x_0) = \tilde{f}_n^k(r, x_0) + c(x_0)\omega_{0,n}^k(r, x_0), \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1.$$

Отметим, что уравнение (15) совпадает с уравнением (17) при $\alpha = 1/3$.

Как доказано в [4] (см. также [12]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (17) и (18).

Утверждение 1. *Если* $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ — *решение задачи Коши для уравнения* (18), *удовлетворяющее условию*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \tag{19}$$

то функция

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0)(1-\xi^2)^{\alpha/2-1} d\xi \equiv$$

$$\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0,x_0^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0^2}\right] \tag{20}$$

при $\alpha > 0$ *является решением уравнения* (17) *с данными* (19).

Утверждение 2. *Если* $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ — *решение задачи Коши для уравнения* (18), *удовлетворяющее условиям*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \tag{21}$$

то при $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\alpha/2} d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q} 2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right) D_{0,x_0^2}^{\alpha/2-1}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0}\right] \tag{22}$$

является решением уравнения (17) *с начальными данными*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \qquad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{23}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ — *гамма-функция,* D_{0t}^α — *оператор Римана–Лиувилля, а* $q \geq 0$ — *наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q \geq m-1$.

При этом функции $g_{\alpha,n}^k(r, x_0)$, $g_{0,n}^k(r, x_0)$ связаны формулами (20) в случае утверждения 1 и формулами (22) в случае утверждения 2.

Учитывая формулу (22), а также обратимость оператора D_{0t}^α [2], задачу Дарбу для уравнения (15) с данными (16) сводим к задаче Дарбу для (18) с краевыми условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^k(r, 0) = 0, \qquad \omega_{0,n}^k(r, r) = 0. \tag{24}$$

В [4, 7] доказано, что задача (18), (24) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_{0,n}^k(r, x_0) = \int_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int_0^{(r-x_0)/2} c(\xi_1-\eta_1)\omega_{0,n}^k(\xi_1, \eta_1)P_\mu(z)\,d\xi_1\,d\eta_1 + p(r, x_0), \tag{25}$$

$$p(r, x_0) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r+x_0}{2}\right)^\beta + \left(\frac{r-x_0}{2}\right)^\beta\right] - \frac{x_0}{2r}\int_{(r-x_0)/2}^{(r+x_0)/2} \xi_1^{\beta-1} P'_\mu\left(\frac{r^2-x_0^2+4\xi_1^2}{4r\xi_1}\right) d\xi_1 +$$

$$+ \int_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int_0^{(r-x_0)/2} \tilde{f}_n^k(\xi_1+\eta_1, \xi_1-\eta_1)P_\mu(z)\,d\xi_1\,d\eta_1,$$

$$z = \frac{2x_0(\xi_1 - \eta_1) + 4\xi_1\eta_1 + r^2 - x_0^2}{2r(\xi_1 + \eta_1)},$$

$\mu = n + \dfrac{m-3}{2}$, $\beta = \mu - 2s \geq \dfrac{m+3}{2}$, $s = 0, 1, \ldots$, $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, которая является функцией Римана для уравнения $L_0\omega_{0,n}^k = 0$.

Известно, что уравнение вида (25) обратимо [13, с. 30]. Это означает, что задача (18), (24) имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Следовательно, в силу утверждения 2 задача (15), (16) также имеет бесчисленное множество ненулевых решений вида (22), где $\omega_{0,n}^{k,1}$ определяются из (25).

Таким образом, решив сначала задачу (8), (11) $(n=0)$, а затем (9), (11) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\overline{v}_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Итак, как и в [4], показано, что

$$\int\limits_{\Gamma} \rho(\theta) Lu\, d\Gamma = 0. \tag{26}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — множество, которое плотно в $L_2\left(\int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}\,d\xi,\ 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}\,d\xi\right)$, $\rho(\theta) \in C^\infty(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$, а $T(t) \in V_1$ плотно в $L_2(0, t_0)$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes \Gamma \otimes V_1$ плотно в $L_2(D_0)$ [14]. Отсюда и из (26) следует

$$\int\limits_{D_0} f(r, \theta, t) Lu\, dD_0 = 0 \quad \text{и} \quad Lu = 0 \quad \forall (r, \theta, t) \in D_0.$$

Следовательно, задача (1), (2) имеет нетривиальные решения вида

$$u(r, \theta, t) = r^{(1-m)/2} v_0^1(r, t) Y_{0,m}^1(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где $v_n^k(r, t)$ определяется из предыдущих двумерных задач Дарбу.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), а также оценки [11]

$$k_n \leq c_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^p}{\partial \theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{m/2-1+p}, \qquad c_1, c_2 = \text{const},$$

$j = 1, \ldots, m-1$, $p = 0, 1, \ldots$, как и в [4, 7], можно показать, что решение (27) принадлежит классу $C^1(\overline{D}_0) \cap C^2(D_0)$, если $l > \dfrac{3m}{2}$.

Теорема 1 для задачи (1), (2) доказана.

Справедливость этой теоремы для задачи (1), (3) с помощью результатов [4, 7], а также формулы (20) и утверждения 1 устанавливается аналогичным образом.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Построим решение $v(r, \theta, t)$ уравнения (1^*), удовлетворяющее краевым условиям

$$v\big|_S = \tau(r, \theta) = \overline{\tau}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \qquad v\big|_{S_1} = 0, \tag{28}$$

$\overline{\tau}_0^1(r) \in G$, где G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1(\varepsilon \leq r \leq 1) \cap C^2(\varepsilon <$

$< r < 1$). Очевидно, G плотно всюду в $L_2((\varepsilon; 1))$. Решение $v(r, \theta, t)$ будем искать в виде ряда (6). Тогда, как и в случае задачи (1), (2), функции $\overline{v}_n^k(r, t)$ будут удовлетворять системе уравнений (8)–(10), где $\hat{a}_{in}^k$, $\tilde{a}_n^k$, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\hat{a}_{in}^k$, $-\tilde{a}_{in}^k$, $-\tilde{b}_{in}^k$, а $\tilde{c}_n^k$ заменено на $\tilde{d}_n^k$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Из краевого условия (28) имеем

$$\overline{v}_0^1\big|_\Gamma = \overline{\tau}_0^1(r), \qquad \overline{v}_0^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{29}$$

$$\overline{v}_n^k\big|_\Gamma = 0, \qquad \overline{v}_n^k\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{30}$$

Далее рассмотрим уравнение (15), к которому сводится (8)–(10), при этом условия (29), (30) примут вид

$$\omega_0^1(r, 0) = \tau_0^1(r), \qquad \omega_0^1(r, 1-r) = 0, \quad \varepsilon \le r \le 1, \tag{31}$$

$$\omega_n^k(r, 0) = 0, \qquad \omega_n^k(r, 1-r) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots , \tag{32}$$

$$\tau_0^1(r) = r^{(m-1)/2}\overline{\tau}_0^1(r).$$

Теперь рассмотрим задачу (15), (31). Ее решение будем искать в виде $\omega_0^1(r, x_0) = \omega_0^{1,1} + \omega_0^{2,1}$, где $\omega_0^{1,1}(r, x_0)$ — решение задачи Коши (15), (19), а $\omega_0^{2,1}(r, x_0)$ — решение задачи Дарбу для (15) с условием $\omega_0^{2,1}(r, 0) = 0$, $\omega_0^{2,1}(r, 1-r) = -\omega_0^{1,1}(r, 1-r)$.

Нетрудно заметить, что, используя формулы (20), (22), задачи (15), (19) и (15), (31) можно свести соответственно к задаче Коши (18), (19) и задаче Дарбу для $L_0\omega_{0,0}^{2,1} = 0$ с данными

$$\omega_{0,0}^{2,1}(r, 0) = 0, \qquad \omega_{0,0}^{2,1}(r, 1-r) = \sigma_0^1(r),$$

которые однозначно разрешимы [4], где $\sigma_0^1(r)$ выражается через $\tau_0^1(r)$.

Аналогично, задачу (15), (32) сводим к задаче Дарбу для (18) с условием $\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0$, $\omega_{0,n}^{k,1}(r, 1-r) = 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, которое имеет нулевое решение.

Следовательно, учитывая утверждения 1 и 2, находим последовательно однозначные решения задач (8), (29), (9), (30) и (10), (30).

Таким образом, решение задачи (1*), (28) в виде (27) построено.

Аналогичным образом строится решение этой задачи, если $\tau(r, \theta) = \overline{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теперь покажем, что решение задачи (1), (2) в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x, t) \equiv 0$.

Из определения сопряженных операторов [15] имеем

$$v \cdot Lu - u \cdot L^* v = -v \cdot P(u) + u \cdot P(v) - u \cdot vQ,$$

где

$$P(u) = g(t) \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N', x_i) - u_t \cos(N', t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N', x_i) + b \cos(N', t),$$

N' — внутренняя нормаль к границе ∂D_ε.

Далее, используя формулу Грина, получаем

$$\int_{D_\varepsilon}(\upsilon Lu - uL^*\upsilon)\,dD_\varepsilon = \int_{D_\varepsilon}\left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N}\right)M + u\upsilon Q\right]ds, \tag{33}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}$ — конормаль к ∂D_ε, $M^2 = g^2\sum_{i=1}^{m}\cos^2(N', x_i) + \cos^2(N', t)$.

Из (33), принимая во внимание граничные условия (2) и тот факт, что на характеристических коноидах S_ε и S_1 конормальные производные $\frac{\partial}{\partial N}$ совпадают с производной по касательному направлению [15], получаем

$$\int_S \tau(r, \theta)u_t(r, \theta, 0)\,ds = 0. \tag{34}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\left\{\overline{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^1(\theta)\right\}$ плотна [14] в $L_2(S)$, из (34) заключаем, что $u_t(x, 0) = 0 \quad \forall x \in S$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ для уравнения (1) [15] будем иметь $u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in D_\varepsilon$ в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Пусть теперь решение задачи (1), (2) в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x, t) \equiv 0$. Покажем, что $\varepsilon > 0$.

Предположим противное, т. е. $\varepsilon = 0$. Тогда из теоремы 1 приходим к противоречию.

Таким образом, теорема 2 для задачи (1), (2) доказана.

Установим ее справедливость для задачи (1), (3).

Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала построим решение уравнения (1^*), удовлетворяющее краевым условиям

$$(b\upsilon - \upsilon_t)\big|_S = \nu(r, \theta) = \overline{\nu}_0^1(r)Y_{0,m}^1(\theta), \qquad \upsilon\big|_{S_1} = 0, \tag{35}$$

где $\overline{\nu}_0^1(r) \in G$, в виде (6).

В этом случае функции $\overline{\upsilon}_n^k(r, t)$ удовлетворяют системе уравнений (8) – (10) и краевым условиям

$$(\tilde{b}_0^1\overline{\upsilon}_0^1 - \overline{\upsilon}_{0t}^1)\big|_\Gamma = \overline{\nu}_0^1(r), \qquad \overline{\upsilon}_0^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{36}$$

$$(\tilde{b}_n^k\overline{\upsilon}_n^k - \overline{\upsilon}_{nt}^k)\big|_\Gamma = 0, \qquad \overline{\upsilon}_n^k\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

которые, в свою очередь, сводятся к уравнению (15) с данными

$$\omega_0^1(r, 0) = \tau_0^1(r), \qquad \omega_0^1(r, 1-r) = 0,$$

$$\omega_n^k(r, 0) = 0, \qquad \omega_n^k(r, 1-r) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\tau_0^1(r) = 4ar^{(m-1)/2}\overline{\nu}_0^1(r), \qquad a = \lim_{t\to 0}\frac{y^{3/2}g(t)}{g^{3/2} + y^{3/2}g(t)\tilde{b}_0^1 - y^{3/2}g_t'} \neq 0, \qquad |a| < \infty,$$

однозначно разрешимыми в $C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\varepsilon)$.

Следовательно, с учетом утверждений 1 и 2 найдем последовательно однозначные решения задач (8), (36), (9), (37) и (10), (37).

Таким образом, решение задачи (1^*), (35) в виде (27) построено. Аналогично строятся решения этой задачи, если $\nu(r, \theta) = \overline{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Далее, как и в случае задачи (1), (2), теорема 2 устанавливается для задачи (1), (3).

4. Доказательство теоремы 3. Пусть $\varepsilon \geq 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (4). Построим решение $v(r, \theta, t)$ уравнения (1^*), удовлетворяющее краевым условиям $v\big|_S = \tau(r, \theta) = \overline{\tau}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta)$, $v\big|_{S_\varepsilon} = 0$, в виде ряда (6).

В этом случае функции $\overline{v}_n^k(r, t)$ удовлетворяют системе уравнений (8)–(10) и краевым условиям

$$\overline{v}_0^1\big|_\Gamma = \overline{\tau}_0^1(r), \qquad \overline{v}_0^1\big|_{\Gamma_\varepsilon} = 0,$$

$$\overline{v}_n^k\big|_\Gamma = 0, \qquad \overline{v}_n^k\big|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

которые, в свою очередь, сводятся к уравнению (15) с данными

$$\begin{gathered} \omega_0^1(r, 0) = \overline{\tau}_0^1(r), \qquad \omega_0^1(r, r-\varepsilon) = 0, \\ \omega_n^k(r, 0) = 0, \qquad \omega_n^k(r, r-\varepsilon) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{38}$$

При $\varepsilon = 0$, как и в п. 2, доказываем, что задача (15), (38) имеет бесчисленное множество решений, а при $\varepsilon > 0$, как и в п. 3, — ее однозначную разрешимость.

Далее, аналогично теореме 2 доказывается теорема 3 для задачи (1), (4). По этой же схеме устанавливается ее справедливость для задачи (1), (5).

В заключение отметим, что данный результат анонсирован в [16].

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
3. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Ration. Mech. and Anal. – 1954. – **3**, № 4. – P. 435–446.
4. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
5. *Алдашев С. А., Ким Н. Х.* Математическая модель процесса промышленного взрыва в осесимметрическом случае // Докл. НАН РК, Алматы. – 2001. – № 2. – С. 5–7.
6. *Алдашев С. А., Атабай Б. Ж.* Математическое моделирование процесса взрыва горных пород // Тр. междунар. конф. „Современные проблемы механики". Ч. 2. Общая и прикл. механика. – Алматы: Казах. ун-т, 2001. – С. 25–27.
7. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 1–5.
8. *Нуржанов Ш. Т.* Задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений: Дис.... канд. физ.-мат. наук. – Алматы, 2000. – 67 с.
9. *Алдашев С. А.* О критериях единственности задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Мат. журн. (Алматы). – 2002. – **2**, № 4. – С. 5–8.
10. *Алдашев С. А.* Критерий единственности решения задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Докл. НАН РК, Алматы. – 2002. – № 3. – С. 5–7.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
12. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1973. – 143 с.
13. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 162 с.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4 т. – М.: Наука, 1981. – Т. 4, ч. 2. – 550 с.
15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
16. *Алдашев С. А.* Критерий единственности решения задачи Дарбу–Проттера для многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Докл. НАН РК, Алматы. – 2002. – № 6. – С. 50–52.

Получено 27.03.2003